

代數學辭典

原著 長澤龜之助

編譯 求知出版社

校訂

盛毛 麓仲 泉安

長沙茂林書局發行

代數學辭典

代數學辭典

目次

● 公式	1.
交換之理	1.
結合之理	1.
配分之理	1.
指數之理	2.
符號之定則	2.
公式及因數	3.
公約數及公倍數	3.
分數	3.
方程式	4.
幕及根	6.
比例	5.
級數	6.
列方, 組合	7.

二項式定理	8.
不等式	9.
對數	10.
複利, 年金	11.
—•••••—	
整式問題	11.
剩餘定理問題	29.
Σ 及 Π 記法問題	32.
因數分解問題	33.
對稱式, 交代式問題	43.
公因數, 公倍數問題	50.
分數式問題	57.
一元一次方程式問題	80.
聯立一次方程式問題	95.
一次方程式應用問題	111.
累乘, 開方問題	142.
根數問題	147.
一元二次方程式問題	155.
準二次方程式問題	168.
1之立方根問題	182.

聯立二次方程式問題	184.
根數方程式問題	210.
二次方程式之根與係數之關係 問題	223.
二次方程式應用問題	233.
比, 比例, 變數法問題	225.
等差級數問題	267.
等比級數問題	276.
調和級數問題	281.
記數法問題	284.
列方, 組合問題	286.
二項式定理問題	295.
對數複利年金問題	303.
不等式問題	309.
極大極小問題	304.
消去法問題	319.
不定方程式問題	321.
解聯立二次方程式	40.
解根數方程式	44.
應用問題	48.
第一數之問題	46.

- 1481 Plus, 加. ● — Minus, 減. ● Into or times, 乘, ● : 或 ÷ Divided, 除. ● Difference. ●
- < 小於, Is less than. ● > 大於, Is greater than.
- : Is to. 比之記號. ● $\sqrt{\quad}$ 平方根, Radical. ● $\sqrt[3]{\quad}$ 立方根. ● $\sqrt[n]{\quad}$ n 乘根. ● Σ Sigma, 同樣之項之和.
- Π Pi, 同樣之因數之積. ● ∴ 故, therefore. ●
- ∴ 因, Because.
- 1482 分數問題 1483 代數式問題 1484 數、係數問題 1485 式問題 1486 代數式問題 1487 代數式問題 1488 代數式問題 1489 代數式問題 1490 代數式問題 1491 代數式問題 1492 代數式問題 1493 代數式問題 1494 代數式問題 1495 代數式問題 1496 代數式問題 1497 代數式問題 1498 代數式問題 1499 代數式問題 1500 代數式問題

代數學辭典索引目次

1. 求值	1.
2. 求積	6
3. 求除得商	6
4. 求除得之剩餘	7.
5. 分解因數	7.
6. 求簡單	10.
7. 求式	14.
8. 作根之方程式	15.
9. 求關係	15.
10. 求最大公約數	17.
11. 比較大小	17.
12. 求證明	17.
I. 絕對的恆等式	17.
II. 條件附恆等式	19.
III. 得整除	25.
IV. 雜題	26.
13. 判別根	29.
14. 解一元一次方程式	29.
15. 解一元二次方程式	31.
16. 解準二次方程式	32.
17. 解一元分數方程式	33.
18. 解聯立一次方程式	37.
19. 解聯立二次方程式	40.
20. 解根數方程式	44.
21. 應用問題	46.
第一 數之問題	46.

第二	量之問題	47.
第三	配分問題	49.
第四	旅行問題	50.
第五	火車問題	53.
第六	水流問題	55.
第七	工率工價之問題	55.
第八	賣買問題	58.
第九	年齡問題	58.
第十	鐘表問題	59.
第十一	射箭問題	59.
第十二	試驗問題	60.
第十三	運費問題	61.
第十四	混合問題	61.
第十五	利息問題	62.
第十六	幾何學之問題	63.
第十七	雜題	65.
22	等差級數	67.
23	等比級數	69.
24	調和級數	71.
25	記數法	72.
26	列方, 組合	73.
27	二項式定理	76.
28	對數, 複利, 年金	78.
29	不等式	80.
30	極大, 極小	80.
31	消去法	81.
32	不定方程式	82.

