

高等材料力學

(上冊)

ADVANCE



許海龍教授編著
五洲出版社總經銷

PDG

ADVANCE

高等材料力學

(上 冊)

許海龍教授編著

五洲出版社 總經銷

序 言

本書 “Advanced strength of Materials” 原著作是 J. P. Den Hartog 教授。內容共分 9 章，並附習題解答，為工學院學生之福音。

此譯本除分段指明要點外，並隨譯附加公式之引導，是為修習之便，尤利課外之參考。而書中專有名詞之採用係教學上多次磋商之所得；至於簡漏之處，並祈先進多加指正。

本書承蒙 苟系主任淵博之鼓勵與指導，及由李玉芝小姐之幫忙校核，特此致謝。

許海龍

民國六十三年元月

符 號

- A 表一常數
- B 表受扭轉之中空薄壁構件之面積〔參閱 p.29〕
- a 表長度
- b 表寬或潤
- C 扭轉剛性〔圓截面為 GI_p 〕
- C_1 為積分常數
- D 平板常數，參閱 p.129 之式 (64)
- E 彈性模數，單位為 lb/in^2
- $F_{1,2,3,4}$ 為彈性基礎函數，參閱 p.179 之式 (88) 及表
- G 剪力模數，單位為 lb/in^2
- g 重力加速度
- h 表高度
- I 慣性力矩
- I_p 極慣性矩
- j 為虛數單位，等於 $\sqrt{-1}$
- k 基礎模數，單位為 lb/in^2 ，參閱 p.174 之式 (84)
- k 彈簧常數， lb/in
- L 受扭轉之中空薄壁構件之周長，參閱 p.30
- l 表長度
- M 力矩
- M_0 彎矩… (樑者)
- M_t 扭矩或扭力
- M_1 平板割切後，其單位長度上之力矩，參閱 p.129 之圖
- n 表正方向或垂直方向
- n 表一數，常表一指數
- P 表力，單位磅
- P^* 筆紙挪氏之“縮減力”參閱 p.411
- p 壓力，在表面上為 lb/in^2 ，在線或樑上為 lb/in

- p_1, p_0 表內壓力及外壓力
 q 樑上單位長度上之作用負荷
 R 較大半徑，指問題中之最大半徑者。
 R_m, R_t, R_x, R_y 分別表曲率半徑，爲子午線向，切線向， x 線向及 y 線向者
 r 一般之半徑，在公式中時爲變數
 r_i, r_o 分表內半徑及外半徑
 S 樑上之剪力，磅
 S_1 板割切後單位長度之剪力
 s 表應力，單位 lb/in^2
 ds 周界長上之一小單元
 s_n 正應力
 s_t 切向應力
 s_r 徑向應力
 s_s 剪應力；在直角座標系中之慣號，參閱 p.215 圖 6-115；在極座標系中之慣號，參閱 p.229 之圖 6-121。
 T 表薄膜之張力 (lb/in)，或索上張力 (lb)
 T_{xy} 表面之扭轉，參閱 p.122 之式 (59a)
 T_1 板割切後，其單位長度內之扭矩
 t 表厚度 (吋)
 U 貯藏能
 U^* 補充能，參閱 p.272
 u 表 x 向上之位移；或在旋轉之對稱下，表切徑向之位移值
 u 由 p.294 至 p.296 中僅表“微變值”
 V 速率；有時係爲圓盤之周速
 v 表 y 向上之位移值；或在旋轉之對稱下，表切向之位移值
 W 表重量 (磅)
 w 表 z 向上之位移值
 w 在正(z)線向上板之撓度
 X 表力，係支座上未知之反作用力
 y 用以屈伏時之附記號

