WUCHA LILUN
YU
CELIANG PINGCHA JICHU

误差理论与测量平差基础

隋立芬　宋力杰　编著

解 放 军 出 版 社

误差理论与测量平差基础

隋立芬　宋力杰　编著

解放军出版社

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差基础/隋立芬等编著 . - 北京:解放军出版社,2004
ISBN 7-5065-4616-7

Ⅰ. 误... Ⅱ. 隋... Ⅲ. ①误差理论②测量平差
Ⅳ. P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 014955 号

解放军出版社出版
(北京地安门西大街 40 号/邮政编码 100035)
1201 印刷厂印刷　　解放军出版社发行
2004 年 5 月第 1 版　2004 年 5 月第 1 次印刷
开本:787 毫米×1092 毫米　1/16　印张:13.75
字数:317 千字　　印数:3000 册
定价:40.00 元

内 容 提 要

本书系统全面地阐述了测量误差的基本理论、测量平差的基本原理和基本方法，并概述了现代测量平差的基本理论。全书共分七章。主要内容包括：测量误差理论与最小二乘原理；测量平差基本方法；测量平差函数模型和随机模型的概念及建立；测量数据的统计假设检验方法；现代测量平差基本理论等。本书内容充实，结构严谨，体系完整，理论与应用并重，不仅包括了测量数据处理的经典理论，而且反映了测量平差的当代进展。

本书可作为高等学校测绘工程专业本科教材，也可供相关专业的工程技术人员参考。

前　言

本书依据教育部颁布的《普通高等学校本科专业目录》中测绘类专业课程设置的要求，按照现行教学大纲，为适应21世纪军事测绘人才“宽口径、厚基础、强能力、高素质”的培养目标，以着重加强本课程的基本概念、基本理论和基本技能为原则，在原解放军测绘学院《最小二乘法与测量平差》（本科用）教材的基础上修编而成。

《最小二乘法与测量平差》（本科用）为原解放军测绘学院大地教研室教师集体编著的教材，它凝集了几代测量平差教员的智慧及几十年教学和科研的成果。本教材的教学体系和主要内容与原教材基本一致，主要讲授误差理论的基本知识和基于偶然误差的测量平差的基本理论和基本方法。

根据新大纲的要求和新的人才培养模式，本书与原教材相比，在结构和内容上都做了较大调整和修订。在结构上由原来的九章缩编为七章，将原来的八、九章内容放在《测量平差应用》课程中讲授。在教学内容上做了如下修编：其一，删去了陈旧的与现代科技发展不相称的内容。如克吕格分组平差。其二，在误差理论部分加强了对精度、准确度以及精确度等基本概念的阐述，增加了系统误差的传播及偶然误差与系统误差的综合传播等内容。其三，在平差方法方面，为适应现代测量技术对数据处理的要求，增加了具有约束条件的参数平差的解法、序贯平差和参数加权平差等内容。其四，加强了平差中的函数模型、随机模型和模型误差等概念，增加了对平差结果的统计性质、法方程系数阵的性质及其制约性的讨论，补充了误差椭圆的概念。其五，在平差系统的假设检验方面，增加了验后方差的检验和参数向量的置信椭球及其假设检验等内容，使假设检验的内容更加系统和完善。其六，补充增加了现代测量平差的基本理论和基本方法，为进一步学习后续课程奠定基础。

本书由隋立芬教授、宋力杰副教授修订和编写。其中第一、五、七章和绪论由隋立芬编写，第二、三、四、六章由宋力杰编写。全书由宋力杰编辑排版并绘制了插图，刘雁雨提供了部分算例。

由于编著者水平所限，文中如有错误和不当之处，敬请读者予以指正。

编著者

2003年2月

目　　录

绪　论

大量观测数据的处理，是测量工作重要环节之一。高斯(Gauss)和勒戎德尔(Legendre)于19世纪初创立了解决这一问题的基本理论和方法——最小二乘法。从那时起，两个多世纪以来，随着科学与技术的不断进步，特别是近代科学与技术的发展，最小二乘法也增添了许多新的内容，理论更趋全面严谨，方法更加灵活多样，应用也更为广泛。本课程的任务，就是介绍这一方面的有关理论和方法。

