

普通高等教育“十一五”规划教材  
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI



GONGCHENG DIANCICHANG  
JICHU YU YINGYONG

# 工程电磁场 基础与应用 (第二版)

杨尔滨 杨欢红 刘蓉晖 编著



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

普通高等教育“十一五”规划教材  
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI



GONGCHENG DIANCICHANG  
JICHU YU YINGYONG

# 工程电磁场 基础与应用

(第二版)

编 著 杨尔滨 杨欢红 刘蓉晖  
主 审 周希朗



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

## 内 容 简 介

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。

全书共分七章,主要内容包括静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、平面电磁波、均匀传输线和应用 MATLAB 对电磁场的仿真。本书着重阐明工程电磁场所涉及的基本理论和基本概念,通过较多的例子,尽可能将枯燥复杂的理论,阐述得通俗易懂,便于自学。同时还尝试着将 MATLAB 软件用于对电磁场理论的分析 and 仿真,使读者能从复杂的数学表达式中看出其所表达的物理图像,使抽象的电磁场理论显现出生动直观的一面。本书在各章后面都有小结和一定量的难易程度适当的习题,并附有参考答案。

本书可作为普通高等学校电气工程及其自动化专业的本科教材,也可作为相关专业学生及工程技术人员的自学参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场基础与应用/杨尔滨,杨欢红,刘蓉晖编  
著.—2 版.—北京:中国电力出版社,2009  
普通高等教育“十一五”规划教材  
ISBN 978-7-5083-9205-9

I. 工… II. ①杨…②杨…③刘… III. 电磁场-高等学校-教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 126697 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

\*

2005 年 8 月第一版

2009 年 9 月第二版 2009 年 9 月北京第四次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19.75 印张 477 千字

定价 31.60 元

## 敬告读者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

# 前 言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神,加强教材建设,确保教材质量,中国电力教育协会组织制订了普通高等教育“十一五”教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校,满足学科发展和人才培养的需求,坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与编订相结合。本书为修订教材。

《工程电磁场基础与应用》第一版于2005年8月出版至今已近4年,被多所高校的电气工程及其自动化及其他电类专业作为教材用于电磁场课程的教学。编者在教学过程中也收到了许多高校教师的反馈信息,提出了许多宝贵的建议和修改意见,在此表示深深的谢意。

随着高等教育改革的不断深入,各所高校更加重视对复合型、应用型人才的培养,因此对教材内容就有了更高的要求。为此编者深感有必要对第一版的各个章节进行补充、删减和修订,以满足当前乃至今后一段时间内的教学和实践需要。

本书第二版的主要目标是适应电气工程及其自动化及相关电子与通信类专业人才培养方案和教学内容体系的改革要求,并紧跟我国高等教育迅速发展的形势。为此,在第二版中对传统内容进行了认真筛选,在保证必需的常用基础知识的原则下,加强了仿真实践类内容。同时对各章节中一些论述不够准确的地方进行了修改、补充和完善。

在第二版中主要做了以下几个方面的修订和补充:

(1) 根据不同学时要求,在第一章中补充了静电场边值问题一节,目的是使学生对电磁场数值分析能有初步的了解。如果是少学时的电磁场教学,这一节可作为选学内容。

(2) 在第二章中增加了接地装置在工程中的应用分析,并力求在基本概念和基本原理的基础上将问题交代清楚,目的是加强学生在教师指导下的自学能力的培养。

(3) 第三章也相应增加一节应用分离变量法分析恒定磁场,并简要介绍了工程上的电磁屏蔽的概念,主要也是为加强学生应用计算机进行电磁场仿真练习的能力。

(4) 对个别图形和符号按照国家标准进行了相应的修改。每章在保留原有习题的基础上又补充了若干习题,并对习题解答进行了详细的校对。这样更有利于学生的学习。

(5) 高等教育承担着培养具有创新精神和实践能力的高素质人才的任务,而实践教学环节更具有非常重要的意义,因此在第七章又着力补充了一些接近于工程实例的仿真分析及仿真习题练习。通过对电磁场的仿真可以比较直观地观察到电磁场分布规律以加深对电磁场理论的原理和概念的理解,使枯燥的数学理论更为生动,以激发出学生的学习热情。

