新世纪高级应用型人才培养系列教材

A Practical Textbook Series for the New Century

第2版

经管类

高等数学（上册）

主　编　孟广武　张晓岚　　副主编　曹伟平

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

新世纪高级应用型人才培养系列教材
A Practical Textbook Series for the New Century

高等数学 经管类

第2版 上册

主　编　孟广武　张晓岚
副主编　曹伟平

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是江苏省2005年立项建设精品教材.在深化高等教育改革、培养具有创新精神的经济管理类人才的思想指导下,本书力求适应我国一般本科院校经济管理类专业学生的水平,注重专业特色与直观性、实用性,突出平台思想,注意培养经管类学生对数学的兴趣,让他们用较少的时间把高等数学学得容易一些、生动一些、实用一些.为兼顾考研学生的需要,本书主要依据研究生入学数学(三)考试大纲编写,并将其中部分内容列为选学内容,对一般学生可不作要求.

本书分为上、下两册,上册为一元函数微积分学,下册包括多元函数微积分、无穷级数和常微分方程.本书可作为普通本科院校经管类专业高等数学及经济数学课程教材,也可供其他非理工类专业和高职、专科学校相应专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.经管类.上册/孟广武,张晓岚主编.—2版.
—上海:同济大学出版社,2010.1
(新世纪高级应用型人才培养系列教材)
ISBN 978-7-5608-4226-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①孟…②张… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第235145号

高等数学(经管类)第2版 上册

主编 孟广武 张晓岚 副主编 曹伟平
责任编辑 卞玉清 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经　销 全国各地新华书店
印　刷 同济大学印刷厂
开　本 787mm×960mm 1/16
印　张 15
印　数 1—4100
字　数 300000
版　次 2010年1月第2版 2010年1月第1次印刷
书　号 ISBN 978-7-5608-4226-4

定　价 26.00元

第 2 版前言

随着人类文明的发展和信息时代的来临，数学已经深入到现代社会生活的各个领域.计算机的广泛应用与经济全球化的迅猛发展，使社会对数学的依赖日益加深.为了顺应这一形势，联合国科教文组织把 2000 年定为世界数学年."数学使人聪明"、"数学令人精确"、"数学让人完美"已经成为教育界人士的共识.自 1969 年诺贝尔经济学奖设立以来，大约三分之二的获奖工作者是因为将数学方法成功地运用于经济领域的研究，这从一个侧面说明了数学原理对于先进的经济理论的奠基性作用.自 20 世纪 80 年代开始，高等数学不再是理工类大学生的专利，我国的高等学校陆续为经济类和管理类专业开设高等数学课.时至今日，各种名为经济数学或经管类高等数学的教材不下十余种.但是，这些教材，很多都是数学教师们根据传统的理工科高等数学的知识框架编写的，只是简单地从理工类高等数学中删去一些较难、较深的内容，并不具备经管类的专业特色，在内容编排和讲述方法上，缺少针对专业需要和学生数学水平的创新.由于经济类学生的数学基础普遍不如理工类学生，这些按照传统的理工类数学的思想方法处理的教材，对于他们来讲，难度过大，教学效果不好.同时，由于教材不具备经管专业特色，缺少把数学思想方法应用于经济学科的训练，也影响学生学习数学的积极性.一些著名大学编写的经济类高等数学教材虽然具有专业特色，但是并不适应一般本科院校经济管理类学生的水平.因此，编写一本面向一般本科院校、具有经济专业特色、易教好学的高等数学教材，让学生在更少的时间内学得更多更好，更加津津有味，已经成为深化高等教育改革、培养具有创新精神的复合型经济管理类人才的迫切课题.同济大学出版社组织同济大学、徐州师范大学、聊城大学等多所大学在深入调查研究的基础上编写了这本经管类高等数学教材，并且列入"新世纪高级应用型人才培养系列教材"，是在同济大学应用数学系主编并为我国大多数高等学校理工类专业采用的《高等数学》教材之后推出的又一力作.本书也是江苏省 2005 年立项建设精品教材.