一、测量平差基本概念

在测量工作中，由于受测量过程中客观存在的各种因素影响，使得一切测量结果都不可避免的带有误差。例如，对一段距离进行重复观测时，各次观测的长度总不可能完全相同。又如，一个平面三角形三内角之和理论上应等于180°，实际上，如果对这三个内角进行观测，其三内角观测值之和一般不等于180°，而存有差异，这种差异的产生，是因为观测值中含有观测误差。于是，研究观测误差的内在规律，对带有误差的观测数据进行数学处理并评定其精确程度等，就成为测量工作中需要解决的重要实际问题。

观测误差产生的原因很多，概括起来主要有以下四个方面。

1.观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，因此在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度、技术水平以及情绪的变化，也会对观测成果的质量产生影响。

2.测量仪器

测量是利用测量仪器进行的，由于测量仪器结构的不完善，测量的精密度有一定的限度，因而使观测值产生误差。例如，光学经纬仪，理论上要求主光轴、俯仰轴和垂直轴三轴要正交，但实际上不可能严格正交；水准仪的视准轴不平行于水准轴；电磁波测距仪的零位误差、电路延迟；经纬仪度盘的刻划误差等，这些因素都会使测量结果产生误差。

3.外界环境

观测过程所处的客观环境，如温度、湿度、风力、风向、大气折光、电离层延迟等因素都会对观测结果产生影响；同时，随着这些因素的变化，如温度的高低，湿度的大小，风力的强弱及大气折光的不同，其对观测结果的影响也不同。在这种多样而变化的外界自然条件下进行观测，就必然使观测结果产生误差。

4.观测对象

观测目标本身的结构、状态和清晰程度等，也会对观测结果直接产生影响，如三角测量中的观测觇标和圆筒由于风吹日晒而产生了偏差；GPS导航定位中的卫星星历误差、卫星钟误差及设备延迟误差等，都会使测量结果产生误差。

上述的观测者、测量仪器、外界环境及观测对象这四个方面的因素是使测量产生误差的主

要来源，我们把这四个因素合称为测量条件。显然，测量条件的好坏直接影响着观测成果的质量。测量条件好，观测中产生的误差就会小，观测成果的质量就会高；测量条件差，产生的观测误差就会大，观测成果的质量就会低；如果测量条件相同，观测误差的量级应该相同。我们把测量条件相同的观测称为等精度观测，在相同测量条件下所获取的观测值称为等精度观测值；而测量条件不同的观测称为非等精度观测，相应的观测值称为非等精度观测值。

由于测量条件不尽完善，测量误差是客观存在的。为了检验观测结果的精确性和提高观测结果的可靠性，实践中得出的有效方法是进行多余观测（也称过剩观测）。事实上不难发现，当测量足够精细时，同一量的多次观测结果，常会有一定的差异。存在固有关系的几个量的观测结果，常会出现某种程度的不符，这就是测量误差存在的反映。测量工作中正是根据这一现象，采取反复观测、多方印证，即采用多余观测的方法，作为揭示误差、发现错误、提高观测结果质量并进行精度评定的基本手段。

所谓多余观测就是多于必要观测的观测。如直接测定某一段距离的长短时，不是只观测一次，而是观测多次，这时，其中一次是必要观测，其他则为多余观测；又如，在测定一个平面三角形的三个内角时，不只是观测任意两角，由此推算第三角，而是三个角都观测，这时，有两个是必要观测，另一即多余观测。

多余观测可以揭示测量误差，同时多余观测又使观测结果产生了矛盾。如平面三角形三内角观测值之和不等于180°，即闭合差不等于零。为了消除矛盾，必须对观测结果进行平差，为此我们给出测量平差的基本概念。在多余观测的基础上，依据一定的数学模型和某种平差原则，对观测结果进行合理的调整，从而求得一组没有矛盾的最可靠结果，并评定精度，这一过程称之为平差。测量平差所依据的原则为最小二乘原理。

设 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 表示 n 个独立的等精度观测结果，为消除矛盾而赋与观测结果对应的改正数为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，在 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 可信赖程度相同，即等精度情况下，最小二乘原理要求这些改正数的平方和为最小，即