书中打\*号的章节均属参考内容,可根据实际需要进行取舍。

参加本书修订工作的教师有杨尔滨、杨欢红、刘蓉晖。陆文雄老师因已退休主动要求不参与第二版的修订工作,但在全书修订完成之后,仍对书稿进行了详细的审阅并提出了有益的建议。在此对陆文雄老师表示诚挚的感谢。李晓华、魏书荣、山霞等老师也对本书的习题校对和文稿校对做了大量工作,在此一并表示感谢。

本书第二版由上海交通大学周希朗教授进行了认真、仔细的校审,并提出了非常有益

的、关键性的修改意见，在此谨致以衷心的感谢。

本书在某些方面所做的修改和尝试，以及书中不足和存在问题之处，请各位读者不吝予以批评指正。意见请寄上海电力学院电力系电路电机教研室。

编 者

2009 年 5 月

# 第一版前言

电磁场理论是电气工程类专业技术的理论基础,是电气工程及其自动化专业本科学生必须具备的知识结构。

本教材是根据国家教委公布的高等工业学校《电磁场课程教学基本要求》及结合近年来不断进行的教学改革的具体情况,为电气工程类本科学生所编写的一本专业技术基础课程教材。旨在大学物理电磁学的基础上进一步阐述宏观电磁现象的基本规律,介绍其在工程应用方面的基本知识,以培养学生应用场的观点和方法对电工领域中的电磁现象、电磁过程进行定性分析和判断的能力以及进行定量分析的基本技能,为学生今后解决工程实际问题打下良好的基础。此外,本课程的理论性和逻辑推理特点,对培养学生正确的思维方法和严谨的科学态度也大有帮助。

本书的特点主要有:

(1) 在内容体系上采用从静态场到时变场,从特殊到一般的顺序;重点加强了对基本概念 的阐述,并力求理论与实际相结合,所举例题与专业实际相联系;既能与先修课程保持恰当的衔接,也能为后续专业课程所应用到的电磁场理论进行合理的安排。

(2) 尽量简化对某些定理和公式的证明推导,对一些较为抽象问题的论述通过例题和透彻的分析,以消除学生对电磁场理论课存在的数学繁难、概念抽象、自学不易的感觉。

(3) 采用 MATLAB 强大的仿真功能,对电磁场进行仿真,可以清楚地看到电磁场的三维空间分布的模拟分布曲线图,使得学生在学习较为抽象的电磁场理论时有了形象思维的帮助,以增强学懂弄通电磁场理论的信心。

本书是按 50~70 学时的教学安排所编写的,也可以根据具体教学要求进行增删。

参加本书编写的有上海电力学院杨尔滨、杨欢红、刘蓉晖和陆文雄,其中杨尔滨编写第四、五、七章及附录一、二并任本书主编;陆文雄编写第一章,并校审各章习题及解答;杨欢红编写第三章及附录三、四;刘蓉晖编写第二、六章。全书由上海交通大学徐国治教授仔细校审,并提出许多宝贵的修改意见,在此谨致谢意。

限于作者的水平,本书中一定存在不少不妥和错误之处,恳请各位读者不吝指正。

编者

2005 年 3 月

## 目 录

## 前言

## 第一版前言

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 第一章 静电场                 | 1   |
| 第一节 真空中的静电场             | 1   |
| 第二节 电介质中的静电场            | 11  |
| 第三节 静电场的基本方程、分界面上的边界条件  | 19  |
| 第四节 平面镜像法               | 27  |
| 第五节 球面镜像法               | 31  |
| 第六节 柱面镜像法——电轴法          | 35  |
| * 第七节 静电场边值问题           | 41  |
| 第八节 电容和部分电容             | 51  |
| 第九节 静电场能量和电场力           | 59  |
| 小结                      | 68  |
| 习题                      | 69  |
| 第二章 恒定电场                | 74  |
| 第一节 导电媒质中的电流和电流密度       | 74  |
| 第二节 恒定电场的基本方程、分界面上的边界条件 | 76  |
| 第三节 恒定电场与静电场的比拟         | 85  |
| 第四节 电导与部分电导             | 87  |
| 第五节 接地电阻                | 92  |
| 小结                      | 97  |
| 习题                      | 98  |
| 第三章 恒定磁场                | 102 |
| 第一节 真空中的恒定磁场            | 102 |
| 第二节 磁媒质中的恒定磁场           | 107 |
| 第三节 恒定磁场的基本方程、分界面上的边界条件 | 112 |
| 第四节 标量磁位                | 114 |
| 第五节 矢量磁位                | 117 |
| 第六节 镜像法                 | 123 |
| * 第七节 分离变量法             | 126 |
| 第八节 电感                  | 130 |