本书的编写具有以下一些特点：

1. 本书是为我国一般本科院校经济管理专业编写的，充分考虑到使用本书的学生的数学水平和专业特点，注重对数学思想方法和应用能力的培养训练，增加数学作为文化修养的内涵，对于演算技巧与逻辑推理能力的要求则相对低一些.为了兼顾使用本书的学生考研的需要，本教材主要依据研究生入学数学(三)的考试大纲编写，并将其中一部分内容列为选学内容，加"＊"号并用小 5 号字排

印，对一般学生可不作要求.各节后面的习题大多分为(A)及(B)两类，其中，(A)类习题为基本题，(B)类习题及各章总练习题则供考研学生选用.各章后面的考研试题选讲，为考研的学生选编了2005—2009年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试卷中的相关试题.而对于数学(三)考试大纲之外的内容，如柯西收敛准则、三重积分、曲线积分与曲面积分、一致收敛性、傅立叶级数等，则完全不涉及.

2. 突出平台思想，注重直观性和应用性.对于有些证明较难、较繁的定理，或不加证明直接作为平台应用，或用直观方法归纳得出，或仅指出证明思想.有些内容的讲述适当结合教育数学的理念，使概念讲述平易直观、逻辑推理展开迅速简明、数学方法通用有力，力求让学生学得容易一些、生动一些、实用一些.

3. 增强专业特色与实用性.本书结合各章节的内容，较系统地介绍了常见的经济函数及其边际函数与弹性、极值在优化理论中的应用等内容，并增加了将数学思想方法应用于经济问题的训练.这对于培养高素质的经济管理类人才，是十分有益的.

本书分为上、下两册.上册包括一元函数微积分学，下册包括空间解析几何简介、多元函数微积分学、无穷级数、常微分方程和差分方程.本书适合于普通本科院校经贸、财会、管理、金融、地理、教育等专业作为高等数学课程的教材.本书由聊城大学孟广武教授和徐州师范大学张晓岚教授担任主编，由张晓岚教授统稿并对全书文字负责.

根据教育部考试中心颁布的2010年版《全国硕士研究生入学考试数学(三)考试大纲》，我们对本书的内容作了修订，并将选编的全国研究生入学考试试题调整为2005—2009年的试题.

限于编者水平，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　　者

2009年9月

目　录
（上册）

第一章　函数与极限

高等数学的研究对象是各种形式的变量，函数是变量的主要表现形式，并且反映了变量间的依赖关系. 而极限的思想方法则是研究变量的基本方法. 本章介绍函数、极限、函数的连续性等概念及其基本性质.

第一节　函　数

一、变量与区间

在人们的社会生产实践活动中，常会遇到各种各样的量，如面积、温度、价格、速度等. 在某个过程中，数值保持不变的量称为常量，数值变化的量称为变量. 例如，我们观察一辆运行中的客运汽车，乘客的人数、全部行李的重量、汽车的长度等均为常量，而汽车离始发站的距离、车速、汽油的储存量等均为变量.

在某一研究过程中变量往往在某个指定的范围内取值，这个取值范围常用区间来表示.

本课程中涉及到的数都是实数，所以，如不特别说明，本书提到的数均为实数，数集均为实数集. 我们用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数之集. 由于数轴上的点 P 与它的坐标即实数 x 之间是一一对应的，因此我们把“数轴上的点”与“实数”这两种说法等同看待而不加区别，这样，$\mathbf{R}$ 也表示数轴.

设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$. 称数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

为闭区间，记作 $[a,b]$. 称数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

为开区间，记作 (a,b). 类似地可定义下面两个半开区间：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为有限区间，a 和 b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度.

我们用符号 $+\infty$（读作正无穷大）与 $-\infty$（读作负无穷大）分别表示全体实

数的上界与下界，则对任意 $x \in \mathbf{R}$，有 $-\infty < x < +\infty$. 于是，实数集 $\mathbf{R}$ 可以表示成区间的形式 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$. 以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为端点的区间：

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

称为无限区间，规定无限区间的长度为 $+\infty$. 注意 $+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个符号，它们具有实数的某些运算性质，但不是实数.