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \min \tag{1}$$

若令

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

则(1)式又可表示为

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \min \tag{2}$$

更为一般地，当观测值 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的可信赖程度不同，即为非等精度，而且顾及它们之间内在的关联时，最小二乘原理可表示为

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{V} = \min \tag{3}$$

式中

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/p_1 & 1/p_{12} & \cdots & 1/p_{1n} \\ 1/p_{21} & 1/p_2 & \cdots & 1/p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/p_{n1} & 1/p_{n2} & \cdots & 1/p_n \end{bmatrix}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{-1} \tag{4}$$

$\boldsymbol{P}$ 称为观测结果的权阵，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}$称为对应的权逆阵。权阵中的 p_i 是反映观测结果之间相对精确程度的数值，称为对应观测结果 L_i 的权。

当(4)式中的 $1/p_{ij}$ 都为 0 时，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

则有

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2=\min \tag{6}$$

又若(5)式中的 p_i 都为 1 时，则权阵 $\boldsymbol{P}$ 为单位阵，即

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

(6)式即变为(1)式。

$\boldsymbol{P}$ 为单位阵或对角阵时，表明观测结果 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 间是相互独立的。

依最小二乘原理，平差计算所得的观测值改正数，称为最或然改正数(有时简称为改正数)，也称残差；经最小二乘平差计算求得的有关量的最可靠值，称为该量的最或然值，又叫平差值。

不仅是通过观测直接或间接得到的数据要进行平差处理，有时对于一些已平差过的值也要进行再平差。因此参加平差的数据不仅包括直接观测值，还包括间接观测值和在一定范围内已进行过平差的数据，今后无特别注明时，总是概括地称它们为观测值。

二、测量平差发展简史

18 世纪末，在天文学、大地测量学以及与观测自然现象有关的其他科学领域中，常常提出这样的问题，即如何消除由于观测误差引起的观测值之间的矛盾，从多于待估量的观测值中求出待估量的最优值。当时各国许多著名科学家都开始研究这一课题。

1794 年，年仅 17 岁的高斯(C.F.Gauss)首先提出了解决这个问题的方法—最小二乘(Least Squares)法。他是以算术平均值为待求量的最或然值，观测误差服从正态分布这一假设导出了最小二乘原理。1801 年，天文学家对刚发现的谷神星运行轨道的一段弧长进行了一系列观测，后来因故中止了观测。这就需要根据这些极其有限且带有误差的观测结果求出该星运行的实际轨道。高斯用自己提出的最小二乘法解决了这个当时很大的难题，对谷神星运行轨道进行了预报，使天文学家又及时找到了这颗彗星。但高斯并没有及时行文发表他所提出的最小二乘法。直到 1809 年，高斯才在《天体运动的理论》一文中，从概率的观点详细叙述了他所提出的最小二乘原理。而在此之前，1806 年，勒戎德尔(A.M.Legendre)发表了《决定彗星轨道新方法》一文，从代数的观点独立地提出了最小二乘法，并定名为最小二乘法。所以后人称它为高斯—勒戎德尔方法。

自高斯1794年提出最小二乘原理到20世纪五六十年代的150多年间，许多学者对测量平差的理论和方法进行了大量的研究，提出了一系列解决各类测量问题的平差方法。这些平差方法都是基于观测值随机独立的高斯最小二乘原则，所以一般称其为经典最小二乘平差。这一时期，由于计算工具的限制，测量平差的主要研究方向是如何少解线性方程组。提出了许多分组解算线性方程组的方法，如克吕格分组平差，赫尔默特分区平差等都是为了使解算方程组变得简单。

自20世纪六七十年代开始，随着测量工程的逐渐精密和现代化，特别是电子计算机、矩阵代数、泛函分析、最优化理论和概率统计在测量平差中的广泛应用，对测量平差的理论和实际产生了深刻影响，测量平差得到了很大发展，出现了许多新的平差理论和平差方法。

