高等学校专科试用教材

高等数学教程

下册

赵新泽　周光明　高纯一　主编

尹　侃　　　　　　　　　主审

西南交通大学出版社

高等学校专科试用教材

高等数学教程

下 册

张　亮　杨禄源　童景光
张新宇　刘后邘　王　樵　编

西南交通大学出版社

(川)新登字018号

高 等 数 学 教 程

GAODENG SHUXUE JIAOCHENG

赵新泽 周光明 高纯一 主编

西南交通大学出版社出版
(四川 成都 九里堤)
新华书店经销
长沙铁道学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：12.5
字数：282千字 印数：1-6200

1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷
ISBN 7-81022-272-4/O.029

定价： 6.85元

目 录

第八章 向量代数与空间解析几何……………………………（1）
§1 空间直角坐标系……………………………………………（1）
§2 向量及其运算………………………………………………（4）
§3 向量的坐标、模和方向余弦………………………………（9）
§4 向量的运算（续）…………………………………………（14）
§5 平　面………………………………………………………（24）
§6 直　线………………………………………………………（33）
§7 曲　面………………………………………………………（41）
§8 空间曲线……………………………………………………（51）
复习题8 ………………………………………………………（58）
第九章 多元函数微分学……………………………………（61）
§1 多元函数……………………………………………………（61）
§2 偏导数………………………………………………………（70）
§3 全微分………………………………………………………（80）
§4 多元复合函数的求导法则…………………………………（86）
§5 多元隐函数的求导法………………………………………（93）
§6 偏导数的几何应用…………………………………………（97）
§7 多元函数的极值、最大值与最小值………………………（103）
复习题9 ………………………………………………………（111）
第十章 重积分………………………………………………（114）
§1 二重积分的概念与性质……………………………………（114）
§2 二重积分的计算方法………………………………………（120）
§3 三重积分及其计算…………………………………………（132）

§ 4 重积分的应用……………………………………(145)
复 习 题 10……………………………………(159)
第十一章 曲线积分与曲面积分……………………………………(162)
*§ 1 对弧长的曲线积分……………………………………(162)
§ 2 对坐标的曲线积分……………………………………(169)
§ 3 格林公式……………………………………(178)
§ 4 平面上曲线积分与路径无关的条件……………………………………(185)
*§ 5 对面积的曲面积分……………………………………(191)
*§ 6 对坐标的曲面积分和奥——高公式……………………………………(196)
复 习 题 11……………………………………(206)
*第十二章 场 论……………………………………(209)
§ 1 场的概念及其表示法……………………………………(209)
§ 2 数量场的方向导数和梯度……………………………………(213)
§ 3 向量场的通量与散度……………………………………(217)
§ 4 向量场的环量与旋度……………………………………(221)
§ 5 三个特殊场……………………………………(228)
复 习 题 12……………………………………(237)
第十三章 无穷级数……………………………………(240)
§ 1 常数项级数……………………………………(240)
§ 2 常数项级数收敛性的判别法……………………………………(246)
§ 3 幂级数……………………………………(258)
§ 4 函数展开成幂级数……………………………………(269)
§ 5 幂级数在近似计算中的应用……………………………………(277)
复 习 题 13……………………………………(282)
*第十四章 傅立叶级数……………………………………(283)
§ 1 周期为2π的函数的傅立叶级数……………………………………(284)
§ 2 周期为$2l$的函数的傅立叶级数……………………………………(291)

§ 3　奇函数和偶函数的傅立叶级数……………………(295)
§ 4　非周期函数在[0, π]或[0, L]上的傅立叶级数
……………………………………………………………(299)
复 习 题 14……………………………………………(304)
*第十五章　拉普拉斯变换………………………………(306)
§ 1　傅立叶积分变换……………………………………(306)
§ 2　拉普拉斯积分变换…………………………………(310)
§ 3　拉氏变换的性质……………………………………(317)
§ 4　拉普拉斯逆变换……………………………………(325)
§ 5　拉氏变换的性质（续）……………………………(332)
§ 6　拉氏变换的应用……………………………………(340)

附录一　傅氏变换与拉氏变换简表……………………(351)
附录二　哈密顿（Hamilton）算子及其常用公式……(356)
附录三　几种常用立体图形……………………………(359)
习题答案…………………………………………………(363)

第八章　向量代数与空间解析几何

向量是在数学、物理、力学及工程技术中有着广泛应用的重要概念。空间解析几何与平面解析几何相仿，是用代数的方法来研究空间的几何问题。本章首先建立空间直角坐标系，进而介绍向量及其运算，然后以向量为工具讨论空间的平面与直线，并介绍空间曲面与曲线的主要内容。