- Z 彎曲時之截面模數 $= I/y_{max}$
 Z_1 板割切後單位長度內之截面模數
 α 熱膨脹係數
 α 表一角
 α_{12} 表一影響係數，參閱 p.288 之式 (120)
 β 表一角
 β 在彈性基礎上樑之係數，參閱 p.175 之式 (86)
 β_{12} 反影響係數，參閱 p. 290
 γ 表單位體積內之重量 $= \rho g$
 γ 表一角，或剪應變
 γ_{xy} 係 xy 面內之剪應變
 δ 指撓度 (吋)
 Δ 表一增加值，如用 Δr ， Δx 等
 Δ 即 ∇^2 為藍博萊斯 (Laplace) 運算符號，或“爹兒”
 Δ Gel 之運算符號參閱 p.133
 ϵ 表應變量，有時指一微小值
 ϵ_x 在 x 向上之應變值
 ϵ_r 在徑向上之應變值； ϵ_t 為切向上之應變值
 λ 表一長度，參閱 p. 82 式 (51)
 λ 表曲管之係數，參閱 p.311 式 (125)
 μ 表卜生氏比 (Poisson's ratio)，鋼材約為 0.3
 ρ 為密度 = 單位容積內所含之質量
 Φ 表一應力函數；聖恩凡能特氏應力函數 (參閱 p. 6)；
亞瑞氏應力函數 (參閱 p. 216)；傑克遜氏應力函數
(參閱 p. 47)
 φ 表一角
 Ψ 表流線函數 (參閱 p. 23)。傑克遜氏之等角函數 (參閱 p. 48)
 θ 表一角或扭轉角
 θ_1 表單位長度內之扭轉角
 ω 表角速度

目 錄

序 言	1
第一章 扭 轉	1
1.1. 非圓形截面 (Non-circular Prisms) [1]	
1.2. 聖恩凡能特氏理論 (Saint-Venant's Theory) [3]	
1.3. 波郎達爾氏薄膜類推法 (Prandtl's Membrane Analogy) [12]	
1.4. 凱爾文氏流體流動類推法 (Kelvin's Fluid-Flow Analogy) [23]	
1.5. 中空剖面 (Hollow Sections) [27]	
1.6. 剖面之屈曲 (Warping of the Cross-Sections) [35]	
1.7. 可變直徑之圓軸 (Round Shafts of Variable Diameter) [43]	
1.8. 傑克遜氏電氣類推法 (Jacobsen's Electrical Analogy) [53]	
第二章 旋轉之圓盤	58
2.1. 平圓盤 (Flat Disks) [58]	
2.2. 變厚度之圓盤 (Disks of Variable Thickness) [72]	
2.3. 均等應力之圓盤 (Disk of Uniform Stress) [79]	
第三章 薄殼內之薄膜應力	86
3.1. 一般理論 (General Theory) [86]	
3.2. 應用 (Applications) [91]	
3.3. 等強度之薄殼 (Shells of a Uniform Strength) [101]	
3.4. 非等稱性之負荷 (Non-	

Symmetrical Loading)[109]

第四章 平板之彎曲121

- 4.1. 一般理論 (General Theory)[121] 4.2. 聖恩凡能得氏原理之簡易解法 (Simple Solutions; Saint-Venant's Principle)[134] 4.3. 圓形板 (Circular Plates)[145] 4.4. 解答總彙 (Catalogue of Results)[156] 4.5. “大撓度”狀況 (Large Deflections)[165]

第五章 彈性基礎上之梁173

- 5.1. 一般理論 (General Theory)[173] 5.2. 無限之樑 (The Infinite Beam)[177] 5.3. 半無限樑 (Semi-infinite Beams)[191] 5.4. 有限樑 (Finite Beams)[198] 5.5. 應用：圓筒狀薄殼 (Cylindrical Shells)[201]

習 題A-1

習題答案 A-25

1 扭 轉

§ 1-1 非圓形截面 (Non-circular Prisms)

一般較實用且普及之扭轉構件，係採實心或空心之圓形截面為主，因此類結構之理論與分析甚為簡易；吾人當解到該圓之正截面的剪應力為沿正切之線向，其大小可表為：

$$S_s = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{M_t r}{\frac{\pi}{2} R^4} \quad (1-a)$$