1.相关平差

1947年，田斯特拉（T.M.Tienstra）提出相关观测值的平差理论，将经典平差中对观测值随机独立的要求，推广到随机相关的观测值。相关平差的出现，观测值的概念广义化了，使得不仅随机独立的直接观测值可以作为平差元素，而且它的导出量，如随机独立直接观测值的函数或任何一种初步平差的结果都可作为平差元素。相关平差对测量平差的理论研究有重大的促进作用，并将经典的最小二乘平差推向了更广泛的应用领域。

2.最小二乘滤波、推估和配置

高斯的最小二乘法所选平差参数假设是非随机变量。随着测量技术的进步，需要解决观测量和平差参数均为随机变量的平差问题。20世纪60年代，产生了顾及随机参数的最小二乘平差方法——最小二乘滤波、推估和配置，它起源于最小二乘内插和外推重力异常的平差问题，由克拉鲁普（T.Kraaup）1969年提出。他把推估重力异常的方法推广到利用重力异常场中不同类型的数据，例如，重力异常、垂线偏差等，去估计重力异常场中的任一元素，如扰动位、大地水准面差距等。从而提出了最小二乘滤波、推估和配置，也称拟合推估法。莫里兹（H.Moritz）进行了系统研究，提出了带系统参数的最小二乘配置，并概述了这种方法在大地测量其他方面的应用。1972年，克劳斯（H.Krauss）将这一方法引入到航空摄影测量中。

3.秩亏自由网平差

高斯的最小二乘平差法是一种满秩平差问题，即平差模型方程中的系数阵 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩阵，权矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和权逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 也是满秩方阵，方程有惟一解。1962年，迈塞尔（P.Meissl）从测量平差观点，将高斯最小二乘平差模型中列满秩系数阵推广到奇异阵，提出了解决非满秩平差问题的秩亏自由网平差方法。1964年，高德曼（A.J.Goldmen）和蔡勒（M.Zelen）将满秩权逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 扩展到奇异阵，提出具有奇异权逆阵的最小二乘平差方法。1971年，劳（C.R.Rao）综合了各种可能情况，得出了广义高斯—马尔可夫平差模型，并把广义高斯—马尔可夫模型的参数估计称为最小二乘统一理论。现经众多学者的深入研究，已形成一整套秩亏自由网平差的理论体系和多种解法，并广泛应用于测量实践。

4.方差—协方差分量估计

经典平差，人们一直致力于平差函数模型的研究。随着新技术的不断发展和应用，测量平差的对象已从过去单一同类观测量扩展为不同种类、不同精度的观测量。因此，经典平差中的定权理论和方法必须革新，许多学者致力于将经典的先验定权方法改进为后验定权方法的研究，提出了多种方差—协方差分量的验后估计法。到20世纪80年代，方差—协方差分量估计理论已经形成并得到广泛应用。方差—协方差分量的验后估计主要有三种：Helmert型方差－

协方差分量估计法、方差分量的最小范数二次无偏估计法(Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimator),简称 MINQUE 法和方差分量的极大似然估计法。

5.系统误差和粗差的处理方法

观测误差按性质可分为粗差、系统误差和偶然误差三种。经典最小二乘平差仅讨论含有偶然误差的观测值。实际上,在平差前完全剔除粗差和消除系统误差的影响是不可能的。随着测量精度的不断提高,对平差结果的精度要求也越来越高,出现了通过平差剔除粗差和消除系统误差影响的平差方法。

在平差过程中消除系统误差对平差结果影响的常用方法是附加系统参数的平差法,基本思想是在仅含有偶然误差的函数模型的基础上,加入一些附加参数用以抵偿系统误差对平差结果的影响。为了检验系统误差的存在和影响,引进了数理统计学中的假设检验方法,结合平差对象和特点,测量学者发展了统计假设检验理论,提出了与平差同步进行的有效检验方法。

观测值中的粗差往往不可避免,相应的误差理论也得到发展。处理粗差问题主要有两种方法,一种是将粗差归于函数模型的数据探测法,最著名的是 1968 年荷兰巴尔达(W .Baarda)教授提出的测量系统的数据探测法和可靠性理论;另一种方法是将粗差归入随机模型的抗差估计法,即 Robust 估计法,又称稳健估计。到目前为止,已形成了粗差定位、估计和假设检验等理论体系。