设 $a, \delta \in \mathbf{R}$ 且 $\delta > 0$，称开区间

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 其中，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，因此，$U(a,\delta)$ 表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的集合(图 1-1).

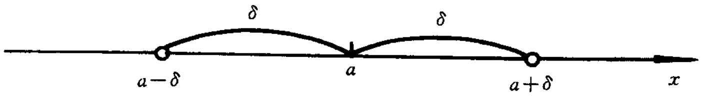

图 1-1

如果把邻域中心去掉，称集合

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

当不需要指明邻域半径时，可以简单地用 $U(a)$($\mathring{U}(a)$) 表示 a 的邻域(去心邻域).

二、函数概念

定义 1 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，如果对变量 x 在 D 中每一个值，变量 y 按照某个法则总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

或者用映射符号表示为

$$f: x \mapsto y, \quad x \in D.$$

数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 也称为因变量.

当 x 取定某个值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处

的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中所有值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

由函数的定义可知，构成函数的要素有两个，一个是函数的定义域，另一个是对应法则. 而函数的值域是由定义域和对应法则所确定的. 若两个函数的定义域和对应法则都相同，则这两个函数是相同的，而不管它们的自变量和因变量选用什么字母表示. 例如，函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ 与 $f(x) = x + 2$ 是不同的，因为它们的定义域不同；而函数 $f(x) = x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $g(t) = 1 + t^2$ 是相同的，因为它们的定义域和对应法则完全相同.

在函数的定义中，我们用"唯一确定"来表明所讨论的函数都是单值函数. 当 D 中的某些点 x 有多于一个 y 值与之对应时，我们称之为多值函数. 本书只讨论单值函数.

对于用数学式子表达的函数，其定义域或者是某个指定的数集，否则，凡是使函数表达式有意义的自变量的值都在函数定义域的范围之内.

下面给出几个函数的例子.

例 1 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = \mathbf{R}$，值域 $W = [0, +\infty)$，其图形如图 1-2 所示.

例 2 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = \mathbf{R}$，值域 $W = \{-1, 0, 1\}$，其图形如图 1-3 所示.

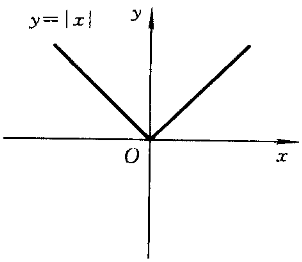

图 1-2

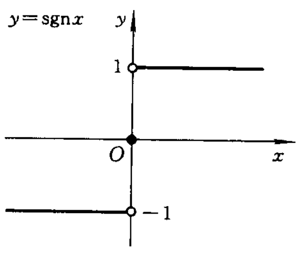

图 1-3

例 3 取整函数

$$y=[x].$$

这里的记号$[x]$表示不超过x的最大整数. 例如,$[3.1]=3$,$[-3.1]=-4$,$[3]=3$,等等. 这个函数的定义域$D=\mathbf{R}$,值域$W=\mathbf{Z}$(全体整数之集),其图形如图 1-4 所示.

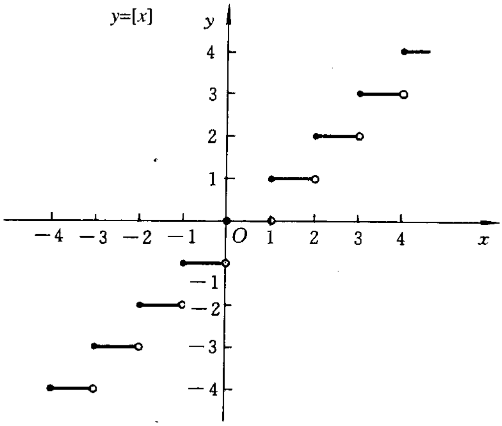

图 1-4

上述三个例子中的函数有一个共同的特点:在函数定义域的不同范围内,函数有不同的表达式. 通常称这种函数为分段函数. 分段函数在经济问题中有着丰富的背景,例如所得税的计算方法、出租车价格的计算、商品的批发与零售价格等,都可用分段函数表示.

