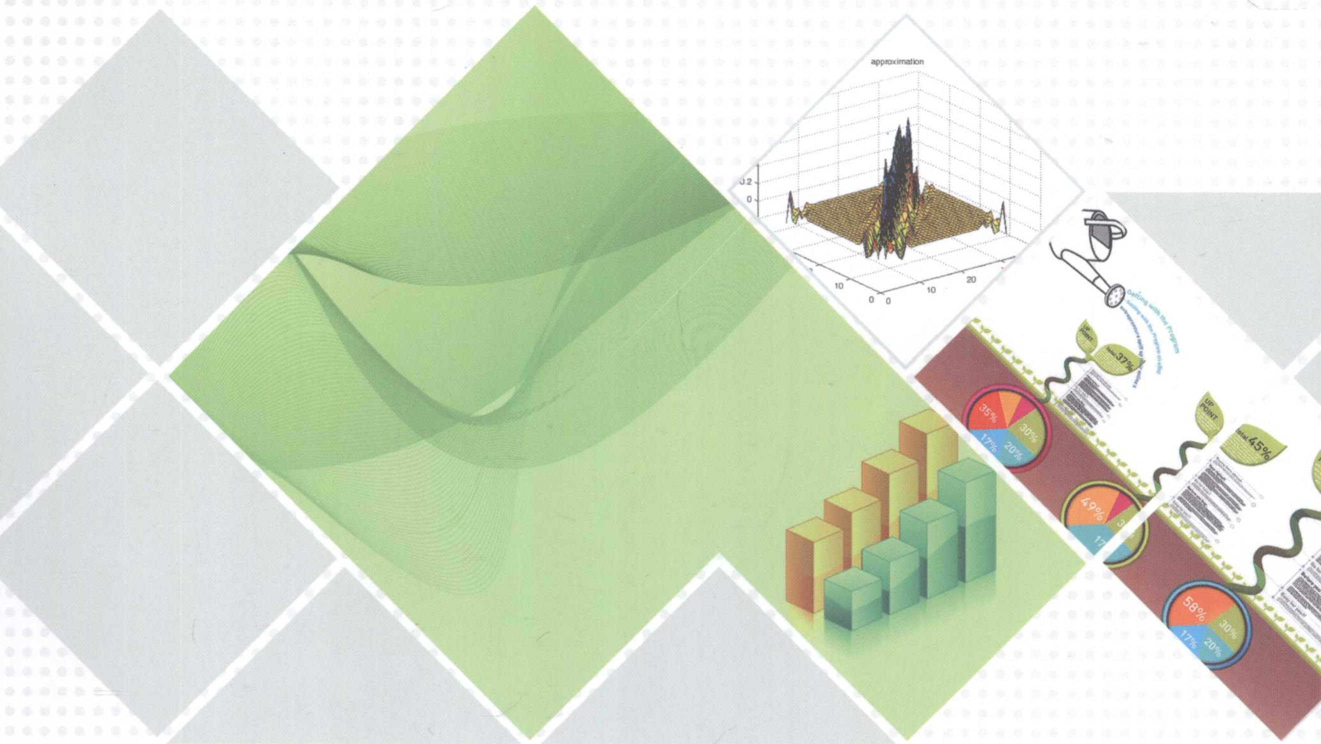
高等教育“十一五”规划教材
公共基础课教材系列

概率论与数理统计学习辅导

万星火 主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育"十一五"规划教材

公共基础课教材系列

概率论与数理统计学习辅导

万星火　主　编
肖继先　副主编
檀亦丽　周丽晖　参　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是与科学出版社2007年出版的《概率论与数理统计》(万星火主编)教材相配套的学习辅导书.内容包括该书各章的内容提要、习题与综合练习题全解.本书注重体现概率统计的思想方法与基本内容,强调对学生解题方法与能力的培养,力求做到深入浅出,通俗易懂,便于教学与自学.本书既可以作为高等院校概率论与数理统计的教学参考书,也可以作为数学爱好者学习概率统计的补充读物.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导/万星火主编.—北京:科学出版社,2009
(高等教育"十一五"规划教材·公共基础课教材系列)
ISBN 978-7-03-025545-7