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| 第九节 磁场能量和磁场力·····          | 136        |
| 小结·····                    | 141        |
| 习题·····                    | 144        |
| <b>第四章 时变电磁场</b> ·····     | <b>150</b> |
| 第一节 时变电磁场的认识和发展过程·····     | 150        |
| 第二节 法拉第电磁感应定律·····         | 151        |
| 第三节 麦克斯韦方程·····            | 156        |
| 第四节 时变电磁场的边界条件·····        | 161        |
| 第五节 复数形式的麦克斯韦方程·····       | 162        |
| 第六节 坡印亭定理及坡印亭矢量·····       | 165        |
| 第七节 动态位·····               | 170        |
| 第八节 波动方程·····              | 173        |
| 第九节 电磁场与电路的关系·····         | 175        |
| 小结·····                    | 178        |
| 习题·····                    | 180        |
| <b>第五章 平面电磁波</b> ·····     | <b>182</b> |
| 第一节 理想介质中的均匀平面波·····       | 182        |
| 第二节 导电媒质中的平面波·····         | 186        |
| 第三节 电磁波的极化·····            | 192        |
| 第四节 平面电磁波的垂直投射·····        | 194        |
| 第五节 相速和群速·····             | 197        |
| 第六节 集肤效应、邻近效应及电磁屏蔽与涡流····· | 198        |
| 第七节 电磁波谱·····              | 202        |
| 小结·····                    | 203        |
| 习题·····                    | 205        |
| <b>第六章 均匀传输线</b> ·····     | <b>207</b> |
| 第一节 电路参数的分布特性与分布参数电路·····  | 207        |
| 第二节 均匀传输线及其方程·····         | 208        |
| 第三节 均匀传输线方程的正弦稳态解·····     | 211        |
| 第四节 均匀传输线的原参数和副参数·····     | 217        |
| 第五节 终端接特性阻抗的传输线·····       | 220        |
| 第六节 终端接任意阻抗的传输线·····       | 221        |
| 第七节 无损耗传输线·····            | 223        |
| 第八节 无损耗线方程的通解·····         | 228        |
| 第九节 无损耗线的波过程·····          | 230        |
| 小结·····                    | 233        |

习题..... 236

**第七章 应用 MATLAB 对电磁场的仿真** ..... 238

    第一节 MATLAB 简介 ..... 238

    第二节 应用 MATLAB 的 m 语言对电磁场的仿真 ..... 239

    第三节 应用 MATLAB 偏微分方程工具箱对电磁场的仿真..... 257

    小结..... 272

    习题..... 272

**附录**..... 274

    附录一 矢量分析与场论概念..... 274

    附录二 立体角的概念..... 283

    附录三 电磁场常用物理量和单位..... 285

    附录四 电磁场专业词汇中英文对照表..... 287

**习题参考答案**..... 294

**参考文献**..... 303

## 第一章 静 电 场

电场的特性,通常用被携入电场的静止带电体所受到机械力(电场力)的作用来说明。因此我们这样来定义电场:电场是电磁场的一个方面,它对于引入场中的静止的带电体有机机械力的作用。

要分析电场的特性,必须用静止的带电体。这是因为如果带电体不是静止的,则不但电场对它有力的作用,而且磁场也将对它有力的作用。

多数情况下,电磁场是与电荷密切联系着的,所以也可以简单地说:电荷周围存在着的,一种特殊形式的物质,称为电场。

相对于观察者为静止的,且其电荷不随时间而变的带电体所产生的电场,称为静电场。

本章讨论静止电荷引起的电场,描述它的场量——电场强度矢量、电位移矢量。根据静电场环路定理及守恒性,引入了电位和电位梯度的概念;根据高斯通量定理,先分析真空中的电场,再讨论电介质中的电场,以及导体的影响,由此得出静电场的基本方程,包括积分形式和微分形式,并引入了散度和旋度的概念,得出静电场的有散性和无旋性。