式中： R 為軸之外半徑； r ($r \leq R$) 為欲求應力處之半徑； M_t 係該軸上之扭矩。同時吾人亦知扭轉角 θ 係自下式可定之：

$$\theta = \frac{M_t l}{GI_p} \quad (1-b)$$

以上二式之導得：係假設（實據對稱之理論）原截面於扭矩產生後仍維持一平面，以及各截面處其自身平面內不生扭曲（Distortion）之現象。

今欲試求均勻而非圓形之截面，受扭轉後之可用公式。（所謂均勻係各方向呈同長度者）。但對此軸之截面已不可能欲求原截面仍維持一平面，或該自身平面內不生扭曲者，緣由上述圓截面之論證，係

具以該中心點為旋轉之對稱特性而獲得矣！

假設該原截面保持一平面且無扭曲產生者，則如圓截面之構件，將可斷論該剪應力必沿各同心圓之切線向上。然對非圓形截面之構件，則顯見為不真確，參閱圖 1-1，如果有截面周邊處之應力不正切於邊界，乃生一個垂直於邊界之分應力，該分應力須在軸之自由外表面上附生另一剪應力，但此剪應力實為不存在者，故截面上之剪應力必須正切於截面之邊界才行。今舉一矩形截面為特例，因在該尖角處不能同時俱存兩個正切於邊界之應力，因此其尖角處之切向剪應力應為零。

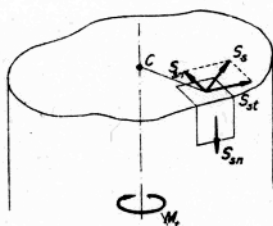


圖 1-1 設截面周邊上之剪應力 s_s 為沿半徑垂直於過扭轉中心 C 者，仍將之分為切向 s_{st} 與正向 s_{sn} 之分力。但正向分應力 s_{sn} 須在自由外表面附生應力，而其實為不存在者，故正向分應力 s_{sn} 應係不存在有也

圖 1-2 表受扭轉作用之圓軸與方形圓軸，二者之邊界面原為平行於中心軸線之縱向直線，因扭轉而具一小扭角 γ 之螺旋線。對圖 1-2a 之圓軸，設取一小單元 $dr \cdot r d\theta \cdot dl = dv$ ，並設未扭轉前各邊界面角均為 90° ，而扭轉後仍設原平面為一平面，故得 $(90 - \gamma)$ 之角（見圖

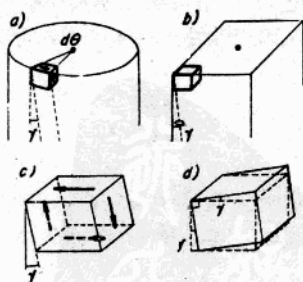


圖 1-2 設方形截面受扭轉後，該原平面仍持一平面，則位尖角處必具剪應力如圖 (c) 所示者。惟有當正截面局部傾斜如圖 (d) 所示之狀況下，其尖角處剪應力為零才有可能。故僅圖 (a) 所示之圓截面之原有平面才能為一平面。

1-2c)。該項扭轉角 γ 爲扭轉所生剪應力所致。今繼試取方軸上某一單元 $dx dy dl = dv$ ；同樣地，因扭轉力偶而生一小扭角 γ 之螺線，如該原平面仍持一平面，則此扭角 γ 亦應生圖(c)之剪應力。但誠然可見地，在其自由外表面上並不存有剪應力 S_n ，故知此爲不可能。因此，惟有圖(d)所示之可能，爲該截面之上表面亦須旋轉某一小角 γ ，以維持原有之 90° 角，故此自由外表面上無剪應力發生。意即該截面上某角之一小單元係垂直於螺線之縱邊。因而適用於方形截面之所有四邊，而知原截面爲非平面，乃生縱向之屈曲(warping)現象。

至於圓截面，已知其原截面經扭轉後在其自身平面內並無扭曲現象。

意即若在正截面上繪製互爲正交之網線（如由一組同心圓與徑向線繪製者，或平行於 x 與 y 之正交線織成網格者），則當於扭矩作用後各正交角仍持爲 90° 者矣！對此特性之證實如圖截面者仍無法具有真確性。可是，在圖 1-3 中可見正截面發生扭曲之情況，



圖 1-3 某一扭轉軸如該正截面之本身平面內引生扭曲時，則沿平行軸截取縱向截面，必具剪應力，但該項剪應力不能合爲一扭矩。事實上該剪應力並不存在，故正截面在其自身之平面內並無扭曲現象。