Ⅰ.概… Ⅱ.万… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第161816号

责任编辑:沈力匀 张 斌/责任校对:赵 燕
责任印制:吕春珉/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2009年9月第一次印刷 印张:10 1/2
印数:1—6 000 字数:250 000

定价:17.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新蕾〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235(HP04)

高等教育“十一五”规划教材

编　委　会

前　言

概率论与数理统计是工科高等院校各专业的一门重要基础课，它有自己独特的思维方法和计算技巧. 在教学过程中，由于这门课程学时少、习题多、难度大，因此初学此课的同学往往感觉“难学”，不知如何去解题. 为了帮助教师解决习题课少、答疑量过大的问题，并启发学生的解题思路，帮助学生正确地理解基本概念，掌握解题方法与解题技巧，作者对《概率论与数理统计》(万星火主编，科学出版社 2007 年版)中的全部习题编写了解答，即形成本书. 在本书编写中，作者力求解题方法简明扼要，步骤清楚、完整、规范，以指导学生解题的基本技巧及书写方法. 本书可作为高等院校各专业“概率论与数理统计”课程的辅导教材，也可作为准备报考工科硕士研究生的人员与工程技术人员的学习参考书.

全书共分 9 章，每章包含内容提要和习题与综合练习题全解两部分. 本书编写人员分工如下：万星火(第 5、7～9 章)，肖继先(第 1、4 章)，檀亦丽(第 2、3 章)，周丽晖(第 6 章). 高艳、刘秋梅对全部习题进行了验算整理，万星火最后进行了统稿.

本书在编写过程中，得到了河北理工大学许多老师的大力支持，在此对他们一并表示感谢.

限于编者的水平，同时编写时间也比较仓促，错谬之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

目　录

前言

第 1 章　随机事件与概率 …… 1

1.1　内容提要 …… 1

1.2　习题与综合练习题全解 …… 4

第 2 章　随机变量及其分布 …… 18

2.1　内容提要 …… 18

2.2　习题与综合练习题全解 …… 21

第 3 章　多维随机变量及其分布 …… 38

3.1　内容提要 …… 38

3.2　习题与综合练习题全解 …… 42

第 4 章　随机变量的数字特征与极限定理 …… 66

4.1　内容提要 …… 66

4.2　习题与综合练习题全解 …… 70

第 5 章　数理统计的基本概念 …… 87

5.1　内容提要 …… 87

5.2　习题与综合练习题全解 …… 90

第 6 章　参数估计 …… 97

6.1　内容提要 …… 97

6.2　习题与综合练习题全解 …… 100

第 7 章　假设检验 …… 109

7.1　内容提要 …… 109

7.2　习题与综合练习题全解 …… 111

第 8 章　相关与回归分析 …… 130

8.1　内容提要 …… 130

8.2　习题与综合练习题全解 …… 131

第 9 章　方差分析 …… 147

9.1　内容提要 …… 147

9.2　习题与综合练习题全解 …… 150

主要参考文献 …… 159

第1章　随机事件与概率

1.1　内容提要

1. 随机试验

随机试验:把对现象(包括必然现象和随机现象)进行一次观察或科学试验统称为一次试验,而把具有可重复性、可观测性和随机性的试验称为随机试验.

从随机试验的定义,引入样本空间与随机事件的相关内容:

样本点:随机试验中出现的每一种最基本的结果称为样本点,用希腊字母 ω 表示.

在每次试验中,一定出现一个且只能出现一个样本点.

样本空间:由全体样本点组成的集合称为随机试验 E 的样本空间,用字母 Ω 表示.即 $\Omega=\{\omega \mid \omega\text{为} E \text{ 的可能结果}\}$.

2. 事件

随机事件:样本空间 Ω 的子集称为试验 E 的随机事件,简称事件.事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.

基本事件:只含有一个样本点的事件称为基本事件.

复合事件:由两个或两个以上基本事件复合而成的事件为复合事件.

必然事件:在每次试验中必然发生的事件称为必然事件.

不可能事件:在每次试验中都不发生的事件称为不可能事件,记作$\varnothing$.

在一次试验中,当且仅当 A 中一个样本点发生(或出现)时称为**事件 A 发生**.

事件的关系与运算:

(1) 子事件(事件的包含关系)$A\subseteq B$.

(2) 相等关系 $A=B$.

(3) 事件的和事件(并)$C=A\cup B$.