例 4 某城市的出租车计价方法为:3 公里以内按起步价收 5 元;超过 3 公里后,超过部分每公里为 1.20 元. 求车费与里程之间的函数关系.

解 车费和里程分别用F和s表示. 则由题意可列出如下的函数关系式:

$$F(s)=\begin{cases}5, & 0<s\leqslant 3,\\ 5+1.20(s-3), & s>3.\end{cases}$$

三、函数的几种特性

1. 有界函数

设函数$y=f(x)$的定义域为D,数集$G\subset D$,若存在数M_1,使对任意的$x\in G$,恒有$f(x)\geqslant M_1$,则称函数$f(x)$在G上有下界,而称M_1为函数在G上的一个下界. 如果存在数M_2,使对任意的$x\in G$,恒有$f(x)\leqslant M_2$,则称函数$f(x)$在G上有上界,而称M_2为函数在G上的一个上界. 如果存在正数M,使得

对任意的 $x \in G$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 G 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 G 上无界. 这就是说，如果 $f(x)$ 在 G 上无界，则对任何正数 M(无论怎么大)，总存在某个 $x_0 \in G$，使 $|f(x_0)| > M$.

容易证明，函数 $f(x)$ 在 G 上有界的充分必要条件是它在 G 上既有上界又有下界.

例如，$y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为 $|\cos x| \leqslant 1$ 对任一实数 x 都成立. 函数 $y = x^2$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有下界而无上界. 但如果给定数集 $G = [-1, 1]$，则 $y = x^2$ 在 G 上有界. $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上是无界的，但在 $[1, +\infty)$ 上是有界的. 有界函数的界 M 不是唯一的. 对 $y = \cos x$ 而言，不仅 1 是它的界，任何大于 1 的数都可取作定义中的 M.

有界函数的图形位于平行于 x 轴的直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

2. 单调函数

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对 I 中的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)), \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(单调减少)的. 单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调区间. 当(1)式中成立严格不等号时：

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)) \quad \text{当 } x_1 < x_2 \tag{2}$$

就称 $f(x)$ 是区间 I 上的严格单调函数.

例如，函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上严格单调减少，在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增加，但在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

3. 奇函数与偶函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 对称于原点，则当 $x \in D$ 时，也有 $-x \in D$. 若对于每个 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；若对于每个 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数. 我们在中学已经知道，偶函数的图像对称于 y 轴，即当点 $P(x, y)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上时，点 $P'(-x, y)$ 也在曲线上；而奇函数的图像对称于坐标原点，即当点 $Q(x, y)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上时，点 $Q'(-x, -y)$ 也在曲线上.

例如，函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数，$f(x) = x^3 - \sin x$ 是奇函数，而函数 $f(x) = 2x^3 + 1$，$f(x) = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

4. 周期函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个非零常数 α，使对一切 $x \in D$

都成立 $f(x+\alpha)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，α 称为 $f(x)$ 的一个周期. 能使 $f(x+\alpha)=f(x)$ 成立的最小正数 α 称为 $f(x)$ 的最小周期或周期.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=|\sin 2x|$ 是以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的周期函数.

四、反函数

给定函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 W. 如果对于 W 中任一值 y_0，在 D 中存在唯一的 x_0，使 $f(x_0)=y_0$，这样就在 W 上确定了一个以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$，称为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数. 相对地把原来函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

例如，函数 $y=3x+6$ 的反函数是 $x=\frac{y-6}{3}$，即 $x=\frac{1}{3}y-2$. 又，函数 $y=10^x$ 的反函数是 $x=\lg y$. 给出直接函数以后，只要从直接函数的表达式中解出用 y 表示 x 的式子 $x=\varphi(y)$，就可得到反函数的表达式. 由于习惯上总是以 x 表示自变量，以 y 表示因变量，而以上反函数的表达式 $x=\varphi(y)$ 与习惯不同. 好在函数关系的实质在于定义域和对应法则，而与变量所用的符号无关. 为了与习惯保持一致，我们把反函数 $x=\varphi(y)$ 中的自变量仍用 x 表示，因变量可用 y 表示，这样，$y=f(x)$ 的反函数就写成 $y=\varphi(x)$.

