

Purcell and Varberg  
FOURTH EDITION

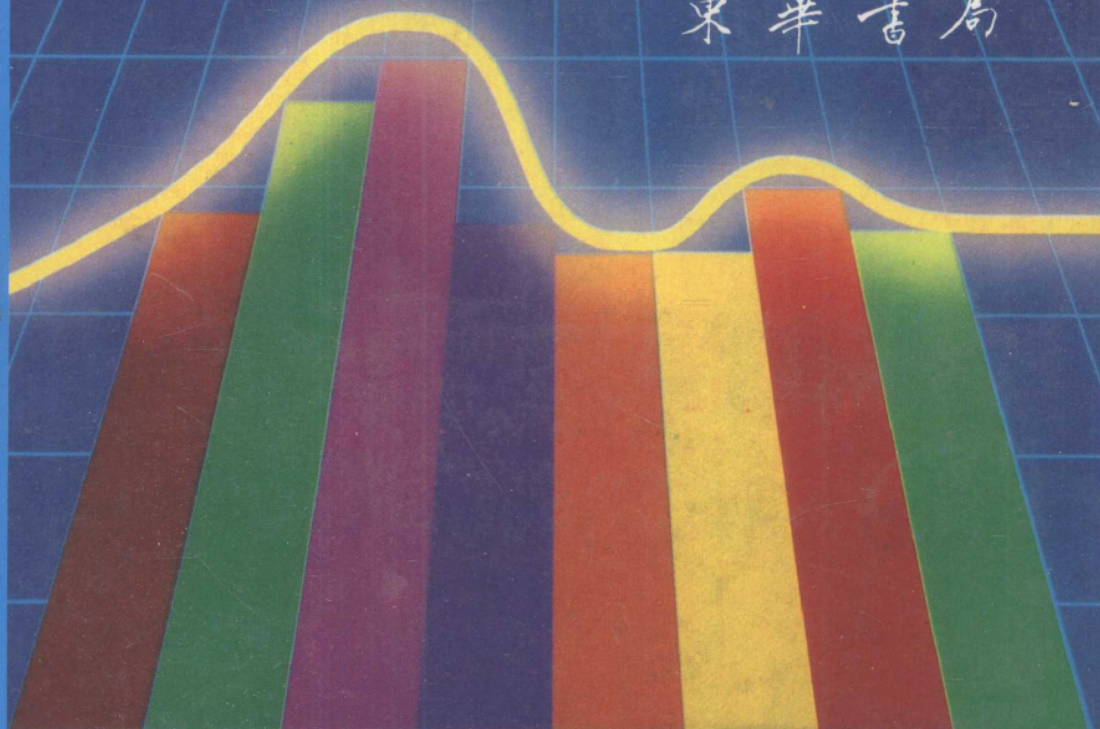
# 微積分精要

中 冊

編 者

杜書健 謝 抗

東華書局



Purcell

微

積

分

精

要

中

冊

編

者

杜

書

健

謝

抗

東

華

書

局

0172-44

19元 (三册)

PURCELL

微積分精要

1984 年第四版

中 冊

編 者

杜 書 健

謝 抗

東華書局印行



---

**版權所有·翻印必究**

中華民國七十五年四月初版

中華民國七十六年四月三版

**PURCELL 微積分精要(中冊)**

**定價 新臺幣壹佰壹拾元整**

(外埠酌加運費滙費)

編者 杜書健 謝抗  
發行人 卓 鑫 森  
出版者 臺灣東華書局股份有限公司  
臺北市博愛路一〇五號  
郵撥：00064813  
印刷者 合興印刷廠

---

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號  
(75038)

# 編輯大意

本書係根據美國亞利桑那大學 Edwin J. Purcell 教授原著 Calculus with Analytic Geometry 第四版編輯而成。原出版書局在國內授權由東南書報社印行。由於內容及深度頗適合我國學生，許多大學已競先採用為教學課本。東華書局有鑑於該書普受歡迎，特邀請數學專家整理出全書之精要大綱，附以全部習題詳解，以幫助讀者對原書能徹底瞭解與吸收。