由基本方程的积分形式,导出不同介质分界面上场量的边界条件。由基本方程的微分形式,导出电位所满足的微分方程,即泊松方程和拉普拉斯方程。根据静电场解的唯一性,介绍了镜像法和电轴法这两种间接求解的方法。

根据独立导体和两导体间电容的计算方法,给出了多导体系统部分电容的概念。最后介绍了静电场能量、能量密度,以及应用虚功原理,即用虚位移法计算电场力的方法。

### 第一节 真空中的静电场

#### 1. 库仑定律、电场强度

无限大真空中,两个点电荷 $q_1$ 、 $q_2$ 间的作用力,可由库仑定律决定。在图1-1中, $q_2$ 所受到( $q_1$ 对它)的作用力,在国际单位制(SI)中,可表示为

$$\mathbf{f}_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_{12}^0 \quad (1-1)$$

式中, $\mathbf{r}_{12}^0$ 为由 $q_1$ 到 $q_2$ 方向的单位矢量。

同样地, $q_1$ 所受到的作用力,可表示为

$$\mathbf{f}_{12} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_{21}^0 \quad (1-2)$$

式中, $\mathbf{r}_{21}^0$ 为由 $q_2$ 到 $q_1$ 方向的单位矢量, $\mathbf{r}_{21}^0 = -\mathbf{r}_{12}^0$ 。

式(1-1)与式(1-2)中,电荷的单位是C(库[仑]),距离 $r$ 的单位是m(米),力的单位为N(牛顿), $\epsilon_0$ 是真空中的介电常数,也称真空中的电容率,它的单位为F/m(法[拉]/米),其值为 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

如果有多个点电荷,则一个点电荷所受其他点电荷对它的作用力应等于这些点电荷分别

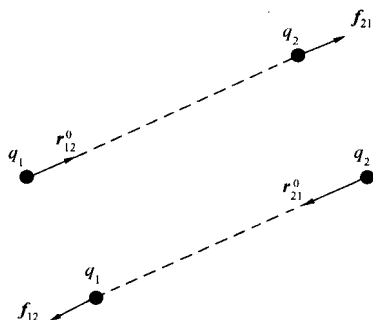


图 1-1 两点电荷间的作用力

地作用于该点电荷的力的矢量和, 即可以应用叠加原理。

应用库仑定律时应当注意两点: ①它仅适用于电荷处在无限大真空(或均匀介质)的情况下; ②它仅适用于点电荷。实际上任何带电体都有体积, 当带电体的线性尺度与两带电体间的距离相比微不足道时, 在工程要求的准确度下, 可以将带电体上的电荷当作点电荷来处理。

静止带电体周围电场的性质, 可以通过引入另一受试点电荷在场中所受的作用力来描述。

为了使被研究的电场尽量少受试验点电荷的影响, 试验点电荷的几何尺寸必须很小, 同时它所带的电量  $q_t$  也必须相当小。

电场的分布特性可以通过单位正电荷在场中所受的力来表征。表征电场性质的基本物理量称为电场强度  $E$ , 简称为场强, 它的数学表达式为

$$E(x, y, z) = \lim_{q_t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z)}{q_t} \quad (1-3)$$

式中,  $f$  为试体电荷  $q_t$  在观察点  $P(x, y, z)$  所受的力;  $E$  为随着空间位置的不同而变化的矢量函数, 它的单位是 V/m (伏特/米), 或 N/C (牛 [顿] / 库 [仑]), 但这是非电单位。

应该注意, 空间某点的电场强度  $E$  与正电荷在该点所受的力  $f$  的方向一致, 其量值等于单位正电荷在该点所受到的力的大小, 但电场强度并不是力。

根据电场强度的定义和库仑定律, 可以求得点电荷  $q$  在无限大真空中所产生的电场强度

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^0 \quad (1-4)$$

点电荷  $q$  所在的点称为源点, 观察点称为场点。  $r^0$  和  $r$  分别为由源点指向场点的单位矢量和距离。

根据叠加原理, 多个 ( $n$  个) 点电荷在无限大真空中某点产生的电场强度应等于各个点电荷各自在该点产生的电场强度之和。由于电场强度是矢量, 所以这种求和, 应该是矢量和, 即