例 5 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x+6$； (2) $y=10^x$.

解 (1) 由 $y=3x+6$ 解得 $x=\frac{1}{3}y-2$. 交换自变量和因变量的符号，得到反函数为 $y=\frac{1}{3}x-2$，其定义域是 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $y=10^x$ 解得 $x=\lg y$. 变换自变量与因变量的符号，得到反函数为 $y=\lg x$，其定义域是 $x\in(0,+\infty)$.

为了突出 $y=\varphi(x)$ 是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数，通常把函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in W$ 的反函数记为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in W.$$

由于直接函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 和因变量 y 就是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的因变量和自变量，所以从图像上看，直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示的是同一条曲线. 但是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是从 $x=f^{-1}(y)$ 中互换 x 与 y 而得到的，这一位置互换意味着将曲线 $x=f^{-1}(y)$ 以直线 $y=x$ 为轴翻转了 $180°$. 在同一坐标系中，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 图像上的点 (a,b)（它也是直接函数 $y=f(x)$

图像上的点(a,b))就变成了反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图像上的点(b,a). 由于点(b,a)和点(a,b)对称于直线 $y=x$,所以反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与原函数 $y=f(x)$ 的图像对称于直线 $y=x$. 图 1-5 中的两个图像反映出例 5 中的两个函数和它们的反函数图像的对称关系.

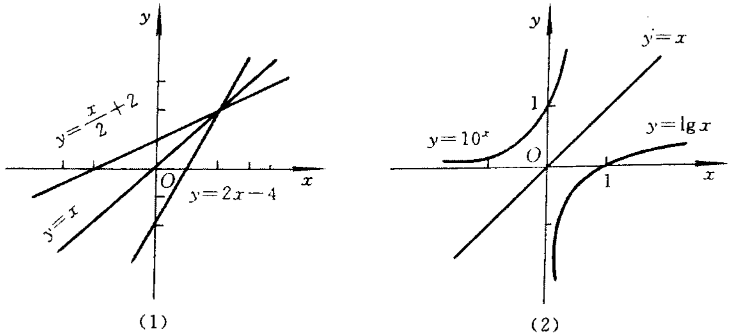

图 1-5

对于给定的函数 $y=f(x),x\in D,y\in W$,不一定存在反函数. 例如

$$y=x^2,\ x\in(-\infty,+\infty),\ y\in[0,+\infty)$$

就不存在反函数. 因为对每一个 $y_0\in(0,+\infty)$,总有两个数值 x_0 和 $-x_0$ 与之对应,均满足 $y_0=x_0^2=(-x_0)^2$. 但是,当把 $y=x^2$ 看成分别定义在$(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$上的两个函数时,它们的反函数均存在,分别为 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=-x^{\frac{1}{2}}$.

可以证明,函数 $y=f(x),x\in D,y\in W$,存在反函数的充分必要条件是 $f(x)$ 是一一对应的函数.

因为单调函数是一一对应的,所以,单调函数一定存在反函数. 例如,正弦函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上不是一一对应的,所以不存在反函数. 但当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$y=\sin x$ 是单调增加函数,故有反函数,即反正弦函数

$$y=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

五、复合函数

对于函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,我们可以把它看作是将 $u=1-x^2$ 代入到 $y=\sqrt{u}$ 之中得到的. 像这样在一定条件下将一个函数"代入"到另一个函数中的运算称为函数的复合运算,所得到的函数称为复合函数.

一般地,若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D,值域为 W,而函数 $u=g(x)$ 的定

义域为 G,值域为 K,且 $K \subset D$. 那么,对任一 $x \in G$,通过函数 $u = g(x)$ 有唯一确定的 $u \in K$ 与之对应,由于 $K \subset D$,因此对这个 u 值,通过函数 $y = f(u)$ 有唯一确定的 $y \in W$ 与之对应(图 1-6). 这样,对任一 $x \in G$,通过 u 有确定的 y 值与之对应,从而得到一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数,称这个函数为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数,记作

$$y = f[g(x)], \quad x \in G.$$

其中,$y = f(u)$ 称为外函数,$u = g(x)$ 称为内函数,u 称为中间变量,x 称为自变量.