代 數 學 辭 典

代 數 學 之 公 式

交 換 之 理

- 和可任意列其被加數之次序。

$$a+b+c=b+a+c=c+b+a=\dots\dots\dots$$

- 積可任意列其因數之次序。

$$a \times b \times c = b \times a \times c = c \times b \times a = \dots\dots\dots$$

結 合 之 理

- 和以符號示之，可任意將其各項結合之。

$$a+b+c+d=a+(b+c+d)=(a+b)+(c+d)=\dots\dots\dots$$

- 積以符號示之，可任意將其各因數結合之。

$$a \times b \times c = a \times (b \times c) = b \times (a \times c) = \dots\dots\dots$$

配 分 之 理

- 自加減之若干項之式，以某數乘之，可乘其各項，而後加減之。

$$(a+b-c+d)m = am+bm-cm+dm.$$

- 反之，自加減之若干項之式，以某數除之，可除其各項而後加減之。

$$(a+b-c+d) \div n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} + \frac{d}{n}.$$

指 數 之 理

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad [m > n].$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad [m < n].$$

符 號 定 則

● 加法。 $+a+(+b)=+a+b$, $+a+(-b)=+a-b$.

$$-a+(+b)=-a+b, \quad -a+(-b)=-a-b.$$

● 減法。 $+a-(+b)=+a-b$, $+a-(-b)=+a+b$.

$$-a-(+b)=-a-b, \quad -a-(-b)=-a+b.$$

● 乘法。 $(+a) \times (+b)=+ab$, $(+a) \times (-b)=-ab$.

$$(-a) \times (+b)=-ab, \quad (-a) \times (-b)=+ab.$$

● 除法。 $(+ab) \div (+a)=+b$, $(-ab) \div (+a)=-b$.

$$(-ab) \div (-a)=+b, \quad (+ab) \div (-a)=-b.$$

公 式 及 因 數

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2, (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$$

$$+ 2ac + 2bc, (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= a^3 - b^3, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab$$

$$- ac - bc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

公 約 數 及 公 倍 數

● A 及 B 之最大公約數爲 G, 最小公倍數爲 L,

若 $A = aG$, $B = bG$, 則

$$L = abG = A \times \frac{B}{G} = B \times \frac{A}{G} = \frac{A \times B}{G}.$$

分 數

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

$$= \left(\frac{pa_1^n + qa_2^n + \dots}{pb_1^n + qb_2^n + \dots} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

● $\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \frac{a_3}{b_3} > \dots > \frac{a_n}{b_n}$, 則 $\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} > \frac{a_n}{b_n}$.

[但 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 爲正數].

方 程 式

● 一元一次方程式 $ax+b=0$ 之根爲 $x=-\frac{b}{a}$.

● 聯立一次方程式自 $ax+by+c=0$, 及 $a'x+b'y+c'=0$, 得

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

● 含 x, y 之一方程式, 例如 $x+y=5$, 則有無數之解答, 謂之不定方程式.

● 含 x, y 之二方程式. 例如 $x+y=5, y-x=1$, 表示同未知數相異之關係者, 謂之獨立方程式.

● 含 x, y 之二方程式. 例如 $x+y=5, 3x+3y=25$, 同未知數無同一之值, 謂之矛盾方程式.

● 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ [$a \neq 0$] 之根, 爲

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

若 $b^2 - 4ac > 0$, 則得相異之實根.

若 $b^2 - 4ac = 0$, 則得相等之實根.

若 $b^2 - 4ac < 0$, 則得相異之虛根.

● 根數與係數之關係

將 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β , 則

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

幕 及 根

$$a^m \times a^n \times a^p \times \dots = a^{m+n+p+\dots}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^x b^y c^z \dots)^m = a^{xm} b^{ym} c^{zm} \dots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}, \quad a^0 = 1.$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

比 例

● 若 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$

● 反之 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$.

● 又若 $a:b=c:d$, 則

$b:a=d:c$. (反轉之理).

$a+b:b=c+d:d$ (合比之理).

$a:b=b:c=d:d$. (分比之理).

$a+b:a-b$ $c+d:c-d$. (分合比之理).

$a:c=b:d$. (更迭之理).

$$a^n:b^n=c^n:d^n.$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}.$$

● 若 $a:b=b:c=c:d$ 則 $a:c=a^2:b^2$.

$$a:d=a^3:b^3, b^2=ac.$$

級 數

初項 $=a$,

末項 $=l$,

項數 $=n$,

公差 $=d$,

公比 $=r$,

總和 $=S$.