总之,自 20 世纪 70 年代以来,随着现代测量新技术的应用,如 GPS、GIS 和 RS 在测绘中的应用,出现了许多新的测量数据处理理论和方法,测量平差理论和方法得到了飞速发展。

三、本课程的主要内容

由测量平差的基本概念可知,测量平差的主要任务有两个,一是依最小二乘原理求出待定量的最可靠值,二是评定观测结果和平差结果的精度。本课程的主要任务是系统介绍最小二乘法与测量平差的基本理论和基本方法,为以后的专业课学习,及进一步学习和研究测量平差打下坚实基础。其主要内容为:

(1)误差理论:包括测量误差及其分类,偶然误差的概率特性,精度标准,中误差和权的定义,方差阵及权逆阵传播规律等。

(2)测量平差函数模型和随机模型的概念及建立,参数估计概念及最小二乘原理。

(3)测量平差基本方法:重点介绍参数平差、条件平差、具有条件的参数平差和具有未知参数的条件平差等基本的平差方法,介绍参数分组平差、参数加权平差和序贯平差等。

(4)测量数据的统计假设检验方法。

(5)现代测量平差理论和方法简介。

第一章　误差理论与最小二乘原理

§1.1　测量误差及其分类

一、真值和真误差

正如在绪论中提到过的那样，由于测量条件的不完善使观测结果不可避免地带有误差。

不难理解，误差是相对于绝对准确而言的。反映一个量真正大小的绝对准确的数值，称为这一量的真值。通过量测直接或间接得到的一个量的大小称为这个量的观测值。与真值相对应的，凡以一定的精确程度反映这一量大小的数值，都统称之为此量的近似值或估计值，又简称估值。一个量的观测值或平差值，都是此量的估值。

设以 X 表示一个量的真值，L 表示它的某一观测值，Δ 表示观测误差，则有

$$\Delta = L - X \tag{1-1-1}$$

Δ 是相对于真值的误差，称为真误差。

真值通常是无法测知的，自然真误差也无法获得。但是在一些情况下，有可能预知由观测值构成的某一函数的理论真值。

例如：以 L_1、L_2、L_3 表示平面三角形三内角的观测值，三内角和的理论真值为 180°则是已知的。若以 W 表示三内角和的真误差——即三角形闭合差，由(1-1-1)式得

$$W = L_1 + L_2 + L_3 - 180° \tag{1-1-2}$$

因为三角形闭合差的真值为 0，仍由(1-1-1)式，可得 $\Delta W = W - 0 = W$，故 W 也可理解为三角形闭合差的真误差，

又如，当对同一个量观测两次，设观测值为 L_1 及 L_2，该量真值为 X，且以 d 表示两次观测的差值的真误差，由(1-1-1)式得

$$d = (L_1 - L_2) - (X - X) = L_1 - L_2 \tag{1-1-3}$$

由此可见，两次观测值的差值 d 就是差值的真误差。差值 d 又称较差。

二、误差分类

测量误差按其对观测结果的影响性质可分为以下三类：

1. 粗差

粗差主要是由失误引起的，一般以异常值或孤值形式表现出来。如测错、读错、记录错、计算错、仪器故障等所引起的偏差。经典测量中，这类粗差一般采取变更仪器或操作程序、重复观测和检核验算、分析等方式，检出粗差并予以剔除。因此，可以认为观测值中已基本没有粗差。现代测量中，观测过程中的电子化、自动化程度日益提高，观测数据自动记录、自动传输和计算，粗差的检测和分析，已成为一个重要问题。所以，在观测方案的设计和实施、观测中的检核及测后的分析处理中，采取有效措施进行粗差的探测和消除，是非常重要的。

2. 系统误差

由测量条件中某些特定因素的系统性影响而产生的误差称为系统误差。同等测量条件下的一系列观测中，系统误差的大小和符号常固定不变，或呈系统性变化。对于一定的测量条件和作业程序，系统误差在数值上服从一定的函数性规律。

测量条件中能引起系统误差的因素有许多。如，在天文测量中，由于观测者的习惯，误以目标偏于某一侧为恰好照准，因而使观测成果带有的系统误差，称为人差，是观测者的影响所致；又如，用带有一定误差的尺子量距时，使结果带有的系统误差，属于仪器误差；再有，风向、风力、温度、湿度、大气折射、地球弯曲等等外界因素，也都可能引起系统误差。

