代數學辭典

原著　長澤龜之助

編譯　求知出版社

校訂　盛麓泉　毛仲安

長沙茂林書局發行

代数学辞典

代數學辭典

目 次

● + Plus, 加. ● − Minus, 減. ● × Into or times, 乘, ● :或 ÷ Divided, 除. ● ∽ 差 Differenee. ● < 小於, Is less than. ● > 大於, Is greater than. ● : Is to. 比之記號. ● √平方根, Radical. ● $\sqrt[3]{\ }$ 立方根. ● $\sqrt[n]{\ }$ n乘根. ● Σ Sigma, 同樣之項之和. ● Π Pi, 同樣之因數之積. ● ∴ 故, therefore. ● ∵ 因, Because.

代數學辭典索引目次

代數學辭典

代數學之公式

交換之理

● 和可任意列其被加數之次序.

$a+b+c=b+a+c=c+b+a=\cdots\cdots\cdots$

● 積可任意列其因數之次序.

$a\times b\times c=b\times a\times c=c\times b\times a=\cdots\cdots\cdots$

結合之理

● 和以符號示之,可任意將其各項結合之.

$a+b+c+d=a+(b+c+d)=(a+b)+(c+d)=\cdots\cdots\cdots$

● 積以符號示之,可任意將其各因數結合之.

$a\times b\times c=a\times(b\times c)=b\times(a\times c)=\cdots\cdots\cdots$

配分之理

● 自加減之若干項之式,以某數乘之,可乘其各項,而後加減之.

$(a+b-c+d)m=am+bm-cm+dm$。

● 反之，自加減之若干項之式，以某數除之，可除其各項而後加減之。

$(a+b-c+d)\div n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}+\frac{d}{n}$.

指數之理

$a^m\times a^n=a^{m+n}$.

$a^m\div a^n=a^{m-n}$, $[m>n]$.

$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$, $[m<n]$.

符號定則

● 加法。$+a+(+b)=+a+b$. $+a+(-b)=+a-b$.

$-a+(+b)=-a+b$. $-a+(-b)=-a-b$.

● 減法. $+a-(+b)=+a-b$. $+a-(-b)=+a+b$.

$-a-(+b)=-a-b$. $-a-(-b)=-a+b$.

● 乘法. $(+a)\times(+b)=+ab$. $(+a)\times(-b)=-ab$.

$(-a)\times(+b)=-ab$. $(-a)\times(-b)=+ab$:

● 除法. $(+ab)\div(+a)=+b$. $(-ab)\div(+a)=-b$.

$(-ab)\div(-a)=+b$. $(+ab)\div(-a)=-b$.

公式及因數

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. $(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab$

$+2ac+2bc$. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3-b^3$. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab$

$-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

公約數及公倍數

● A及之最大公約數爲G，最小公倍數爲L，

若 $A=aG$，$B=bG$，則

$$L=abG=A\times\frac{B}{G}=B\times\frac{A}{G}=\frac{A\times B}{G}.$$

分數

● $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

● $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots}$

$=\left(\frac{pa_1{}^n+qa_2{}^n+\cdots}{pb_1{}^n+qb_2{}^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}$.

● $\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_3}{b_3}>\cdots>\frac{a_n}{b_u}$，則 $\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}>\frac{a_n}{b_n}$.

〔但 b_1，b_2，b_3，………b_n 爲正數〕.

方程式

● 一元一次方程式 $ax+b=0$ 之根爲 $x=-\frac{b}{a}$.

● 聯立一次方程式自 $ax+by+c=0$，及 $a'x+b'y+c'=0$，得

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

● 含 x,y 之一方程式，例如 $x+y=5$，則有無數之解答，謂之不定方程式.

● 含 x,y 之二方程式．例如 $x+y=5$，$y-x=1$，表示同未知數相異之關係者，謂之獨立方程式.

● 含 x,y 之二方程式．例如 $x+y=5$，$3x+3y=25$，同未知數無同一之值，謂之矛盾方程式.

● 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 〔$a\neq0$〕之根，爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4dc}}{2a}$$

若 $b^2-4ac>0$，則得相異之實根.

若 $b^2-4ac=0$，則得相等之實根.

若 $b^2-4ac<0$，則得相異之虛根.

● 根數與係數之關係.

將 $ax^2+bx+c=0$ 之二根為 α, β, 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

冪及根

$$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots=a^{m+n+p+\cdots}\quad (a^m)^n=a^{mn}.$$

$$(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}.\quad a^0=1.$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m.\quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$$

$$\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

比例

● 若 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$.

● 反之 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$.

● 又若 $a:b=c:d$, 則

$b:a=d:c$.（反轉之理）.