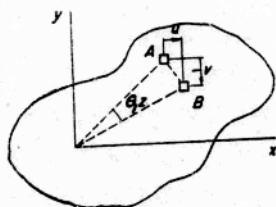
當呈扭曲時，則於平行縱向之截面上必生剪應力，然比時在正截面之平面內不須有剪應力，惟有正截面之自身平面內之剪應力可合成扭矩，而圖 1-3 所示之應力爲無助於抵抗扭矩。在以後之第 7 章中可知該種無用之應力絕不出現，因自然界常用最簡而易生之應力以抵抗已知之作用（此處指扭矩）。進而言之，抵抗之應力均爲含有“最小之彈性能”也。圖 1-3 所示之應力，係不能抵抗扭矩，但可增加構件之內貯彈性能，所以爲無用而不存在者。雖然此論斷未予證明，但對正截面在其自身平面內不生扭曲之分析，顯爲合理。

據此初步之推論，乃進而探求非圓形之柱或構件之受扭轉作用之理論。

§ 1-2 聖恩凡能特氏理論 (Saint-Venant's Theory)

對非圓形之柱或構件之扭轉原理，係於 1855 年由聖恩凡能特氏

所發表及創立。其理論為於正剖面之平面內，截取“扭轉中心”(Center of Twist)為原點，(即扭轉時剖面轉動之中心點)，取 x 及 y 軸，並令縱向之中心線為 z 軸；且在 $z = 0$ 處，取基準剖面(想像中不轉動之剖面)。如圖 1-4 所示，則



$$\begin{aligned} 1. \quad u &= \theta_1 z \cdot y \\ v &= -\theta_1 z \cdot x \\ w &= f(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

圖 1-4 聖恩凡能特氏假設剖面無扭曲而係對一中心點作整體之轉動者，故於 A 點轉 $\theta_1 z$ 角至 B 點，並令其位移值為 u 及 v 時，此項運動可以公式(2)表示之。

式中： u, v, w 表由 $A(x, y, z)$

點扭轉至 B 點時，在 x, y, z 方向

之各位移值。 θ_1 —該桿單位長度之扭轉角， v, u —為距基準面 z 剖面對原點作順時針之轉動角 $\theta_1 z$ (v 取負值因 y 值減少)， w —表示剖面在 z 方向有 w 值之屈曲，隨 x, y 而異，而不隨 z 而變動。

2. 在(2)式之位移公式中，若用“應變”(Strain)表示之，則：

①前二式表示正剖面無扭曲，故 $\epsilon_x = \epsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0$ 。

②其第三式表示各剖面作同樣之扭曲，故相鄰兩剖面上各點，其在 z 方向之距離均同，即 $\epsilon_z = \text{定值}$ 。

③假如不計桿之縱向張力，即 $\epsilon_z = 0$ ，則剩餘 γ_{xz} 及 γ_{yz} 兩應變。

今就 γ_{xz} 討論之：

(a)取 $x-z$ 平面內(y 為定值)之任一剖面，如圖 1-5 所示為平行於桿之縱向者。

(b)扭轉單元 $ABCD$ 至 $A'B'C'D'$ ，即原為平面之 z 及 $z + dz$ 扭曲成圖示之虛線，則 $m \angle C''A'C' = (\partial u / \partial z)$ ， $m \angle B'A'B'' = (\partial w / \partial x)$ ，今 $m \angle C'A'B' - m \angle CAB = (\partial u / \partial z) + (\partial w / \partial x)$ ，但此為 $x-z$ 平面內之應變，故

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (a)$$

同理：對 $y-z$ 平面乃以 $x \rightarrow y$
即 $u \rightarrow v$ 即可得：

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (b)$$

$$\text{且 } \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad (c)$$

(c)由(2)式得 $\partial u / \partial z = \theta_{1y}$, $\partial v / \partial z = -\theta_{1x}$ 代入(a)和(b)式得

$$\gamma_{xz} = \theta_{1y} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3)$$

$$\gamma_{yz} = -\theta_{1x} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