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^2} r_k^0 \quad (1-5)$$

电荷的分布实际上是不连续的, 但是当我们考察电的宏观现象时, 可以把电荷的离散分布近似地用它的连续分布来替代, 因此就可以引入电荷密度的概念。

当电荷作体分布时, 定义其体电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (\text{C/m}^3) \quad (1-6)$$

当电荷分布在厚度可以忽略的面积上时, 定义其面电荷密度为

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (\text{C/m}^2) \quad (1-7)$$

同样地, 当电荷分布在截面积可以忽略的线形区域时, 定义其线电荷密度为

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (\text{C/m}) \quad (1-8)$$

计算电场时, 对于任何电荷分布, 可以把它们分成许多元电荷  $dq$ , 而把每一元电荷看成点电荷。因此根据式 (1-4), 在无限大真空中, 元电荷在离它  $r$  远处所产生的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \quad (1-9)$$

应用叠加定理, 全部电荷在该点所产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}^0 \quad (1-10)$$

这是给定电荷分布求电场强度的一般公式。式中的  $dq$ , 随电荷的体分布、面分布或线分布, 可分别表示为  $\rho dV$ 、 $\rho_s dS$  或  $\rho_l dl$ 。

**【例 1-1】** 真空中长度为  $l$  的线电荷, 其电荷线密度为  $\rho_l$ , 如图 1-2 所示, 求线外任一点  $P$  处的电场强度。

**解** 取圆柱坐标并将线电荷沿  $z$  轴方向放置, 由于电场呈轴对称分布, 因此与  $\alpha$  坐标无关。 $dz'$  为线元, 源点  $\rho_l dz'$  的坐标为  $(0, 0, z')$ , 它在场点  $P$  处的三个圆柱坐标分量分别为

$$dE_r = dE \sin\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^2} \sin\theta$$

$$dE_\alpha = 0$$

$$dE_z = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^2} \cos\theta$$

其中

$$R = \frac{r}{\sin\theta} = r \csc\theta$$

$$z' = z - r \cot\theta, dz' = r \csc^2\theta d\theta$$

代入前式后可得

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \sin\theta}{r} d\theta$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos\theta}{r} d\theta$$

长度为  $l$  的整个线电荷在  $P$  点处引起的电场强度为

$$E_r = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{-\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

当线电荷为无限长时, 则  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ , 得

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_z = 0$$

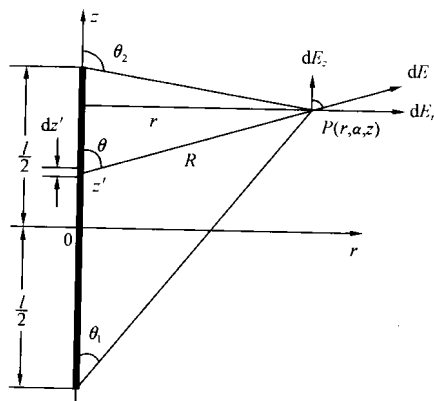


图 1-2 [例 1-1] 图

即

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}^0$$

**【例 1-2】** 无限大面分布电荷的面电荷密度为  $\rho_s$ , 如图 1-3 所示, 求面外任一点的电场强度。

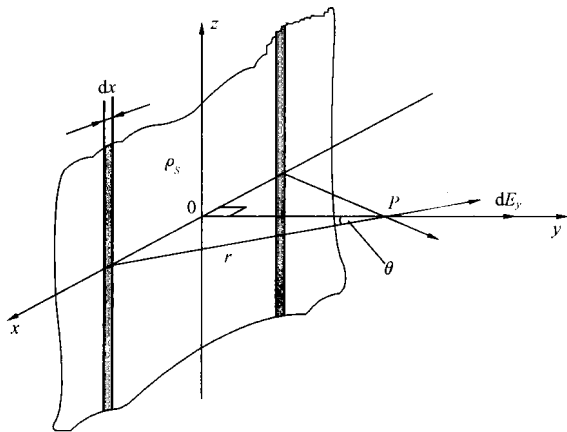


图 1-3 [例 1-2] 图

**解** 在面电荷上截取宽度为  $dx$  的窄条, 若长度为  $l$ , 则其元面积  $dS = ldx$ , 因此该窄条的电荷线密度为

$$\rho_l = \frac{\rho_s l dx}{l} = \rho_s dx$$

利用 [例 1-1] 的结果, 距离线电荷 (窄条  $dx$ )  $r$  处  $P(0, y, 0)$  的电场强度为

$$dE_y = \frac{\rho_s dx}{2\pi\epsilon_0 r} \cos\theta = \frac{\rho_s y dx}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)}$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

