·中学各科达标丛书·

高中数学

总复习（上）

（供高中三年级使用）

梅向明　主编

周沛耕　乔家瑞
王建民　郑学遐　编著

科学出版社

·中学各科达标丛书·

高中数学

总复习（上）

（供高中三年级使用）

梅向明 主编

周沛耕 乔家瑞
王建民 郑学遐 编著

科学出版社

1993

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书由一套系统性强，覆盖面全，题目设计新，重点突出的练习题和解题讲评（包括答案）组成，其中包括代数、立体几何和解析几何等三部分，共十四章。

本书后半部分为答案，并附有详细的解题讲评，向学生逐一揭示解题思路、解题关键步骤和方法，使学生通过阅读能进一步加深对所学知识的理解。

本书不论对参加会考还是高校入学考试都是一本非常好的参考读物。

•中学各科达标丛书•

高 中 数 学

总复习（上）

梅向明 主编

周沛耕 乔家瑞 王建民 郑学遐 编著

责任编辑 刘嘉善

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京朝阳区东华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年6月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1993年6月第一次印刷 印张：13 1/4

印数：1—3 000 字数：301 000

ISBN 7-03-003107-5/G·283

定价：6.10元

序　　言

在义务教育法实施五周年之际，科学出版社出版这套《中学各科达标丛书》是一件大好事。对于学生来说，这套丛书是帮助他们更好地理解课堂里所学知识的很好的课外辅助读物；对于中学教师来说，这套丛书是帮助他们备课的很好的教学参考书。

教育是立国之本，特别是基础教育阶段，它将为提高我国各民族的国民素质奠定良好的基础。我国幅员辽阔，人口众多，基础教育战线严重不平衡的状况是客观存在的。尽管有了几套中学教科书，但是并不能满足不同学习对象的要求；尽管教科书编得很好，但又遇到了讲授这些教材的教师水平很不平衡的问题。因此，给学生理解教材时一些启发，给教师备课时一些帮助，是完全必要的。这就是我们编写这套丛书的主要目的。

我们编写这套丛书的出发点是减轻学生的负担，而不是加重学生的负担。因此，在编写过程中，我们严格按照中学各科教学大纲中提出的各项目标和要求，以现用的中学各科课本的教学内容为依据，把编写重点放在理解教学内容上。当然，也给出了一些练习题，其目的是为了测试学生对教材内容掌握的程度，并不是去告诉学生如何解题。这套丛书的对象是所有的中学生，希望他们配合课本使用这套丛书以后，能更好地理解和掌握中学各科的知识，达到教学大纲中所提出的目标要求，准备做一个社会主义建设的合格人才。所以，我们把这套丛书定名为《中学各科达标丛书》。

这套丛书的初中各册，我们在编写时把重点放在教给学生怎样阅读课文，进而引导学生逐步学会应用课本知识解决实际问题的能力上。高中各册我们一方面引导学生学会阅读课文，理解课文，另一方面，我们还着重向读者揭示了课本知识的潜在内涵，从思想和方法上进行剖析，从而达到开扩视野，启迪思维，学会方法，提高能力的目的。

这套丛书是我们组织北京市一批有丰富教学经验的中学教师编写的，是这些老师多年教学心血的结晶。我们希望他们的经验会对广大中学生和教师有所帮助，也希望广大读者对这套丛书的不足之处提出建议和批评。

梅向明

1991年7月于北京师范学院

编写说明

一、本书是根据人民教育出版社出版发行的高级中学课本（乙种本），参考教学参考书提供的课时安排，与日常教学同步，分章节按课时逐课编写的。每课时都包括“应会内容”，“课文导读”，“内涵浅析”，“达标练习”四个部分。

二、“**应会内容**”是告诉读者通过这一节课的学习应该学会哪些知识，要学到怎样的深度和广度，使读者明确了解这一节课的学习重点及具体要求。实际上，这就是对教学大纲中各部分知识要求的具体体现。