(d)由虎克定律得 $(s_x)_{xz} = \epsilon \gamma_{xz}$, $(s_y)_{yz} = \epsilon \gamma_{yz}$, 則(3)式可改寫為：

$$(s_x)_{xz} = G \left[\theta_{1y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (4)$$

$$(s_y)_{yz} = G \left[-\theta_{1x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

式中各應力之正負號，可由圖 1-6 中決定之一依右手系。

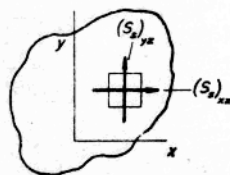
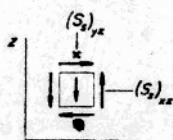


圖1-6 表 $(s_x)_{xz}$ 及 $(s_y)_{yz}$ 之正負值, z 軸向上, 故 x, y, z 三軸線成一右手系 (Right-Hand System)。複記式 xz 表示 xz 平面內小單元上四邊之剪應力。“ x ”符號表示箭頭可見之尾端, “ y ”符號表示箭頭可見之前端。

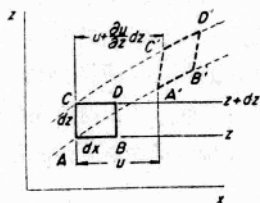


圖1-5 該圖係導出應變 r_{xz} 之表示式。在垂直 xy 平面內原為 $dx dz$ 之小單元 $ABCD$ 經扭轉後則改為 $A'B'C'D'$ 之處

3. 平衡方程式之導出 (derivation of the equation of equilibrium)

因正剖面 xy 上之剪應力非定值，即隨各點位置而異。（在圓剖面上，中心點之應力為 0，並隨中心之距離作直線式之增加）。

- (a) 如圖 1-7 所示，取小單元 $dx dy dz$ 中相對表面上之應力而彼此具微差值。且以離原點較近（ x 較小）之 $dy dz$ 表面（圖示虛線）為例。則在原 $dy dz$ 表面右面相距 dx 處上之應力為：

$$(s_x)_{x+dx} \text{ 或 } (s_x)_{x+dx} + \frac{\partial}{\partial x} (s_x)_{x+dx} dx$$

故此組 $dy dz$ 面上，未平衡之應力為：

$$\frac{\partial}{\partial x} (s_x)_{x+dx} dx$$

而未平衡之力為：

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (s_x)_{x+dx} dx \right] dy dz$$

- (b) 同理得 $dx dz$ 面上之未平衡之力為：

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} (s_y)_{y+dy} dy \right] dx dz$$

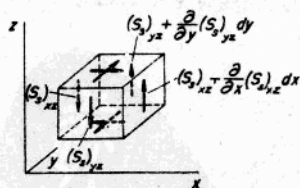


圖 1-7 該圖係表平衡方程式之導出。因單元在垂直(z)向上之平衡，知必滿足式(5)。但水平(x 及 y)向上之平衡，因各應力係 x 及 y 之函數，與 z 無關，故可自動適合平衡條件。〔請參閱式(4)與式(2)之最後一式〕。

- (c) 但在扭轉桿中之小單元顯係處於平衡狀態，而除上述兩力外並無其他垂直方向之力或應力，故得

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (s_x)_{xz} dx \right] dy dz + \left[\frac{\partial}{\partial y} (s_y)_{yz} dy \right] dx dz = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial}{\partial x} (s_x)_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} (s_y)_{yz} = 0 \quad (5)$$

- (d) 於(5)式中 $(s_x)_{xz}$ 及 $(s_y)_{yz}$ 均爲變數 x 及 y 之函數之偏微分，爲了方便求解，以能代爲單一 x, y 之函數運算較方便，聖恩凡能特乃先另設一函數 $\Phi(x, y)$ ，且

$$\begin{aligned} (s_x)_{yz} &= + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ (s_y)_{xz} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (6)$$