(4) 事件的积事件(交)$C=A\cap B$,或记为 $C=AB$.

(5) 差事件 $C=A-B$.

(6) 互不相容事件 $A\cap B=\varnothing$.

(7) 逆事件(对立事件) $A\cup B=\Omega,A\cap B=\varnothing$,记为 $B=\overline{A}$(或 $A=\overline{B}$).

(8) 事件的运算:

① 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

② 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

③ 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

④ 重余律

$$\overline{\overline{A}}=A;$$

⑤ 幂等律

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A;$$

⑥ 差化积

$$A-B=A\overline{B}=A-(AB);$$

⑦ 德·摩根律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

3. 事件的频率和概率

频率： 设在 n 次重复试验中，事件 A 发生 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 的频数，称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 的频率，记为 $f_n(A)$.

概率的公理化定义： 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 Ω 中的每一个事件 A，赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下述三条公理：

公理 1.1　$P(A)\geqslant 0$.

公理 1.2　$P(\Omega)=1$.

公理 1.3　若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

概率的性质：

性质 1.1　对于任一事件 A，$P(A)\leqslant 1$.

性质 1.2　（有限可加性）设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

性质 1.3　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 1.4　如果 $A\subseteq B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

性质 1.5　如果 $A\subseteq B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 1.6　（加法公式）对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

4. 古典概型和几何概型

古典概型： 如果随机试验满足下述三条：

(1) 试验只有有限个结果，即样本空间可以写成

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

(2) 基本事件$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$两两互不相容；

则称此试验为古典概型或等可能概型.

几何概型：假设一个随机试验相当于从直线、平面或空间的某一区域 G 上任取一点，而所取的点可以等可能地落在 G 中的任何一点. 设区域 G 的长度(或面积、体积)为 D，事件 A="质点落在 G 内一个长度(或面积、体积)为 d 的区域 g 内"，定义 A 的概率为

$$P(A)=\frac{d}{D}$$

称这样定义的概率为几何概率.

5. 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

条件概率：设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，我们称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 的条件概率.

乘法公式：对于任意的事件 A,B，若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(B|A)P(A).$$

全概率公式与贝叶斯公式：设试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0$　$(i=1,2,\cdots,n)$，则：

(1)（全概率公式）

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n);$$

(2)（贝叶斯公式）

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

6. 事件的独立性

定义：如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B 为相互独立的随机事件.

(1) 零概率事件与任何事件都是相互独立的；

(2) 相互独立具有对称性.

7. 伯努利(Bernoulli)模型

定义：将一个试验在相同的条件下重复进行 n 次，且每次试验的结果相互独立，则称这 n 次试验为 n 次重复独立试验. 特别，如果每次试验的可能结果只有两个：A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p,P(\overline{A})=q(0<p<1,p+q=1)$，则称这个试验为伯努利试验. 把伯努利试验重复独立进行 n 次，则称为 n 重伯努利试验，其数学模型称为伯努利模型.

二项概率公式：在 n 重伯努利试验中，每次试验事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

其中，$q=1-p$.

1.2 习题与综合练习题全解

习题 1.2

1. 写出下列试验的样本空间：

(1) 每天进出教学楼的学生人数；

(2) 投掷三枚硬币，观察正面出现的次数；

(3) 记录一个班的高等数学考试平均成绩(百分制)；

(4) 从编号为 1,2,3,4 的图书中任意抽出两本，记录抽取书的编号；

(5) 在单位圆上任意取两点，观察这两点的距离；

(6) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度.

解 (1)$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$，其样本点为无穷可列个；

(2) $\Omega=\{0,1,2,3\}$；

(3) $\Omega=\left\{\frac{i}{n}\middle| i=0,1,\cdots,100n\right\}$其中，$n$ 为小班人数；

(4) $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$；

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，$x$ 表示两点水平距离，y 表示两点的垂直距离；

(6) $\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$；$x,y,z$ 分别表示第一、二、三段长度.

2. 一射手向目标射击 3 发子弹，A_i 表示第 i 次射击打中目标($i=1,2,3$). 试用 A_1，A_2，A_3及其运算表示下列事件：

(1) 3 发子弹都打中目标；

(2) 3 发子弹都未打中目标；

(3) 3 发子弹至少有一发打中目标；

(4) 3 发子弹恰好有一发打中目标；

(5) 3 发子弹至多有一发打中目标.