三、“**课文导读**”的重点是“导”。广大学生进入高中以后仍然习惯于以听讲为主的学习方法，不少同学不会使用课本，不会阅读课文，课文中有关定理的证明，一些公式的推导过程从字面上好像能看懂，而深究几个“为什么”，不少同学就回答不出。我们就是从这一点出发着意指导读者怎样去阅读课文，怎样理解课文中叙述的要点，教给学生分析课文叙述的层次，告诉读者课文论证过程中的逻辑依据，并向读者指出课文所用的数学方法是什么，解题思路是什么，所学知识与前面学过的知识是怎样有机地联系在一起的。这样，如果读者能与我们合作，坚持一段时间后，自学能力一定会有明显的提高。

四、“**内涵浅析**”是我们向广大读者揭示出这节课所学知识的潜在内涵，这一部分是对课文所作的论述的引申和发展。为了适应广大高中同学日常学习的需要，我们在课本论述的基础上，通过对课本论述的进一步发挥，使学生掌握常

用的数学方法、典型的数学思想、规范的解题思路和通用的解题技巧，开扩读者的视野，进一步提高广大学生的学习水平。

五、“**达标练习**”是由A组和B组两组题组成的与教学内容配套的练习题。A组题与课本知识有直接联系，它是基础训练，这组题读者必须掌握，只有这样才能达到教学大纲所规定的各项目标要求。B组题是在A组题的基础上阶梯式地逐步提高，它可能是就某种数学方法的具体体现，也可能是某种能力的培养，还可能是一些数学技巧的灌输。总之，这组题是为了提高学生的数学能力而设置的。

六、为了读者使用方便，我们在每章之后又提供了一套自测练习题供读者使用。达标训练题和自测练习题读者要根据自己的实际情况选择其中的一部分或全部参考使用。

诚恳欢迎广大读者给我们提出批评和指正。

编　者

1992年9月于北京

目 录

代　　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

第一节　集合

一、知识要点

①关系类

(i) 元素与集合的关系：从属关系。例如

$$2\in N,\ \sqrt{2}\notin Q,\ \lg 2\in R\text{等。}$$

(ii) 集合与集合的容量关系：子集。例如

$\{x\,|\,-1\leqslant x<2\}\subset\{x\,|\,x>-2\}$，

$\{2k-1,\ k\in Z\}=\{4m\pm 1,\ m\in Z\}$，

$\left\{(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (-1,0),(0,\ -1),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\subseteq\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=1\}$等。

(iii) 集合与集合的运算关系：交集，并集，补集。例如

$(-2,\ 3]\cap[-1,\ 3)=[-1,\ 3)$；

$\{a,\ b,\ c,\ d\}\cup\{a,\ d,\ f\}=\{a,\ b,\ c,\ d,f\}$；

若$I=R$，$A=\{x\,|\,x^2-2x-3>0\}$，则$\bar{A}=[-1,\ 3]$ 等。

②表示法

集合的常用表示法有列举法和描述法。

把集合的全部元素一一列出的方法是列举法。列举法不限定元素顺序，对于有规律的较多元素的集合，可用删节号。

给出明确的元素代表符号，再用数学语言说明该集合中元素的特性，这种表示集合的办法叫描述法。使用描述法时，不允许出现未被说明的字母和符号。描述的语句必须写在集合符号内。下面是一个集合的两种表示方法：

$$\{14,\ 20,\ 26,\ 32,\ 29,\ 23,\ 17,\ 11\},$$

$$\{x \mid x=3k-1,\ 4\leqslant k\leqslant 11,\ k\in N\}.$$

③集合间运算的基本性质

$A\subseteq A$；

$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$，且$B\subseteq A$；

$A\cap A=A\cup A=A$；

$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$；

$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

$A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$，$\bar{\bar{A}}=A$；

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

二、例题

例1．用适当方式表示坐标平面内不在任何象限内的点集A。设$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，求$A\cap B$。

分析．坐标平面内不在任何象限，只能在坐标轴上，问题成为表示横、纵轴上的点集的问题。虽然可用“$x=0$或$y=0$”描述，但若把该集合中元素的特征写成$xy=0$，，则更简洁。