§1　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

为确定空间点的位置，需要建立空间直角坐标系。具体的作法是：过空间一定点O作互相垂直的三条数轴，均以O为原点，一般取相同的单位长度，分别称为x轴、y轴与z轴。通常把x轴、y轴配置在水平面上，垂直于x轴与y轴的定为z轴，它们的正向应符合右手法则。即右手的大拇指与食指指向x轴与y轴的正向，中指的指向即为z轴的正向（图8—1）。这便构成了空间直角坐标系$Oxyz$。点O称为坐标原点，x轴、y轴、z轴称为坐标轴。任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面，即xOy、yOz与zOx三个坐标面。它们将整个空间分成八个部分，每个部分称为卦限，含x轴、y轴与z轴正向的部分称为第Ⅰ卦限。

设M为空间一个已知点，过M作三个平面分别垂直x轴、y轴与z轴，且相交于点P、Q与R（如图8—2），它们在x轴、

图8—1

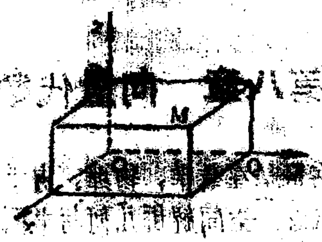


图8—2

y轴与z轴上的坐标依次记为x、y与z，于是空间的点M唯一地确定了一个有序数组(x,y,z)；反之，若已知一个有序数组(x,y,z)，则在x轴、y轴与z轴上依次取坐标为x、y与z的三点P、Q与R，过这三点分别作垂直于x轴、y轴与z轴的三个平面，设它们的交点为M，从而坐标有序数组(x,y,z)又唯一地确定了空间的一点M。即在空间直角坐标系下，空间点M与有序数组(x,y,z)之间存在一一对应关系。我们称(x,y,z)为空间点M的直角坐标，x为横坐标，y为纵坐标，z为竖坐标，记作$M(x,y,z)$。

特殊地，若点M在坐标面xOy上，则其竖坐标$z=0$；在zOx面上，则$y=0$；在yOz面上，则$x=0$。同样，若点M在x轴上，则$y=0$，$z=0$；若M在y轴上，则$x=0$，$z=0$；若M在z轴上，则$x=0$，$y=0$。若M位于坐标原点，则三个坐标均为零，即$x=0$，$y=0$，$z=0$。若M位于第1卦限内，则有$x>0$，$y>0$，$z>0$。其余各卦限内，点的坐标符号依次为：$(-,+,+)$、$(-,-,+)$、$(+,-,+)$、$(+,+,-)$、$(-,+,-)$、$(-,-,-)$、$(+,-,-)$。

二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间中任意两点，求它们之间的距离$d=|M_1M_2|$。为此，过点M_1与M_2，分别作垂直于三个坐标轴的平面，共六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体（如图8—3）。在此长方体内ΔM_1NM_2为直角三角形，$\angle M_1NM_2=\frac{\pi}{2}$，所以，

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$

又ΔM_1PN也是直角三角形，$\angle M_1PN=\frac{\pi}{2}$，且$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，故

$$d^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2=|P_1P_2|^2+|Q_1Q_2|^2+|R_1R_2|^2=(x_2-x_1)_2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

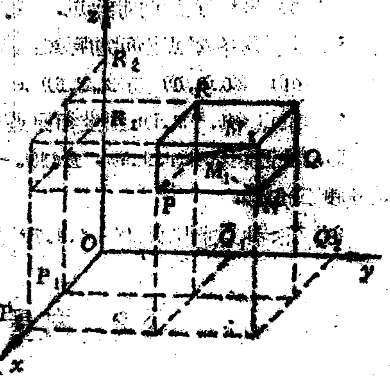


图8—3

从而得空间两点间的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例1 求证以$M_1(1,2,3)$、$M_2(5,6,3)$与$M_3(5,2,4)$为顶点的三角形是等腰三角形。

证 由于

$$|M_1M_2|=\sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2+(3-3)^2}=\sqrt{32},$$

$$|M_1M_3|=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{17},$$

$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-5)^2+(2-6)^2+(4-3)^2}=\sqrt{17},$$

$$|M_1M_3|=|M_2M_3|,$$

所以，$\triangle M_1M_2M_3$为等腰三角形。

习 题 1

1. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

$A(1,2,3)$， $B(-2,3,-4)$， $C(3,-2,5)$，

$D(0,3,4)$， $E(4,0,3)$， $F(0,0,2)$。

2. 求点(1,2,3)关于

(1) 各坐标面的对称点；

(2) 各坐标轴的对称点；

(3) 坐标原点的对称点。

3. 求下列各对点之间的距离：

(1) (0,0,0) 与(3,2,1)； (2) (1,-2,3)与(-2,3,-4)。

4. 求点(4,-3,5)到坐标原点与坐标轴之间的距离。

5. 试证明以$A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形。

6. 在z轴上求与点$A(-4,1,7)$及点$B(3,5,-2)$等距离的点。

§2 向量及其运算

一、向量的概念

自然科学中的量可以分为两类：一类是只有大小的量，如时间、距离、质量等，称为数量或标量；另一类是既有大小又有方向的量，如速度、加速度、力、力矩等，称为向量或矢量。

几何上用一条有方向的线段（简称为有向线段）表示向量，其长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向。以M_1为起点，M_2为终点的有向线段所表示的向量，记为$\overrightarrow{M_1M_2}$，也可用$\mathbf{a}$表示，即$\mathbf{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$。