本書章節完全依照原書之順序，先整理出一節之大綱，再解出該節之習題。題解中需要幾何圖形輔助時，均繪圖插排於適當之處。

為了閱讀攜帶方便，本書分為三冊印行；一至六章列在上冊，六至十二章為中冊而十三至十八章為下冊。

本書雖經細心排校、專家校訂，舛誤失當之處在所難免，懇望先進方家多所賜教，以匡不逮，俾再版時得以補正。

# 目 次

<b>第七章 超越函數</b> .....	1 ~ 68
7-1 自然對數函數.....	1
習題及詳解.....	1
7-2 反函數及其導數.....	8
習題及詳解.....	9
7-3 自然指數函數.....	17
習題及詳解.....	18
7-4 一般之指數與對數函 數.....	24
習題及詳解.....	24
7-5 指數型的成長期和衰 退期.....	30
7-6 反三角函數.....	37
習題及詳解.....	38
7-7 三角函數的導數.....	43
習題及詳解.....	44
7-8 雙曲 (Hyperbolic) 函數 (或稱超越函數) 及其 反函數.....	52
習題及詳解.....	53
7-9 本章複習題及詳解.....	58
<b>第八章 積分技巧</b> .....	69 ~ 132
8-1 代換積分法.....	69
習題及詳解.....	70
8-2 三角積分.....	83
習題及詳解.....	83
8-3 利用代替法有理化.....	91
習題及詳解.....	91
8-4 分部積分法.....	101
習題及詳解.....	101
8-5 有理函數之積分.....	110
習題及詳解.....	111
8-6 本章複習題及詳解.....	120
<b>第九章 不定形與廣義積分</b> .....	133 ~ 174
9-1 不定形 $\frac{0}{0}$ ..... 133	
習題及詳解.....	133
9-2 其他不定形.....	138
習題及詳解.....	138

9-3 廣義積分：無限極限 145	數為無限…………… 153
習題及詳解…………… 145	習題及詳解…………… 153
9-4 廣義積分：被積分函	9-5 本章複習題及詳解…………… 163
<b>第十章 數值的方法，近似法</b> …………… 175 ~ 227	
10-1 函數的泰勒近似法…………… 175	10-4 數值的求解方程式…………… 199
習題及詳解…………… 176	習題及詳解…………… 200
10-2 誤差的估計…………… 183	10-5 定點分法…………… 212
習題及詳解…………… 183	習題及詳解…………… 212
10-3 數值積分…………… 191	10-6 本章複習題及詳解…………… 220
習題及詳解…………… 191	
<b>第十一章 無限級數</b> …………… 228 ~ 308	
11-1 無限數列…………… 228	習題及詳解…………… 262
習題及詳解…………… 229	11-6 冪級數…………… 270
11-2 無窮級數…………… 238	習題及詳解…………… 272
習題及詳解…………… 240	11-7 冪級數的運算…………… 277
11-3 正級數：積分檢驗…………… 247	習題及詳解…………… 278
習題及詳解…………… 247	11-8 泰勒及麥可勞琳級數…………… 285
11-4 正級數：其他的檢驗…………… 253	習題及詳解…………… 286
習題及詳解…………… 254	11-9 本章複習題及詳解…………… 294
11-5 交錯級數，絕對收斂…………… 261	
<b>第十二章 圓錐曲線及極坐標</b> …………… 309 ~ 383	
12-1 拋物線…………… 309	12-4 軸的平移…………… 333
習題及詳解…………… 310	習題及詳解…………… 333
12-2 橢圓及雙曲線…………… 318	12-5 軸的旋轉…………… 339
習題及詳解…………… 319	習題及詳解…………… 339
12-3 再論橢圓及雙曲線…………… 326	12-6 極坐標系…………… 346
習題及詳解…………… 327	習題及詳解…………… 348

12-7 極方程式的圖形·····	354	習題及詳解·····	362
習題及詳解·····	355	12-9 本章複習題及詳解·····	371
12-8 極坐標中之微積分·····	362		

# 第七章 超越函數

## 7-1 自然對數函數

### 摘要

1. 定義：自然對數函數 (The natural logarithm function) 定義為

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

其定義域為大於零之所有正數。

2. 公式：
$$D_x \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u, \quad \text{設 } u = f(x) \text{ 爲 } x \text{ 之函數}$$

$$D_x \ln |x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

3. 定理 A：

(1)  $\ln 1 = 0$

(2)  $\ln ab = \ln a + \ln b$

(3)  $\ln \left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

(4)  $\ln a^r = r \ln a$

此地  $a, b$  爲正數， $r$  爲有理數。

### 習題

1. 用定理 A 之性質和  $\ln 2 \approx 0.693$  及  $\ln 3 \approx 1.099$  之近似值計算下列各題之近似值。

(a)  $\ln 6$       (b)  $\ln 1.5$       (c)  $\ln 81$       (d)  $\ln \sqrt{2}$       (e)  $\ln(1/36)$       (f)  $\ln 48$



解：(a)  $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 \approx 1.792$

(b)  $\ln 1.5 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2 \approx 0.406$

(c)  $\ln 81 = \ln 3^4 = 4(\ln 3) \approx 4.396$

(d)  $\ln(\sqrt{2}) = \ln 2^{1/2} = 1/2 \ln 2 \approx 0.346$

(e)  $\ln \frac{1}{36} = \ln 1 - \ln 36 = 0 - \ln(4 \times 9) = -(\ln 4 + \ln 9)$   
 $= -2(\ln 2 + \ln 3) \approx -3.584$