所求的集合$A=\{(x,\ y)\mid xy=0\}$。

为求$A\cap B$，分两种情况。

若$x=0$，$x^2+y^2=1$，得$y=\pm1$，由此得点$(0,1)$、$(0,-1)$；

若$y=0$，$x^2+y^2=1$，得$x=\pm1$，由此得点$(1,0)$，$(-1,0)$。所求的$A\cap B=\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$。

例2。$\{y|y=x^2+2x+4, x\in R\}=\{t|t=ax^2-2x+3a, x\in R\}$，求$a$。

分析。$\because\ y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geqslant3$，当$x=-1$时，$y$的最小值为3。可见

$$\{y|y=x^2+2x+4, x\in R\}=\{y|y\geqslant3\}.$$

由$\{t|t=ax^2-2x+3a, x\in R\}$，当$a=0$时，$t=-2x$，这时$t\in R$。即当$a=0$时$\{t|t=ax^2-2x+3a, x\in R\}=R$，可见与已知不符。这表明$a\neq0$。$t$是$x$的二次函数。为使$\{t|t=ax^2-2x+3a, x\in R\}=\{y|y\geqslant3\}$，实数$a$要满足下列两个条件：

$$a>0，且\frac{12a^2-4}{4a}=3.$$

$$\therefore\quad a=\frac{3+\sqrt{21}}{6}.$$

例3。设$\{a, ab, \lg(ab)\}=\{0, |a|, b\}$，求实数$a$，$b$。

分析。$\lg(ab)$限定$ab>0$。可见a，$ab\neq0$。只有$\lg(ab)=0$，由此知$ab=1$。

问题简化成　$\{a, ab\}=\{|a|, b\}$，$ab=1$。

如果$b=1$，由$ab=1$知$a=1$，则有$a=ab=1$，这时$\{a, ab\}$成了$\{1, 1\}$，与列举法限定元素不许重复的要求矛盾。可见$b\neq1$，只有$b=a$。即

$$\begin{cases}b=a，a\neq1，\\ ab=|a|.\end{cases}$$

$\therefore\quad a=-|a|,\ b=-1,\ a=-1.$

例4. 全集$I=\{2,\ 4,\ a^2-a+1\}$，$A=\{2,\ a+1\}$，$\overline{A}=\{7\}$，求实数a。

分析. $A\cup\overline{A}=I$，可见$\{2,\ 4,\ a^2-a+1\}=\{2,\ a+1,\ 7\}$，进而看出$\{4,\ a^2-a+1\}=\{a+1,\ 7\}$。

$$\therefore\quad\begin{cases}a+1=4,\\a^2-a+1=7.\end{cases}$$

$$\therefore\quad a=3.$$

例5. 集合$A=\{(x,\ y)\,|\,y=x^2+2x\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,y=x+a\}$，求使$A\cap B=\varnothing$的实数$a$的集合。

分析. A，B都是点集，考虑它们各自 的 图形，容易看出A的图形是开口向上的抛物线，B是许多斜率为1的直线（每一条直线与一个a值对应）。从图1看出：当直线与抛物线相切时，是"临界状态"。相切条件是方程

$$x^2+2x=x+a$$

有二等实根，即$x^2+x-a=0$有二等实根. 由此求得$a=-\frac{1}{4}$。

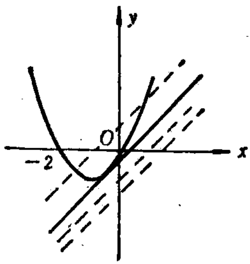

图 1

所求的a的集合是$\left\{a\,|\,a\leqslant-\frac{1}{4}\right\}$。

三、练习1.1

1. 写出50以内的素数的集合。

2. 设集合$A=\{2k-1, k\in Z\}$，$B=\{8k\pm1, k\in Z\}$，$C=\{8k\pm3, k\in Z\}$，$D=\{x|x=8k\pm1$或$x=8k\pm3, k\in Z\}$，试说出A，B，C，D中任两个集合间的关系。