整个面电荷在  $P$  点引起的电场强度为

$$E_y = \frac{\rho_s y}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s y}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \operatorname{arctan} \frac{x}{y} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

即

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{j} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{j}$$

## 2. 真空中的高斯定理

在无限大真空中, 有一点电荷, 以该点电荷所在处为球心作一任意半径  $r$  的球面, 则由该球面穿出的  $\mathbf{E}$  的通量应为

$$\psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{r}^0 dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1-11)$$

这说明真空中一个点电荷  $q$  与由它发出的  $\mathbf{E}$  通量间有关系式

$$\psi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1-12)$$

如果包围点电荷的是一个任意形状的闭合面, 则由该闭合面穿出的  $\mathbf{E}$  的通量  $\psi_E$  仍为  $q/\epsilon_0$ 。

将上述结论推广, 可得真空中的高斯定理: 在真空电场中, 穿出任意闭合面的  $\mathbf{E}$  通量  $\psi_E$  等于该闭合面所包围的电荷的代数和  $Q$  除以真空介电常数  $\epsilon_0$ , 即

$$\psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1-13)$$

如果在无限大真空的电场中, 作一闭合面包围了  $n$  个点电荷, 则根据叠加原理有

$$\psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_{k=1}^n q_k}{\epsilon_0} \quad (1-14)$$

显然, 对于闭合面内是连续分布电荷的情况, 则为

$$\psi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\iiint_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad (1-15)$$

高斯定理可以应用立体角概念作一般证明 (参见附录二)。

**【例 1-3】** 用高斯定理求图 1-4 所示线密度为  $\rho_l$  的无限长线电荷外任一点的电场强度。

**解** 由 [例 1-1] 的结果可知, 无限长线电荷外任一点的电场, 只有径向分量并呈轴对称分布, 无轴向分量。以线电荷为轴线作一半径为  $r$ 、高为  $l$  的圆柱形高斯面, 其包围的电荷为  $\rho_l l$ , 根据式 (1-14) 可得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$

由于圆柱上下底无电场强度通量, 只有侧面有通量, 并且半径为  $r$  处的场强相等, 因此上式可写成

$$E \oint_S dS = 2\pi r l E = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$

所以

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0} \mathbf{r}^0$$

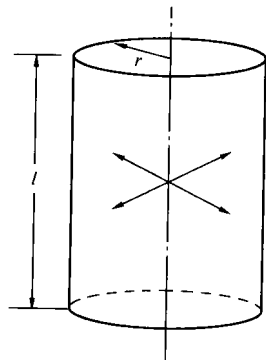


图 1-4 [例 1-3] 图

### 3. 静电场的环路定理和守恒性

由于电场强度  $\mathbf{E}$  是矢量, 矢量的运算较为复杂, 因此希望找到一个标量函数来表征静电场。为此我们来考察试验电荷  $q_t$  在电场中从一点沿某一路径移动到另一点时, 作用于  $q_t$  的电场力所做的功。从图 1-5 可见, 试验电荷  $q_t$  移动距离  $dl$  时, 电场力所做的功为

$$dA = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = q_t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-16)$$

将  $q_t$  从  $P$  点移动到  $Q$  点, 电场力所做的功是

$$A_{PQ} = q_t \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-17)$$

定义  $A_{PQ}$  与  $q_t$  的比值为沿某一路径由  $P$  点到  $Q$  点的电压, 用  $U_{PQ}$  来表示, 这样

$$U_{PQ} = \frac{A_{PQ}}{q_t} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-18)$$