● 等差級數. $l=a+(n-1)d$.

$$S=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}, d=\frac{l-a}{n-1}.$$

● 等比級數. $l=ar^{n-1}$.

$$S=\frac{rl-a}{r-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

若 $-1 < r < 1$ 而 $n = \infty$.

則 $S = \frac{a}{1-r}$, $r = n-1 \sqrt{\frac{b}{a}}$.

● a, b, c 爲等差級數則 $a-b:b-c=a:a$.

● a, b, c 爲等比級數則 $a-b:b-c=a:b$.

● a, b, c 爲調和級數則 $a-b:b-c=a:c$.

● 二數 a, b 之等差, 等比, 調和中項各爲 A, G, H , 則

$$A = \frac{1}{2}(a+b), \quad G = \pm \sqrt{ab},$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}, \quad G^2 = A \cdot H.$$

● $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

● $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

● $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

$$= \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 = (1+2+3+\dots+n)^2.$$

列 方 組 合

● 相異 n 個物, 每回悉取列法之數 ${}_nP_n$ 如次:

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1 = n!.$$

● 相異 n 個物, 每回取 r 個列法之數 ${}_nP_r$ 如次:

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1).$$

- n 個物輪列法之數 $(n-1)!$.
- n 個物中有 p 個 q 個 r 個相同之物每回悉取列法之數，爲

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

- 列法之許重複者。
相異 n 個物，悉取列法之數爲 n^n 。又相異 n 個物，每回取 r 個列法之數爲 n^r 。

- 相異 n 個物，每回取 r 個組合之數，爲

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- ${}_nC_r$ 之最大值

n 爲偶數，則 $r = \frac{n}{2}$ 時 ${}_nC_r$ 爲最大。

n 爲奇數，則 $r = \frac{n-1}{2}$ 及 $r = \frac{n+1}{2}$ 時 ${}_nC_r$ 之值相等，而最大

二 項 式 定 理

- $(a+b)^n = a^n + nC_1 a^{n-1} b + nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + b^n$.
- 公項 [即第 $r+1$ 項] $= nC_r a^{n-r} b^r$

- $(1+x)^n$ 之展開式最大項數〔絕對值〕如次，第 r 項最大，則

$$\frac{(n+1)x}{x+1} + 1 > r > \frac{(n+1)x}{x+1} \quad \text{或} \quad \frac{(n+1)x}{x+1} < r < \frac{(n+1)x}{x+1} + 1 \quad (5)$$

若 $r = \frac{(n+1)x}{x+1}$ ，則 $\frac{n-r+1}{r} x = 1$ ，而第 r 項與第 $r+1$ 項相等，而大於他項。

- $(1+x)^n$ 之展開式最大係數〔絕對值〕如次。 n 為偶數，則 $r = \frac{n}{2} + 1$ 時，第 r 項之係數最大。 n 為奇數，則第 $\frac{n+1}{2}$ 項及 $\frac{n+3}{2}$ 項之係數相等，而大於他之各項之係數。

- $(1+x)^n$ 之展開式之係數和為 2^n 。

- $(1+x)^n$ 之展開式奇數項係數和，等於偶數項係數和。

不 等 式

- 次之字母皆為正實數。

(1) $a > b$ 則 $a+x > b+x$ 。

(2) $a > b$ 則 $-a < -b$ 。

(3) $a > b$ 則 $ma > mb$ 及 $-ma < -mb$ 。

(4) $a > b, a' > b', a'' > b'', \dots$ 則 $a + a' + a'' + \dots > b + b' + b'' + \dots$

(5) $a > b$ 則 $(a^m > b^m)$ 及 $a^{-m} < b^{-m}$

● $a, b, c, \dots$ 皆不相等, 則 $\frac{a+b+c+d+\dots}{n} > \sqrt[n]{(abcd\dots)}$.

但 $a, b, c, d, \dots$ 若皆相等, 則符號 $>$ 變為 $=$.

對 數

● $\log_a a = 1, \log_a a^m = m, \log_a 1 = 0.$

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

$$\log(a \div b) = \log a - \log b.$$

$$\log a^m = m \log a.$$

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a.$$

$$\log_b N = \log_a N \times \frac{1}{\log_a b}.$$

$$\log_a b \times \log_b a = 1.$$

● 納白爾對數之底為

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots = 2.7182818 \dots$$