3. 全集$I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，集合$A$，$B$满足条件：$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1, 9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\bar{A}\cap B=\{4, 6, 8\}$，求①$A\cup B$；②$A$；③$B$；④$A\cap\bar{B}$，⑤$\bar{A}$。

4. 集合$M=\{x|x=1+a^2, a\in N\}$，$P=\{y|y=b^2-4b+5, b\in N\}$，判断$M$，$P$间的关系。

5. 设全集$I=R$，$A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|\sqrt{x^2}=2+y, y\in A\}$，求$\bar{B}$，$A\cap B$，$A\cup B$，$A\cap\bar{B}$，$\bar{A}\cap\bar{B}$。

6. $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，

$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，

$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，

$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求a。

第二节　映射与函数

一、知识要点

①映射的概念

设A，B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合A到集合B的映射，记作

$$f: A\to B.$$

定义的关键是"A中任意"，"B中唯一"这8个字。

②函数与反函数的概念

函数是一类特殊的映射。特殊性在于：A，B是非空数集，A是定义域，函数的值域C与象集B的关系是$C\subseteq B$。

有些特殊的函数存在反函数。这样的函数的特征是：

从$y=f(x)$中解出$x=\varphi(y)$，如果对于y在C中的任何一个值，通过$x=\varphi(y)$，x在A中都有唯一确定的值和它对应，那么$x=\varphi(y)$就表示x是自变量y的函数。这样的函数$x=\varphi(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数，记做$x=f^{-1}(y)$，即

$$x=\varphi(y)=f^{-1}(y)。$$

习惯上，用x表示自变量，因而常把$x=f^{-1}(y)$中的字母x，y对调，写成$y=f^{-1}(x)$。

③求给定函数的反函数的一般步骤是：反解；交换x，y；注出反函数的定义域。

例。求函数$y=x^3-3x^2+3x$，$(x\in R)$的反函数。

解。$y=(x^3-3x^2+3x-1)+1$

$\quad=(x-1)^3+1$，

$\therefore\quad x=\sqrt[3]{y-1}+1$，

所求的反函数为$y=\sqrt[3]{x-1}+1$，$x\in R$。

④函数图象的几个常用结果

1）函数$y=f(x)$与函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于$y=x$对称；

2）具有$f(-x)=f(x)$性质的函数$y=f(x)$，它的图象关于y轴对称；

3）具有$f(-x)=-f(x)$性质的函数$y=f(x)$，它的图象关于坐标原点对称；

4）函数$y=f(x)$与函数$y=f(-x)$的图象关于y轴对称；

5）函数$y=f(x)$与函数$y=-f(x)$的图象关于x轴对称；

6）函数$y=f(x)+a$的图象可由函数$y=f(x)$的图象整体沿y轴平移$|a|$得到。当$a>0$时，上移，当$a<0$时，下移；

7）函数$y=f(x+a)$的图象可由函数$y=f(x)$的图象整体沿x轴平移$|a|$得到。当$a>0$时，左移；当$a<0$时，右移；

8）函数$y=f(|x|)$的图象关于y轴对称，当$x\geqslant 0$时，它的部分图象与函数$y=f(x)$在$x\geqslant 0$时的图象重合；

9）函数$y=|f(x)|$的图象不在x轴下方。为作出函数$y=|f(x)|$的图象，可以先保留函数$y=f(x)$在x轴上方的部分（包括与x轴的交点），再把函数$y=f(x)$的图象位于x轴下方的部分绕x轴转到x轴上方，同时去掉函数$y=f(x)$的图象在x轴下方的部分。

⑤函数的单调性和奇偶性

函数的单调性是“局部性质”。对于函数$y=f(x)$，如果在定义域中存在区间D，使对任意x_1，$x_2\in D$，当$x_1>x_2$时，都有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$（或者$f(x_1)\leqslant f(x_2)$），则函数$y=f(x)$是D上的增（或减）函数。D叫函数$f(x)$的增（或减）区间。