解 (1) $A_1A_2A_3$；

(2) $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$；

(3) $A_1\cup A_2\cup A_3$；

(4) $A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup A_2\overline{A_1}\ \overline{A_3}\cup A_3\overline{A_1}\ \overline{A_2}$；

(5) $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_2}\ \overline{A_3}$或$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup A_2\overline{A_1}\ \overline{A_3}\cup A_3\overline{A_1}\ \overline{A_2}$.

3. 写出下列各随机试验的样本空间和各随机事件：

(1) 同时抛掷三颗骰子，记录三颗骰子的点数之和.

A=“点数之和不大于 6”；

B=“点数之和为 7 的倍数”.

(2) 一袋中装有 5 个编号为 1～5 的球，从中每次任取两个球，记录其标号. A=“两个球中最大号码为 4”；B=“两个球中有一个标号为 3”.

(3) 5 件产品中有一件为次品，每次从中任取一件，直到取到次品为止，记录抽取产

品过程. A=“第三次取到次品”.

(4) 一个高射炮向敌机进行射击,直到射中为止,记录射击次数. A=“射击次数不超过 5 次”.

解　(1) $\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$,$A=\{3,4,5,6\}$,$B=\{7,14\}$;

(2) $\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5)\\ & (2,3) & (2,4) & (2,5)\\ & & (3,4) & (3,5)\\ & & & (4,5)\end{matrix}\right\}$,

$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$,

$B=\{(1,3),(2,3),(3,4),(3,5)\}$;

(3) 把 5 件产品编号,设编号依次分别为 1,2,3,4,5,次品编号为 5,由题意,在抽出的产品中,只要抽到 5 号产品,试验就结束,则样本空间的样本点个数为

$$1+P_4^1+P_4^2+P_4^3+P_4^4=1+4+12+24+24=65,$$

$\Omega=\{(5),(1,5),\cdots,(1,2,5),\cdots,(1,2,3,5),(1,2,3,4,5),\cdots,(4,3,2,1,5)\}$,

$$A=\left\{\begin{matrix}(1,2,5) & (1,3,5) & (1,4,5)\\ (2,1,5) & (2,3,5) & (2,4,5)\\ (3,1,5) & (3,2,5) & (3,4,5)\\ (4,1,5) & (4,2,5) & (4,3,5)\end{matrix}\right\};$$

(4) $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$,$A=\{1,2,3,4,5\}$.

4. 指出下列命题中哪些成立,哪些不成立?

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$.(成立)

(2) $\overline{A}B=A\cup B$.(不成立. 因为$\overline{A}B$ 表示“事件 A 不发生,同时 B 发生”,$A\cup B$ 表示“A,B 至少有一个发生”,显然不成立)

(3) $\overline{A\cup B}C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.(不成立. $\overline{A\cup B}C$ 表示“仅有 C 发生”,$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$表示“$A,B,C$ 都不发生”)

(4) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$.(成立)

(5) 若 $A\subset B$,则 $A=AB$.(成立)

(6) 若 $AB=\varnothing$,且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$.(成立)

(7) 若 $A\subset B$,则$\overline{B}\subset\overline{A}$.(成立)

(8) 若 $B\subset A$,则 $A\cup B=A$.(成立)

5. 设 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$,$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$,具体写出下列各事件:

(1) $\overline{A}B$;

(2) $\overline{A}\cup B$;

(3) $\overline{\overline{A}\overline{B}}$;

(4) $\overline{AB}$.

解　$\overline{A}=\Omega-A=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\text{或 }1<x\leqslant 2\right\}$.

(1) $\overline{A}B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\text{或 }1<x<\frac{3}{2}\right\}$;

(2) $\overline{A}\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$;

(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}=A\cup B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$;

(4) $\overline{AB}=\Omega-AB=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\text{或 }1<x\leqslant 2\right\}$.

6. 在分别标有号码 1～10 的 10 张光盘中任取一张,设事件 A=“抽得一张号码不小于 5 的光盘”,事件 B=“抽得一张号码为偶数的光盘”,事件 C=“抽得一张号码能被 3 整除的光盘”.

(1) 写出试验的样本空间.

(2) 试将下列事件表示为样本点的集合,并分别说明下列事件的含义.