$a+b:b=c+d:d$ （合比之理）.

$a-b:b=c-d:d$。（分比之理）。

$a+b:a-b=c+d:c-d$。（分合比之理）。

$a:c=b:d$。（更迭之理）。

$a^n:b^n=c^n:d^n$．

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$。

● 若 $a:b=b:c=c:d$ 則 $a:c=a^2:b^2$．

$a:d=a^3:b^3$，$b^2=ac$。

級　　數

初項$=a$，　　末項$=l$，

項數$=n$，　　公差$=d$，

公比$=r$，　　總和$=S$．

● 等差級數．$l=a+(n-1)d$。

$$S=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)d\right\}。\quad d=\frac{l-a}{n-1}。$$

● 等比級數．$l=ar^{n-1}$．

$$S=\frac{rl-a}{r-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}．$$

若 $-1<r<1$ 而 $n=\infty$

則 $S=\frac{a}{1-r}$. $r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$.

● a, b, c 爲等差級數則 $a-b:b-c=a:a$.

● a, b, c 爲等比級數則 $a-b:b-c=a:b$.

● a, b, c 爲調和級數則 $a-b:b-c=a:c$.

● 二數 a, b 之等差，等比，調和中項各爲 A, G, H, 則

$$A=\frac{1}{2}(a+b). \qquad G=\pm\sqrt{ab}.$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}. \qquad G^2=A.H.$$

● $1.2+2.3+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

● $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

● $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

列方組合

● 相異 n 個物，每回悉取列法之數 ${}_nP_n$ 如次。

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\times2\times1=n!.$$

● 相異 n 個物，每回取 r 個列法之數 ${}_nP_r$ 如次.

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

● n個物輪列法之數$(n-1)!$。

● n個物中有p個q個r個相同之物每回悉取列法之數，爲

$$\frac{n!}{p!q!r!}.$$

● 列法之許重復者。

相異n個物，悉取列法之數爲n^n. 又相異n個物，每回取r個列法之數爲n^r.

● 相異n個物，每回取r個組合之數，爲

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

● ${}_nC_r$之最大值

n爲偶數，則$r=\frac{n}{2}$時nCr爲最大。

n爲奇數，則$r=\frac{n-1}{2}$及$r=\frac{n+1}{2}$時nCr之値相等，而最大

二項式定理

● $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots$
$\cdots+b^n$.

● 公項〔即第$r+1$項〕$={}_nC_ra^{n-r}b^r$.

● $(1\pm x)^n$ 之展開式最大項數〔絕對值〕如次．第 r 項最大，則

$$\frac{(n+1)x}{x+1}+1>r>\frac{(n+1)x}{x+1}.$$

若 $r=\frac{(n+1)x}{x+1}$，則 $\frac{n-r+1}{r}x=1$，而第 r 項與第 $r+1$ 項相等，而大於他項．

● $(1\pm x)^n$ 之展開式最大係數〔絕對值〕如次．n 為偶數，則 $r=\frac{n}{2}+1$ 時，第 r 項之係數最大．n 為奇數，則第 $\frac{n+1}{2}$ 項及 $\frac{n+3}{2}$ 項之係數相等，而大於他之各項之係數。

● $(1+x)^n$ 之展開式之係數和為 2^n．

● $(1+x)^n$ 之展開式奇數項係數和，等於偶數項係數和．

不等式

● 次之字母皆為正實數．

(1) $a>b$ 則 $a\pm x>b\pm x$.

(2) $a>b$ 則 $-a<-b$.

(3) $a>b$ 則 $ma>mb$. 及 $-ma<-mb$.

(4) $a>b, a'>b', a''>b''$, …… 則 $a+a'+a''+\cdots>b+b'+b''$………

(5) $a>b$ 則 $(a^m>b^m,)$ 及 $a^{-m}<b^{-m}$

● a, b, b …… 皆不相等，則 $\frac{a+b+c+d+\cdots}{n}>\sqrt[n]{(abcd\cdots)}$。

但 $a, b, c, d, \cdots$ 若皆相等，則符號 $>$ 變爲 $=$。

對 數

● $\log_a a=1$, $\log_a a^m=m$, $\log_a 1=0$.

$\log(ab)=\log a+\log b$。

$\log(a\div b)=\log a-\log b$。

$\log a^m=\log a$。

$\log\sqrt[m]{a}=\frac{1}{m}\log a$。

$\log_b \mathrm{N}=\log_a \mathrm{N}\times\frac{1}{\log_a b}$.

$\log_a b\times\log_b a=1$.

● 訥白爾對數之底爲

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots=2.7182818\cdots\cdots\cdots$$