函数的奇偶性是“整体性质”。对于函数$y=f(x)$，任取定义域内一个值x，都有$f(-x)=f(x)$（或者$f(-x)=-f(x)$），则称函数$y=f(x)$是偶（或奇）函数。

二、例题

例1．函数$y=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$．$(a>0,\ a\neq 1)$

①求定义域；

②分析它的奇偶性；

③分析它的单调性；

④求它的反函数$f^{-1}(x)$。

解．①由$\sqrt{1+x^2}+x>0$，试图求x的取值范围．注意到$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|$，知$\sqrt{1+x^2}+x>0$，这表明已知

函数的定义域为R。

② 设$f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$。由

$$f(x)+f(-x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)+\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=\log_a[\sqrt{1+x^2}+x][\sqrt{1+x^2}-x]$$
$$=\log_a[(1+x^2)-x^2]=0,$$

$\therefore\quad f(-x)=-f(x)$。

可见$f(x)$是奇函数。

③当$a>1$时，$\log_a x$是增函数。任取x_1，$x_2\in R$，由

$$(\sqrt{1+x_1^2}+x_1)-(\sqrt{1+x_2^2}+x_2)=\sqrt{1+x_1^2}-\sqrt{1+x_2^2}$$
$$+(x_1-x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}+(x_1-x_2)=(x_1-x_2)$$
$$\times\left[\frac{x_1+x_2}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}+1\right]$$看出，$\dfrac{|x_1+x_2|}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}<$
$\dfrac{|x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}=\dfrac{|x_1+x_2|}{|x_1|+|x_2|}\leqslant 1$，可见$\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}}$
$+1>0$。又因为$x_1-x_2>0$，所以$(\sqrt{1+x_1^2}+x_1)-(\sqrt{1+x_2^2}+x_2)>0$，即

$$\sqrt{1+x_1^2}+x_1>\sqrt{1+x_2^2}+x_2。$$

这时$\log_a(\sqrt{1+x_1^2}+x_1)>\log_a(\sqrt{1+x_2^2}+x_2)$。这表明：当$a>1$时，函数$f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$是增函数。

当$0<a<1$时，$\log_a x$是减函数。当$x_1>x_2$时，有$\log_a(\sqrt{1+x_1^2}+x_1)<\log_a(\sqrt{1+x_2^2}+x_2)$。这表明当$0<a<1$时，函数$f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$是减函数。

④由$y=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$，得

$$\sqrt{1+x^2}+x=a^y,$$
$$\therefore\quad 1+x^2=(a^y-x)^2=x^2+a^{2y}-2x\cdot a^y,$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(a^y-a^{-y})。$$

所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x}),\ x\in R.$$

例2. $a\neq 0$, $a\neq 1$, $a\in R$. 函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}\ \left(x\in R,\ x\neq\frac{1}{a}\right)$. 证明:

①经过这个函数图象上任意两点的直线不平行于x轴;

②这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形.

证明. ①设$M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ 是已知函数图象上任意两点, $x_1\neq x_2$. 由

$$y_1-y_2=\frac{x_1-1}{ax_1-1}-\frac{x_2-1}{ax_2-1}$$

$$=\frac{(x_1-1)\cdot(ax_2-1)-(x_2-1)(ax_1-1)}{(ax_1-1)(ax_2-1)}$$

$$=\frac{(a-1)(x_1-x_2)}{(ax_1-1)(ax_2-1)},$$

因为$a\neq 1$, $x_1\neq x_2$, 所以$y_1-y_2\neq 0$. 这表明直线M_1M_2的斜率$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\neq 0$, 即直线$M_1M_2$与$x$轴不平行.

② 由 $y=\frac{x-1}{ax-1}$, 得

$$y(ax-1)=x-1,$$

$$(ay-1)x=y-1. \qquad (*)$$

假如 $ay-1=0$, 即$y=\frac{1}{a}$, 则有$\frac{1}{a}=\frac{x-1}{ax-1}$, 进而知 $ax-1=a(x-1)$, $a=1$, 与已知$a\neq 1$矛盾. 这表明 $ay-1\neq 0$, 因此由等式(*)可解出