向量的长度，也就是表示向量大小的数，称为向量的模。向量a或$\overrightarrow{M_1M_2}$的模记作|a|或$|\overrightarrow{M_1M_2}|$。与向量a大小相等，方向相反的向量，称为a的负向量，记作$-a$。模等于1的向量称为单位向量。模为零的向量，称为零向量，记作0。零向量没有确定的方向，它的方向是任意的。在直角坐标系中，以坐标原点为起点，以M为终点的向量$\overrightarrow{OM}$，称为点M的向径，记作r。

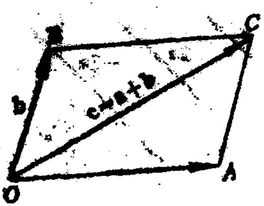
在向量中，有的向量与起点有关，有的向量与起点无关。但一切向量的共性是它们都有大小与方向。这种只考虑其大小与方向的向量，称为自由向量。因为它们与起点无关，可以在保持大小与方向不变的条件下自由移动。两个向量a与b，若大小相等方向相同，则称它们为相等，记作a＝b。经过平移后能完重合的向量是相等的。

二、向量的加减法

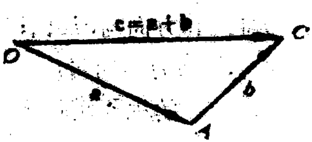
定义1 设向量$a=\overrightarrow{OA}$与$b=\overrightarrow{OB}$为同一起点的两个向量，以a, b为邻边作平行四边形$OACB$（图8—4），则以始点为起点的平行四边形对角线所表示的向量$c=\overrightarrow{OC}$，称为向量a与b的和，记为$a+b$，即

$$c=a+b。$$

用上述方法求向量的和，称为向量加法的平行四边形法



8—4



8—5

则。两向量的加法还有如下更简便的方法：作向量$a=\vec{OA}$，以$\vec{OA}$的终点A为起点作$\vec{AC}=b$，连接OC，则$c=\vec{OC}$就是向量a与b的和，即$c=a+b$（图8—5），这种方法称为三角形法则。

向量加法符合下列运算规则：

(1) $a+b=b+a$（交换律）；

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$（结合律）；

(3) $a+o=a$；

(4) $a+(-a)=o$。

定义2 两个向量a、b的减法规定为

$$a-b=a+(-b)。$$

如图8—6所示，由三角形法则，a，b始于同一个点，则由b的终点到a的终点的向量（方向指向a的终点），即为$a-b$。

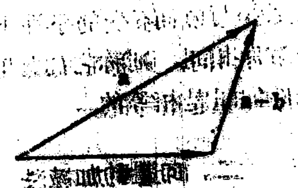


图8—6

五、向量与数量的乘法

定义3 设λ为一实数，向量a与λ的乘积λa为一向量，其模等于$|a|$的$|\lambda|$倍，即

$$|\lambda a|=|\lambda||a|$$

当$\lambda>0$时，其方向与a同向；

当$\lambda<0$时，其方向与a反向；

当$\lambda=0$时，λa为零向量。

图8—7

向量与数的乘积满足下列运算规律：

(1) $\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)$

$= (\lambda\mu)a$（结合律）；

（2）$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$（分配律），

$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$。

设a^0表示与非零向量a同方向的单位向量，则由向量与数乘法的定义，可将a写成

$$a = |a| a^0,$$

由此得

$$a^0 = \frac{a}{|a|}$$

上式表示一个非零向量除以它的模即得到与它同向的单位向量。

例1 求点（1，-2，3）到各坐标轴的距离。

解 点（1，-2，3）到x轴的距离即为点（0，-2，3）的向径r_1的模：

$$|r_1| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{13}。$$

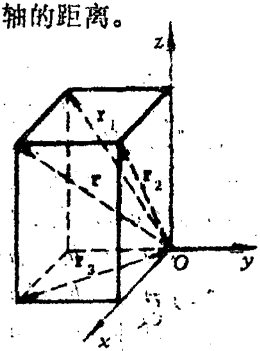


图8—8

同理，点(1，-2，3)到y轴与z轴的距离，分别为点（1，0，3）与点（1，-2，0）的向径r_2与向径r_3的模：

$$|r_2| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$|r_3| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}。$$