系统误差对观测结果的影响一般具有累积性，它对成果质量的影响也特别显著。所以在测量结果中，应尽量消除或减弱系统误差对观测成果的影响。为达到这一目的，通常采取如下措施：

(1)找出系统误差出现的规律并设法求出它的数值，然后对观测结果进行改正。例如尺长改正、经纬仪测微器行差改正、折光差改正等。

(2)改进仪器结构并制订有效的观测方法和操作程序，使系统误差按数值接近、符号相反的规律交错出现，从而在观测结果的综合中实现较好的抵消。例如，经纬仪按度盘的两个相对位置读数的装置、测角时纵转望远镜的操作方法、水准测量中前后视尽量等距的设站要求以及高精度水平角测量中日、夜的测回数各为一半的时间规定等。

(3)综合分析观测资料，发现系统误差，在平差计算中将其消除。

从测量结果中，完全消除系统误差是不可能的。实际上，只能尽量使它们的影响减少到最低限度。对于在具体测量工作中，系统误差所引起的问题如何处理，将在各有关专业课中讨论，经典平差中不更多涉及这方面内容。作为平差对象的观测数据，一般均被认为已经消除了系统误差。

3. 偶然误差

由测量条件中各种随机因素的偶然性影响而产生的误差称为偶然误差。偶然误差的出现，就单个而言，无论数值和符号，都无规律性，而对于大量误差的总体，却存在一定的统计规律。偶然误差也称随机误差。

整个自然界都在永不停顿地运动着，即使看来相同的测量条件，也时刻有不规则的变化，这种不断的偶然性变化，就是引起偶然误差的随机因素。偶然误差是许多随机因素影响所致的小误差的代数和。

例如，用经纬仪测角时，测角误差主要是由照准、读数等引起的误差所构成，而这里的每项误差又是由许多随机因素所致。如其中的照准误差就可能是由于脚架或觇标晃动及扭转、风力风向变化、目标背景、大气折光与大气透明度等的影响，而上面的任何一种影响又是产生于许多偶然因素。可见，测角误差是许许多多微小误差的代数和，而每一项微小误差又随着偶然因素影响的不断变化，其数值可大可小，符号或正或负。因此，测量中数不清的受偶然因素影响而产生的小误差，它们的大小和正负，我们既不能控制也不能事先预知，当然由它们的代数和所构成的偶然误差，其数值的大小和符号的正负也是偶然的。

在一切测量中，偶然误差是不可避免的。经典最小二乘平差就是在认为观测值仅含有偶然误差的情况下，调整误差、消除矛盾，求出最或然值，并进行精度评定。

§1.2　偶然误差的概率特性

一、偶然误差的分布和统计性质

前已指出,偶然误差是由无数偶然因素影响所致,因而每个偶然误差的数值大小和符号正负都是偶然的(或随机的)。然而,反映在个别事物上的偶然性,在大量同类事物的统计分析中却呈现出一定的统计规律性。例如,一个具有一定技术水平的射手进行射击实验,假设仅考虑许多偶然因素的影响,每发射一弹命中靶心的上、下、左、右都有可能,但当射击次数足够多时,弹着点就会呈现出明显的规律性,即越靠近靶心越密;越远离靶心越稀;差不多以靶心为对称点。偶然误差具有与之类似的规律性。为寻求偶然误差的规律性,下面通过测量实例来说明。

某测区,在相同测量条件下,独立观测了 817 个三角形的全部内角,由 $W = L_1 + L_2 + L_3 - 180°$算得各三角形的闭合差。由于作业中已尽量剔除了粗差和系统性影响,这些三角形闭合差,就整体而言,都是偶然因素所至,故为偶然误差。它们的数值分布情况列于下面的表 1-2-1内(等于分界数值的闭合差,统计在数值小的区间中)。