① AB;② $A\cup B$;③ $\overline{B}$;④ $A-B$;⑤ $\overline{BC}$;⑥ $\overline{B\cup C}$.

解　(1)$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,且 $A=\{5,6,7,8,9,10\}$,$B=\{2,4,6,8,10\}$,$C=\{3,6,9\}$.

(2) ①$AB=\{6,8,10\}$;②$A\cup B=\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$;③$\overline{B}=\{1,3,5,7,9\}$;④$A-B=\{5,7,9\}$;⑤$\overline{BC}=\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$;⑥$\overline{B\cup C}=\{1,5,7\}$.

习题 1.3

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(BC)=0$,$P(AB)=P(AC)=\frac{1}{16}$,求 A,B,C 都不发生的概率.

解　由于 $P(BC)=0$,且 $ABC\subset BC$,所以由概率的性质知 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(BC)=0$,即 $P(ABC)=0$. 由加法公式,得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

所以“A,B,C 都不发生的概率”为

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.$$

2. 设 A,B 为两事件,且 $P(A)=0.6$,$P(B)=0.7$:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值,最小值是多少?

解　(1) 因为 $AB\subset A$,$AB\subset B$,所以 $P(AB)\leqslant P(A)$,$P(AB)\leqslant P(B)$,$A\subset B$ 时,$P(AB)$ 最大,其值等于 $P(A)=0.6$.

(2) 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,知 $P(A\cup B)$ 最大时,$P(AB)$ 最小,当 $A\cup B=\Omega$ 时,$P(A\cup B)$ 最大,此时 $P(AB)$ 最小,为 0.3 .

3. 设 $P(A)=a$,$P(B)=b$,$P(A\cup B)=c$,求 $P(A\overline{B})$.

解　利用等式 $A=A\Omega=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$，且 $AB\cap A\overline{B}=\varnothing$ 得

$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，所以 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

又

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B),$$

所以

$$P(A\overline{B})=P(A\cup B)-P(B)=c-b.$$

4. 已知 $P(A)=0.4, P(\overline{A}B)=0.2, P(\overline{A}\overline{B}C)=0.1$，求 $P(A\cup B\cup C)$.

解　因为 $P(A)=0.4$，所以 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.6$，

又

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}B)-P(\overline{A}\,\overline{B}),$$

所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=0.6-0.4=0.4.$$

因为

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}\overline{B}C)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}),$$

故

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}C)=0.4-0.1=0.3,$$

所以

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-0.3=0.7.$$

5. 已知事件 A 与 B 的概率都是 0.5，证明 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

证明　因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，又 $\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$，$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$ 所以 $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)$，于是

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

而 $P(A)=P(B)=0.5$，所以 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

6. 设事件 A,B,C 两两互不相容，且 $P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(C)=0.4$，求 $P[(A\cup B)-C]$.

解　由于 A,B,C 两两互不相容，所以，$P(AB)=0$，

$$P[(A\cup B)-C]=P(A\cup B)=P(A)+P(A)-P(AB)=0.2+0.3=0.5.$$

习题 1.4

1. 在 0～9 这 10 个整数中任取 4 个数，求这四个数全不相同的概率.

解　由 0,1,…,9 组成的所有的四位数共有 10×10×10×10 种，四个数全不相同的种数为 P_{10}^4，则所求概率为

$$\frac{P_{10}^4}{10^4}=\frac{63}{125}.$$

2. 有 20 张不同颜色的卡片，其中黄色 11 张，绿色 5 张，红色 4 张，现从中任意抽取 9 张，问可以抽到 4 张黄色卡片、3 张绿色卡片和 2 张红色卡片的概率是多少？

解　从 20 张卡片中抽取 9 张，总的选法种数为 C_{20}^9，抽到 4 张黄色卡片、3 张绿色卡片和 2 张红色卡片的种数为 C_{11}^4, C_5^3, C_4^2，则所求概率为

$$\frac{C_{11}^{4} \cdot C_{5}^{3} \cdot C_{4}^{2}}{C_{20}^{9}} = \frac{495}{8398}.$$

3. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

解 没有一双的概率为

$$\frac{C_5^4 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21},$$

则至少有两只鞋子配成一双的概率为 $1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$.