- (e) 以(6)式代入(5)式得： $\partial^2 \Phi / \partial x \partial y = \partial^2 \Phi / \partial y \partial x$ ，則顯示任意函數 Φ 適合(5)式，只須 Φ 爲一連續函數 (continuous function)。稱 Φ 爲應力函數 (stress function) 或 聖恩凡能特氏扭轉應力函數 (Saint-Venant's torsion stress function)。
- (f) 爲求 Φ 函數之值，可用 xy 平面爲基準而作垂直描繪而得一曲面。而公式(6)說明 y 方向之應力 $(s_x)_{yz}$ ，係 Φ 曲面在 x 方向之斜度 (slope)；同時在 x 方向之應力 $(s_y)_{xz}$ ，則係 Φ 曲面在 y 方向之斜度 (負值)。廣言之，在任意方向之分應力，等於在其垂直方向處 Φ 曲面之斜度。又由圖 1-1 中知正交於周界處之分應力 $s_{\theta\theta}$ 應爲零，故 Φ 曲面沿周界處之斜度必爲零，即 Φ 曲面沿周界處之高度當爲定值。乃可視 Φ 曲面爲一小丘，以水平面切之而得“等高線” (contour lines)，而剪應力必沿此種等高線而作用。以圓剖面桿受扭轉而言，其 Φ 小丘爲拋物線迴轉體 (Paraboloid of revolution)，而其等高線即爲同心圓。
- (g) 於圖 1-8 中，取 A 點處之小單元，其上之應力爲 $(s_x)_{xz}$ 及 $(s_y)_{yz}$ ，經 A 點對任意方向 α 作 AB 線，且

$$\overline{AB} = dn \quad \vec{CD} \perp \vec{AB}$$

故 $AE = dx$, $EB = dy$

$$\frac{dx}{dn} = \cos \alpha$$

由圖知

$$\frac{dy}{dn} = \sin \alpha$$

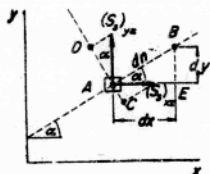


圖1-8 用以證明應力函數之曲面，在任意向 α 之斜度等於垂直於此方向之分剪應力值。

對小單元上各點因其上有小丘形之 Φ 函數覆蓋，故得一般式：

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

$$\text{or} \quad \frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dn}$$

將(6)式代入上式得：

$$\frac{d\Phi}{dn} = (s_t)_{yz} \cos \alpha - (s_n)_{xx} \sin \alpha$$

$$\text{但由圖 1-8 得：} \quad \frac{d\Phi}{dn} = \overline{AD} - \overline{AC}$$

此為垂直於 AB 方向亦即 DAC 方向之分應力，而因 $d\Phi/dn$ 係 Φ 曲面在 AB 方向之斜度，故前述廣義性說法得證正確。

由(4)式及(6)式得：

$$\begin{aligned} (s_t)_{yz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = G \left(\theta_1 y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ (s_n)_{xx} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = G \left(-\theta_1 x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

式中 w 為剖面之扭曲值為未知數，但此項扭曲中應無突變或分裂存在（因 w 及其導式均為 x 及 y 之連續函數），其連續性之數學涵義即為：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

對(7)式偏微分：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\partial}{\partial y} : \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= G \left(\theta_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} : \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= G \left(-\theta_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{相減} \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta_1 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{\partial}{\partial x} : \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} &= G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} : \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= G \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{相加} \rightarrow$$

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 = G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

or

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

公式(9)係一偏微分方程，用以求扭曲函數 w 。

從公式(8)知係含應力函數 Φ 之偏微分方程，已知任意函數 Φ 適從平衡方程式(5)之應力，若此任意函數 Φ 同時係適合公式(8)，則所得應力同時適合扭曲函數 w 之連續性。否則，所得應力雖屬平衡，但其扭曲函數並無連續性。故式(8)為一連續性之條件式。即彈性力學上所謂「連貫式」(Equation of compatibility)。因此，對一已知剖面，若能求得一適從式(8)，並適合沿周界之 $\Phi = \text{定值}$ (邊界條件)之函數 Φ 時，由此而得之應力，即此扭轉問題之確解。

4. 軸內之扭力 (Torque in shaft)

(a) 對由軸所傳送之扭力之計算式，由圖 1-9a 所示，取一小單元 $dA = dx dy$ ，對原點所生之時針向扭力為：