表 1-2-1　偶然误差数值分布表

误差的区间	Δ 为负值			Δ 为正值			总数
	个数 n_i	频率 $\omega=\frac{n_i}{n}$	$\frac{\omega}{d\Delta}$	个数 n_i	频率 $\omega=\frac{n_i}{n}$	$\frac{\omega}{d\Delta}$	
0″.00～0″.50	121	0.15	0.30	123	0.15	0.30	244
0.50～1.00	90	0.11	0.22	104	0.13	0.26	194
1.00～1.50	78	0.10	0.20	75	0.09	0.18	153
1.50～2.00	51	0.06	0.12	55	0.07	0.14	106
2.00～2.50	39	0.05	0.10	27	0.03	0.06	66
2.50～3.00	15	0.02	0.04	20	0.02	0.04	35
3.00～3.50	9	0.01	0.02	10	0.01	0.02	19
3.50 ～ ∞	0	0.00	0.00	0	0.00	0.00	0
和	403	0.50		414	0.50		817

表中 ω 栏表示误差出现在相应区间的频率,它等于出现在该区间的误差个数 n_i 与总的误差个数 n 之比。

考察这一统计表,不难发现如下的规律:这些闭合差数值上不会超出一定界限;绝对值小的闭合差比绝对值大的闭合差要多;绝对值相等的正负闭合差个数大致相等。

上述情况,不仅表现于这个例子里,在大量的测量结果中,偶然误差都有与此完全一致的规律性。

为了对偶然误差的分布情况有个更直观的了解,并为进一步从理论上加以探讨,可按下述方法作出以上实例的解析图。具体作法是先在横轴上截出表中的各误差区间并以之为底,再以误差出现于相应区间的频率除以区间间隔 $d\Delta$(此 $d\Delta = 0.5$ 处取)的商为高,即$\frac{\omega}{d\Delta}$,作一系列长方形,则得如图 1-2-1 所示的直方图。图中每一长方形面积即为误差出现于该相应区间

的频率，长方形面积之和等于 1，长方形的高则表示相应区间的误差分布密度。这种图通常称为直方图，它形象地表示了误差的分布情况。

由此可知，在独立等精度条件下所得的一组观测误差，只要误差的总个数 n 足够多，那么，误差出现在各区间的频率总是稳定在某一常数附近，而且当观测个数愈多时，稳定程度愈高。如表 1－2－1 所示，如果在观测条件不变的情况下，再继续观测更多的三角形，则可以预见，随着观测个数的增加，误差出现在各区间的频率其变动的幅度也就愈来愈小，当 $n \to \infty$ 时，各频率将趋于一个完全确定的值，这个值即为误差出现在各区间的概率。这就是说，一定的测量条件对应着一种确定的误差分布。

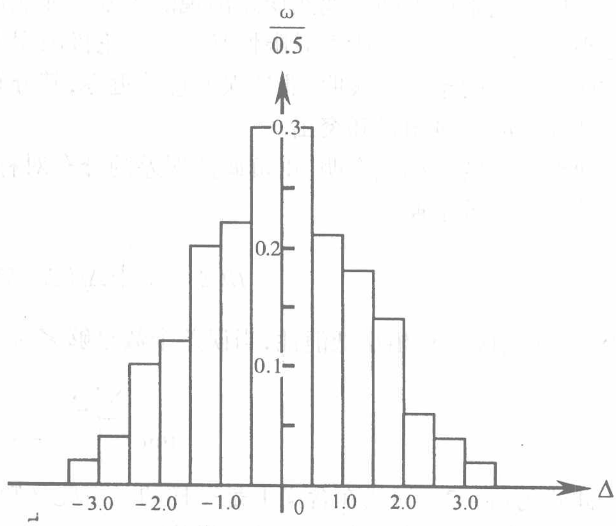

图 1－2－1

实际上误差的取值是连续的，当设想误差个数无限增多，所取区间间隔无限缩小时，则图 1－2－1 的直方图中各长方形上底的极限将形成一条连续曲线，设以 $f(\Delta)$ 表示，则得如图 1－2－2 所示的光滑曲线。