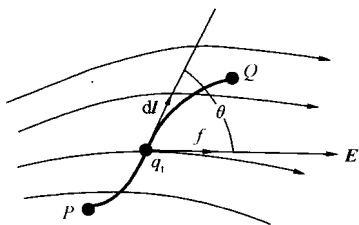


图 1-5 试验电荷在电场中移动

可见, 两点间的电压等于由一点到另一点移动单位正电荷时, 电场力所做的功。电压的单位是 V。

现在还要进一步探讨静电场中两点之间的电压与所取的路径是否有关系。为此, 把点电荷在真空中所产生的电场强度表达式 (1-4) 代入式 (1-18), 并进行积分, 于是

$$U_{PQ} = \int_P^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_P^Q \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right) \quad (1-19)$$

式中,  $r_P$  与  $r_Q$  分别为  $P$ 、 $Q$  两点与点电荷  $q$  所在处的距离, 如图 1-6 所示。

根据上述可以看出,  $P$ 、 $Q$  两点间的电压  $U_{PQ}$ , 只与  $P$  点和  $Q$  点的位置有关, 而与所取

路径无关。这是静电场的重要性质。这一结论虽然是由一个点电荷所产生的电场中得出的,但是在一般情况下,它也是正确的。这是因为对于任何电荷分布,总可以把它分成许多可以看成点电荷的元电荷  $dq$ , 每个元电荷产生的电场既然具有上述性质,而整个电荷分布所产生的电场,是所有这些元电荷引起的元场强的合成,当然也具有这种性质。由此还可以看出,电压也可以应用叠加原理。

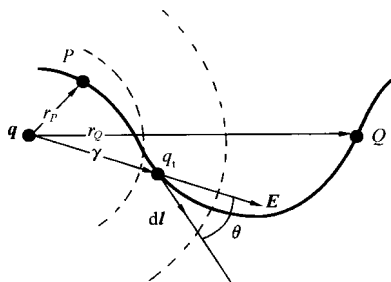


图 1-6 电场中两点之间电压

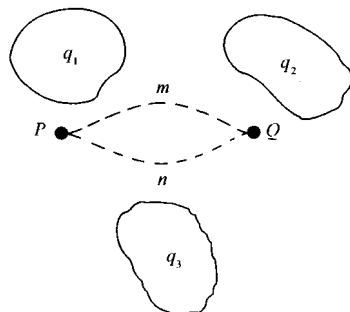


图 1-7 静电场的环路定理

静电场中任意两点间电场强度向量  $E$  的线积分与路径无关这一特性,常用另一种形式来表达,即电场强度向量  $E$  的环路线积分恒等于零。推导如下:

在图 1-7 所示的电场中,从  $P$  到  $Q$  沿两条不同的路径  $PmQ$  和  $PnQ$ ,求电场强度  $E$  的线积分。因为电压与路径无关,应有

$$\int_{PmQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{PnQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-20)$$

经过移项

$$\int_{PmQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{PnQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-21)$$

交换第二项的上下限

$$\int_{PmQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{QnP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-22)$$

即

$$\int_{PmQnP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-23)$$

式 (1-23) 通常写成

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-24)$$

电场强度的环路线积分为零,是静电场的基本方程之一,这就是静电场的环路定理。该定理表明,在静电场中沿任一闭合环路移动单位正电荷一周,电场力所做的功为零,换言之,沿任一闭合环路运动,功和能量是守恒的。根据静电场的守恒性,故称静电场是守恒场。

#### 4. 电位与电位梯度

由于静电场中任意两点间的电压有完全确定的数值,而与路径无关,因此如果在场中任意选定一点例如  $Q$  点,作为参考点,那么单位正电荷从电场中任意点  $P$  移动到参考点  $Q$  时,电场力所做的功,也就是  $P$  点到  $Q$  点的电压,将仅随  $P$  点的坐标而异,此时  $P$  点到参考点

的电压,被定义为  $P$  点的电位,它是个标量,即

$$\varphi_P = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-25)$$

$\varphi_P$  也可称为  $P$  点相对于  $Q$  点的电位。不管参考点如何选取,一经确定后,空间中任意一点  $P$  都有完全确定的单一电位值,即电位是单值函数,因此可用电位来描述静电场的特性。参考点的电位显然为

$$\varphi_Q = \int_Q^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-26)$$

电位的单位与电压的相同,也是 V (伏 [特])。

在工程上,常常把大地表面作为电位参考点。而在理论分析时,只要引起电场的全部电荷都处于有限的空间区域内,不管电荷如何分布,选取无限远作为参考点,对电位计算将带来很大的方便。在这种情况下,任意点  $P$  的电位为

$$\varphi_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-27)$$

静电场中任意两点  $A$  与  $B$  间的电压,就是这两点之间的电位差。这是因为

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_Q^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_A^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_B^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B \end{aligned} \quad (1-28)$$