4. 现有 1000 只电子管，其中寿命在 400h 以下的有 100 只，400～500h 的有 200 只，500～600h 的有 400 只，其余的为 600h 以上. 按有关规定，电子管寿命达到 500h 为合格品. 现从中任取 50 只，这 50 只中至少有两只合格品的概率是多少？

解 从 1000 只产品中抽取 50 只，总的抽取方法为 C_{1000}^{50}，没有一只合格品的抽取方法有 C_{300}^{50}，有 1 只合格品的抽取方法为 $C_{300}^{49} \cdot C_{700}^{1}$，则 50 只中至少有两只合格品的概率为

$$1-\frac{C_{300}^{50}+C_{300}^{49} \cdot C_{700}^{1}}{C_{1000}^{59}}.$$

5. 来自 5 个班级的 60 名学生（每班 12 人）抽取 1～60 的号码，然后按抽到的大小顺序站成 5 排（1～12 号站第一排，13～24 号站第二排，依次类推），问恰好 5 个班的学生各站一排的概率是多少？

解 60 名学生按抽到的号码顺序站成 5 排，总的站法有 60!，则恰好 5 个班的学生各站一排的概率为

$$\frac{5!(12!)^5}{60!}.$$

6. 某人将三封写好的信随机装入三个写好地址的信封中，求没有一封信装对信封的概率.

解 设 A_i＝“第 i 封信装入第 i 个信封” $(i=1,2,3)$，

A ＝“没有一封信装对地址”，

则 $\overline{A}$＝“至少有一封信装对地址”，$\overline{A}=A_1 \cup A_2 \cup A_3$，应用加法公式

$$\begin{aligned}P(\overline{A}) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\\ &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

其中

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6},$$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6},$$

代入 $P(\overline{A})$ 计算的公式中，为

$$P(\overline{A})=P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=3 \cdot \frac{1}{3}-3 \cdot \frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{2}{3},$$

于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

7. 把一根长度为 1 的木棒任意折成两段，求其中一段的长度大于另一段 2 倍的概率.

解　设折点的坐标为 x，则样本空间为

$$\Omega=\{x\mid 0<x<1\},D=|\Omega|=1,$$

设事件 A="其中一段的长度大于另一段的 2 倍"，则

$$A=\{x\in\Omega\mid 1-x>2x,\text{或 }x>2(1-x)\}=\left\{x\in\Omega\,\middle|\,0<x<\frac{1}{3}\text{ 或}\frac{2}{3}<x<1\right\}.$$

所以 A 对应的区间长度为：$d=|A|=\frac{2}{3}$，因此所求概率为

$$P(A)=\frac{d}{D}=\frac{2}{3}.$$

习题 1.5

1. 某公司收到两个工厂发来的货物 100 箱，其中一级品 70 箱，二级品 30 箱. 有 40 箱是甲厂生产的，其中一级品 25 箱，二级品 15 箱. 在运输过程中，外包装的标签全部脱落.

(1) 现从中任意搬出一箱，则这箱货物是甲厂生产的概率有多大？

(2) 若搬出的一箱是二级品，则这箱货物是甲厂生产的概率有多大？

解　(1) 设事件 A="选出的一箱货物是甲厂生产"，则

$$P(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}.$$

(2) 设事件 B="选出的一箱是二级品"，则

$$P(B)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10},P(AB)=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}.$$

所以

$$P(A\mid B)=P(AB)P(B)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}.$$

2. 一盒子装有 5 只产品，其中 3 只一等品，2 只二等品. 从中取产品 2 次，每次任取一件，做不放会抽样. 设事件 A="第一次取到的是一等品"，事件 B="第二次取到的是一等品"，试求 $P(B\mid A)$.

解

方法 1：$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P_3^2/P_5^2}{P_3^1P_4^1/P_5^2}=\dfrac{1}{2}$；

方法 2：$P(B\mid A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

3. 有 3 个箱子，分别编号为 1，2，3. 其中 1 号箱装有 1 个红球、4 个白球，2 号箱装有 2 个红球、3 个白球，3 号箱装有 3 个红球. 某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，求取得红球的概率.

解　设 B_i="球取自 i 号箱"$(i=1,2,3)$，A="取得红球"，则 B_1,B_2,B_3 构成完备事

件组，由全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+1\right)=\frac{8}{15}.$$

4. 送检的两批灯管在运输中各打碎一支，若每批 10 支，而第一批中有 1 支次品，第二批中有 2 支次品，现从剩下的灯管中任取一支，问抽得次品的概率是多少.