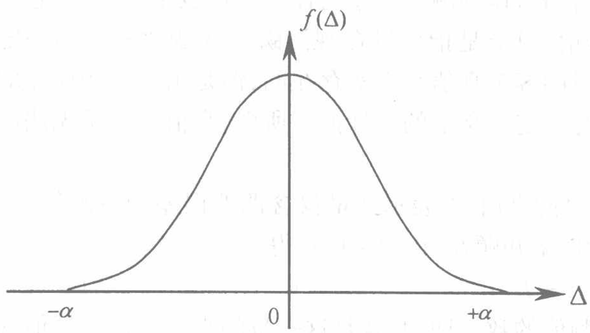

图 1－2－2

图中的曲线即为偶然误差的概率分布曲线，又称为偶然误差的分布密度曲线。这一曲线与正态分布密度曲线极为接近，所以一般总是认为，当 $n \to \infty$ 时，偶然误差的频率分布是以正态分布为其极限的。

理论上，可由概率论中的中心极限定理给出证明。中心极限定理指出：若随机变量 y 是众多随机变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 之和，$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，如果 x_i 相互独立，且对 y 的影响均匀小，则当 n 相当大时，随机变量 y 趋于服从正态分布。偶然误差正是这一类型的随机变量，即，$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$。

通过上面的分析讨论，可用概率的术语将偶然误差的规律性阐述如下：

(1)在一定的测量条件下，偶然误差的数值不超过一定限值，或者说超出一定限值的误差出现的概率为零。

(2)绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

(3)绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

这就是偶然误差的三个概率特性，或简称偶然误差三特性。这三特性可简要概括为：界限性、聚中性及对称性，它们充分揭示了表面上似乎并无规律性的偶然误差的内在规律。掌握这

一规律并加以运用是很重要的。

偶然误差的界限性表明，在一定测量条件下，偶然误差的数值是有一定范围的。因此我们可以根据测量条件来确定偶然误差出现的界限。显然测量条件愈好，可能出现的最大偶然误差愈小；反之，则愈大。所以界限性是以后讨论极限误差的理论依据。

偶然误差的聚中性表明，偶然误差愈接近零，其分布愈密，而且易知，对于较好的测量条件这一特性也必相对明显和突出。

偶然误差的对称性表明，正负偶然误差的分布对称于零，故其密度函数必为偶函数，于是得偶然误差的数学期望

$$E(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta f(\Delta) d\Delta = 0 \qquad (1-2-1)$$

这说明，偶然误差有相互抵消性，当误差个数足够多时，其算术平均值应趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}{n} = 0 \qquad (1-2-2)$$

此式与(1－2－1)式在含义上是一样的。由此又知，偶然误差的分布即以其数学期望为对称中心，此中心常称作离散中心或扩散中心。

二、真值的统计学定义

在§1.1 中已经给出了真值的定义。一个量的真值即准确反映其真正大小的数值。由于自然界中的一切事物都是在不停地发展变化着，作为测量对象的任何一量也不会例外，它的真正大小也是随时变化的。所以一个量的真值，只能是指该量在观测瞬间或变化极微的一定时间段内的确切大小。按照这一观点，一个量的客观真值是真实存在的，但是由于观测误差的不可避免，某些量依靠观测所得到的值只能是一定意义下的估计值。所以，真值一般是无法确知的理论值。

依照统计学的观点，设以 X 表示一个量的真值，L 表示此量仅含偶然误差的观测值，Δ 表示对应的真误差，则由(1－1－1)式取数学期望并顾及(1－2－1)式得

$$X = E(L) \qquad (1-2-3)$$

此式表明，一个量仅含偶然误差的观测值的数学期望，就是这一量的真值。此即真值的统计学定义。

将(1－2－3)式代入(1－1－1)式，即得真误差的表达式

$$\Delta = L - E(L) \qquad (1-2-4)$$

这里的真误差 Δ 仅包含偶然误差。

由此可知，偶然误差间的相互差异与对应观测值之间的相互差异相同。故观测值 L 与它所带有的偶然误差 Δ 具有类型一致的分布——正态分布。且可看出，Δ 就是 L 的中心化随机变量。在图 1－2－2 中，若以横轴表示 L，$\Delta = 0$ 处对应换作 $E(L)$，则图中曲线即观测值的分布密度曲线。

由概率论知，服从正态分布的随机变量 x 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1-2-5)$$