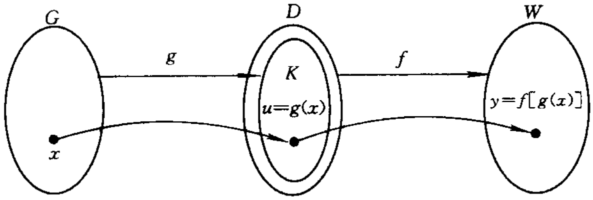

图 1-6

必须注意,不是任何两个函数都可复合成一个复合函数. 例如 $y = \lg u$ 和 $u = -x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $y = \lg u$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$,而 $u = -x^2$ 的值域为 $K = (-\infty, 0]$,无论 x 取何值,对应的 u 值都不在 D 内.

复合函数的概念可以推广到多个函数复合的情况. 例如,函数 $y = 2^{\sqrt{x-1}}$ 可以看作是由

$$y = 2^u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = x - 1 \quad (x \geqslant 1)$$

三个函数复合而成,其中,u,v 都是中间变量,x 为自变量. 复合函数 $y = 2^{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$.

研究复合函数有两方面的效用. 一方面,如介绍复合函数概念所说的那样,把几个比较简单的函数通过中间变量复合成一个函数;另一方面,也是今后将会更多遇到的,是将一个比较复杂的函数分解成若干个简单函数的复合,通过对简单函数的研究,了解比较复杂的复合函数的属性. 在第二章中,我们将会看到复合函数的分解对于求导数的重要性.

例 6 将函数 $y = 5^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ 分解为几个简单函数的复合.

解 函数 $y = 5^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ 可以分解为

$$y = 5^u, \quad u = v^2, \quad v = \sin w \quad 及 \quad w = \frac{1}{x}.$$

例 7 已知 $f(a^x+1)=a^{2x}+a^x+1$,求 $f(x)$.

解 令 $u=a^x+1$,将 $a^x=u-1$ 代入原式,得

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1,$$

即

$$f(x)=x^2-x+1.$$

例 8 设

$$f(x)=\begin{cases}4, & |x|\leqslant 4,\\ 0, & |x|>4,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$.

解

$$f[f(x)]=\begin{cases}4, & |f(x)|\leqslant 4,\\ 0, & |f(x)|>4,\end{cases}$$

因为

$$|f(x)|\leqslant 4,\ x\in(-\infty,+\infty),$$

所以

$$f[f(x)]=4,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

六、初等函数

我们讨论的函数大多是由以下六种最简单的函数构成的,这六种函数称为基本初等函数.

1. 常函数 $y=c$(c 为常数).

2. 幂函数

我们已经知道当 $\alpha=\frac{m}{n}$(m,n 为互质的正整数)为正有理数时,定义 $x^\alpha=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$,$x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$($x>0$).对于一般实数 α,称函数

$$y=x^\alpha\quad(x>0)$$

为幂函数.当 α 是无理数时,可以用极限的方法或指数函数的形式来研究函数值 x^α,在此不作进一步研究.

3. 指数函数 $y=a^x$ (a 为常数且 $a>0,a\neq 1,x\in\mathbf{R}$).

在科技应用中,常会用到以常数 e(这是个无理数,$e\approx 2.71828\cdots$,其意义将在本章第六节中说明)为底的指数函数 $y=e^x$.

4. 对数函数 $y=\log_a x$ (a 为常数,$a>0$ 且 $a\neq 1,x>0$).

以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 称为自然对数函数,简记为 $y=\ln x$.

5. 三角函数:

$y=\sin x\quad(x\in\mathbf{R})$, $y=\cos x\quad(x\in\mathbf{R})$, $y=\tan x\quad\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$,