当  $\varphi_A > \varphi_B$  时,  $U_{AB} > 0$  为正值,因此所说的电压是指电位降。也即是说,某点的电位就是该点与参考点间的电压。

由式 (1-27) 可以求得在无限大真空中一个点电荷  $q$  在距离它  $r$  远处的电位为

$$\varphi = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1-29)$$

根据一个点电荷所产生电位的表达式,应用叠加原理可以得出  $n$  个点电荷在电场中任意点所产生的电位

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} \quad (1-30)$$

式中,  $r_k$  是第  $k$  个点电荷  $q_k$  与要求其电位的场点之间的距离。

对于作连续分布的电荷,同样可以应用叠加原理写出它们所产生的电位

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (1-31)$$

当为线电荷分布时,产生的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l dl}{r} \quad (1-32)$$

当为面电荷分布时,产生的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s dS}{r} \quad (1-33)$$

当为体电荷分布时,产生的电位为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r} \quad (1-34)$$

电场强度和电位这两个物理量,既然都是表征同一电场特性的场量,两者之间必定具有一定的内在联系。上面已经讨论了如何从电场强度  $\mathbf{E}$  求电位  $\varphi$ , 这里来讨论已知电位  $\varphi$  如何求电场强度  $\mathbf{E}$ 。

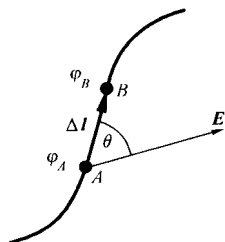


图 1-8 两点间的电位差

设  $A$  和  $B$  是电场中非常接近的两个点,相距  $\Delta l$ ,如图 1-8 所示,因此可以将  $AB$  线上各点的电场强度看作都是相等的。若  $\Delta l$  和  $\mathbf{E}$  的夹角为  $\theta$ ,则有单位正电荷从  $A$  点移到  $B$  点时,电场力所做的功应等于  $A$ 、 $B$  两点间的电位差,即

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l} = E \cos \theta \Delta l \quad (1-35)$$

若  $\varphi_B$  用  $\varphi_A + \Delta \varphi$  来表示,则

$$\varphi_A - (\varphi_A + \Delta \varphi) = E \cos \theta \Delta l \quad (1-36)$$

$$-\Delta \varphi = E_l \Delta l \quad (1-37)$$

式中,  $E_l$  为电场强度在  $\mathbf{l}$  方向的分量,  $E_l = E \cos \theta$ 。

当  $\Delta l \rightarrow 0$  时,有

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \quad (1-38)$$

即电场强度在  $\mathbf{l}$  方向的分量等于电位在该方向的空间偏导数的负值或增加率的负值(即减小率)。负号是指电场强度方向沿电位下降的方向。

如果分别把直角坐标系  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向作为  $\mathbf{l}$  的方向,就可以得到电场强度沿这三个方向的分量为

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-39)$$

由于

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad (1-40)$$

于是,在直角坐标中,电场强度可写成

$$\mathbf{E} = -\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right] \quad (1-41)$$

或用哈密尔顿算符“ $\nabla$ ”表示

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1-42)$$

则

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1-43)$$

式中,  $\nabla \varphi$  为电位梯度,梯度也可记作  $\text{grad}$ 。

式(1-43)是电场强度的微分表达形式,它表明电场强度是电位梯度的负值,即一点的电场强度  $\mathbf{E}$  的方向沿着电位的最大空间变化率的负方向(减小率最大的方向),所以电场强度的方向就是电位降的方向,而电位梯度则是指电位升的方向。

由于电位是标量,一般来说,先求得电位函数,然后应用式(1-43)求偏导得电场强度,要比直接求电场强度方便。

由式(1-43)可以看出,只有在电位不变的区域里,电场强度才为零。电位为零处,电场强度不一定为零。电场强度为零处,电位也不一定为零。