例2 若平面上一个四边形的对角线互相平分，试应用向量证明它为平行四边形。

证明 设四边形为$ABCD$，已知$AM = MC$，$DM = MB$，作向量$\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{DM}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{DC}$，如图8—9所示。

因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB},$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC},$$

由假设 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$，

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$。

即 $AB//DC$，

且$AB=DC$。

由平面几何知，$ABCD$为平行四边形。

图8—8

习 题 2

1. 设$u=a+b+2c$，$v=a-2b+c$，试用a、b、c表示$3u-2v$。

2. 在平行四边形$ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，试用a与b表示$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$与$\overrightarrow{MD}$，这里M是平行四边形对角线的交点。

3. 试证三角形两边中点的联线平行第三边且等于第三边的一半。

4. 向量a与b在什么条件下，下列式子成立：

(1) $|a+b|>|a-b|$；

(2) $|a+b|=|a-b|$；

(3) $|a+b|<|a-b|$。

5. 设四面体$OABC$的三条棱AB、BC、CA的中点分别是L、M、N，求证：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}。$$

6. 已知梯形$OABC$，其中CB平行且等于OA的一半，设M与N各为梯形的上底和下底的中点，若$\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OC}=b$，试求$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{MN}$。

§3 向量的坐标、模和方向余弦

一、向量的坐标

为了能够充分的利用向量这一有力的数学工具，我们来建立向量的坐标表示式。

首先，设向量的起点位于坐标原点，终点为$M(x,y,z)$，即有向量$\overrightarrow{OM}$。过M作垂线交xOy面于M'。又过M'作垂线交Ox轴、Oy轴于P、Q，如图8—10所示。在x、y、z轴的正方向上，分别取单位向量i、j、k，称为基本单位向量，由向量的加法知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M},$$

而 $$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}$$

$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ},$$

$$\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OR}.$$

又 $\overrightarrow{OP}=xi$，$\overrightarrow{OQ}=yj$，$\overrightarrow{OR}=zk$。故得向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式（又叫分解式）为

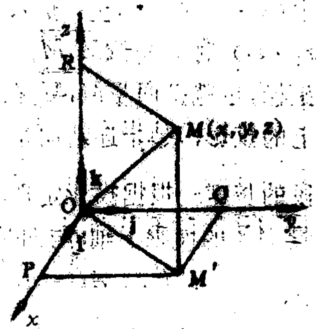


图8-10

$$\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk。$$

或简写成$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$。

其中xi、yj、zk称为$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的分向量。而x、y、z称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标。

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间任意两点，如何求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$？

首先连OM_1，OM_2，M_1M_2，得向量$\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$和$\overrightarrow{M_1M_2}$，如图8—11所示。由向量加法的三角形法则知

$$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

因为

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1i+y_1j+z_1k,$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2i+y_2j+z_2k.$$

所以，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$按基本单位向量的分解式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$$

图8—11

其中(x_2-x_1)、(y_2-y_1)、(z_2-z_1)称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标，也就是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在三个坐标轴上的投影。所谓向量在轴上的投影，是指连结向量的始点和终点在轴上的投影的有向线段的长度。根据投影定理，向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影，等于向量$\overrightarrow{AB}$的模乘上轴u与向量$\overrightarrow{AB}$夹角α的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha.$$

二、向量的模与方向余弦

如前所述，向量的模就是向量的长度，它等于向量的起点与终点间的距离。

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间的两点，向量$a=\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标为$a_x$，$a_y$，$a_z$。即

$$a=a_xi+a_yj+a_zk.$$

其中

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1。$$

由两点间的距离公式，得向量a的模为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

向量的方向，可用向量与三个坐标轴正向的夹角表示。设向量a与x、y、z轴的夹角分别为α、β、γ，则α、β、γ称为向量a的方向角。当a已知时，方向角便有确定的值，但对于非特殊角，为了省去计算上的麻烦，也可用α、β、γ的余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$表示向量a的方向，称为a的方向余弦。如图8—12。

由投影定理有

$$a_x = |\mathbf{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y = |\mathbf{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = |\mathbf{a}|\cos\gamma。$$

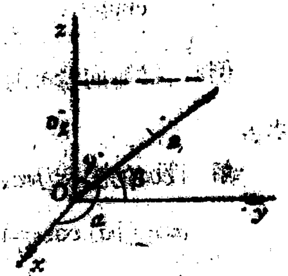


图8—12

从而得到向量a的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}。$$

易知，向量的方向余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1。$$

例1 已知点$M_1(1,2,-2)$，$M_2(-3,5,1)$，求：

(1) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标及坐标表示式；(2) $|\overrightarrow{M_1M_2}|$；

(3) $\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦。

解 (1) 设$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标为a_x、a_y、a_z，则

$$a_x = -3-1 = -4,$$