解 设 A_1＝“前后两批中打碎者为次，次”，

A_2＝“前后两批中打碎者次，好”，

A_3＝“前后两批中打碎者好，次”，

A_4＝“前后两批中打碎者好，好”，

B＝“抽得次品”.

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)\\&=\frac{1}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{18}+\frac{1}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{2}{18}+\frac{9}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{2}{18}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{3}{18}=\frac{3}{20}.\end{aligned}$$

5. 一个箱子中装有 100 个 U 盘，其中 5 个白色的，其余都是蓝色的. 每次随机地从箱子中拿出一个，拿出后不放回，问第三次才拿到白色 U 盘的概率是多少?

解 设事件 A_i＝“第 i 次取时拿到的是白色 U 盘” $(i=1,2,3)$. 则第三次才拿到白色 U 盘的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{5}{98}\approx 0.046.$$

6. 已知男人中有 5% 是色盲患者，女人中有 0.25% 是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少?

解 设事件 B_1＝“挑选一人为男人”，B_2＝“挑选一人为女人”，A＝“色盲”.

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(B_1|A)}{P(B_1)P(B_1|A)+P(B_2)P(B_2|A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{0.25}{100}}=\frac{20}{21}.$$

7. 一个学校收到来自三个班级分别为 10 名、15 名和 25 名学生的信息资料，其中女生分别为 3 名、7 名和 5 名. 现在随机地抽取一个班级的资料，从中抽取一份，求

(1) 抽到的一份是女生资料的概率；

(2) 已知抽取到的一份资料为男生的，问这个男生来自三个班级的概率.

解 设 B_i＝“资料是第 i 班的” $(i=1,2,3)$.

A＝“抽到的资料是男生的”.

$$P(B_i)=\frac{1}{3}\quad(i=1,2,3).$$

$$P(A|B_1)=\frac{7}{10},$$

$$P(A|B_2)=\frac{8}{15},\quad P(A|B_3)=\frac{20}{25};$$

(1) $$p=P(\overline{A})=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\overline{A}|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90};$$

(2) $P(B_1|A)=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}=\dfrac{21}{61}$;

$P(B_2|A)=\dfrac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}=\dfrac{16}{61}$;

$P(B_3|A)=\dfrac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}=\dfrac{24}{61}$.

习题 1.6

1. 设 A,B 为两个相互独立的事件，且 $P(A\cup B)=0.8$，$P(A)=0.4$，求 $P(B)$.

解　因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$，所以 $0.8=0.4+P(B)-0.4P(B)$，即 $P(B)=\dfrac{0.4}{0.6}=\dfrac{2}{3}$.

2. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性，在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出，如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况 C 发生时闭合的概率)，问

(1) 这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少?

(2) 如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统，则至少需要多少只开关并联？这里设各开关闭合都是相互独立.

解　(1) 设 A_i=“第 i 个开关闭合”$(i=1,2)$，则可靠性为

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)$$
$$=0.96+0.96-0.96\times 0.96=0.9984.$$

(2) 设至少需要 n 个，A=“系统失败”，则此系统可靠性为

$1-P(A)=1-0.04^n$，令 $1-0.04^n\geqslant 0.9999$，解得 $n=3$.

3. 一个人看管 3 台机床，设在任一时刻正常工作(不需要人看管)的概率为：第一台机床 0.95，第二台机床 0.92，第三台机床 0.85，求在任一时刻：

(1) 三台机床都正常工作的概率；

(2) 三台机床中至少有一台正常工作的概率.

解　设A=“第一台机床正常工作”，

B=“第二台机床正常工作”，

C=“第三台机床正常工作”，则

(1) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.95\times 0.92\times 0.85=0.7429$;

(2) $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-(1-0.95)(1-0.92)(1-0.85)=0.9994$.

4. 设一群人中有 37.5%的人的血型为 A 型，20.9%为 B 型，33.7%为 O 型，7.9%为 AB 型，已知能允许输血的血型配对如下表 1.1 所示，现在在一群人中任选一人为输血者，再任选一人为需要输血者，问输血能成功的概率是多少?