(f)  $\ln 48 = \ln 3 + 4 \ln 2 \approx 3.871$

2. 用您的計算機直接計算第 1 題中各式之值。

解：(a) 1.792      (b) 0.405      (c) 4.394      (d) 0.347      (e) -3.584  
 (f) 3.871

假設任何情況之  $x$  受限制使  $\ln x$  有定義，求下列所給 3 ~ 14 各題之導數。

3.  $D_x \ln(x^2 - 5x + 6)$

解： $D_x \ln(x^2 - 5x + 6) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$

4.  $D_x \ln(2x^3 + 1)$

解： $D_x \ln(2x^3 + 1) = \frac{6x^2}{2x^3 + 1}$

5.  $D_x \ln(x - 5)^4$

解： $D_x \ln(x - 5)^4 = \frac{4}{x - 5}$

6.  $D_x \ln \sqrt{3x - 25}$

解： $D_x \ln \sqrt{3x - 25} = \frac{1}{2} \frac{3}{3x - 25} = \frac{3}{2(3x - 25)}$

7.  $\frac{dy}{dx}$  if  $y = x \ln x$

解： $y = x \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$

8.  $\frac{dy}{dx}$  if  $y = \frac{\ln x}{x^2}$

解： $y = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \ln x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$

9.  $\frac{dy}{dx}$  if  $y = \ln x^3 + (\ln x)^3$

$$\text{解} : y = \ln x^3 + (\ln x)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3} + 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x} + \frac{3(\ln x)^2}{x}$$

10.  $\frac{dy}{dx}$  if  $y = \frac{1}{\ln x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\text{解} : y = \frac{1}{\ln x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = (\ln x)^{-1} + \ln 1 - \ln x = (\ln x)^{-1} - \ln x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (-1)(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \left( \frac{1}{\ln^2 x} + 1 \right)$$

11.  $f'(x)$  if  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$\text{解} : \text{if } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x + (x^2 - 1)^{1/2}} \left( 1 + \frac{1}{2(x^2 - 1)^{1/2}} \cdot 2x \right) = (x^2 - 1)^{-1/2}$$

12.  $f'(x)$  if  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$\text{解} : \text{if } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x + (x^2 + 1)^{1/2}} \left( 1 + \frac{1}{2(x^2 + 1)^{1/2}} \cdot 2x \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

13.  $f'(100)$  if  $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$

$$\text{解} : f(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) = \ln x^{1/3} = \frac{1}{3} \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x}$$

$$\therefore f'(100) = \frac{1}{300}$$

14.  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$  if  $f(x) = \ln(\sin x)$

$$\text{解} : f(x) = \ln(\sin x) \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

於 15 ~ 22 題中，求各積分：

15.  $\int \frac{4}{2x+1} dx$

$$\text{解} : \text{原式} = 2 \ln |2x+1| + C$$

16.  $\int \frac{2}{4x-3} dx$

$$\text{解} : \text{原式} = (1/2) \ln |4x-3| + C$$

$$17. \int \frac{4x+2}{x^2+x+5} dx$$

$$\text{解：原式} = 2 \int \frac{2x+1}{x^2+x+5} dx = 2 \ln|x^2+x+5| + C$$

$$18. \int \frac{x}{x^2+4} dx$$

$$\text{解：原式} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C$$

$$19. \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\text{解：原式} = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

$$20. \int \frac{2}{x(\ln x)^2} dx$$

$$\text{解：原式} = -\frac{2}{\ln x} + C$$

$$21. \int_0^3 \frac{x^3}{x^4+1} dx$$

$$\text{解：原式} = \frac{1}{4} \int_0^3 \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) \Big|_0^3 = \frac{1}{4} \ln 82$$

$$22. \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$$

$$\text{解：原式} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2)$$

於 23 ~ 26 題中，用定理 A 寫出對數  $\ln$  之單一表示法：

$$23. 2 \ln(x+1) - \ln x$$

$$\text{解：原式} = \ln(x+1)^2 - \ln x = \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right)$$

$$24. \frac{1}{2} \ln(x-9) + \frac{1}{2} \ln x$$

$$\text{解：原式} = \frac{1}{2} (\ln(x-9) + \ln x) = \frac{1}{2} \ln(x^2-9x)$$

$$25. \ln(x-2) - \ln(x+2) + 2 \ln x$$

$$\text{解：原式} = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + \ln x^2 = \ln\left(\frac{x^3-2x^2}{x+2}\right)$$

$$26. \ln(x^2 - 9) - 2 \ln(x - 3) - \ln(x + 3)$$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \ln\left(\frac{x^2 - 9}{(x - 3)^2(x + 3)}\right) = \ln\left(\frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)^2(x + 3)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x - 3}\right) = -\ln(x - 3) \end{aligned}$$

於 27 ~ 30 題中，利用對數微分求  $\frac{dy}{dx}$ ：

$$27. y = \frac{x + 11}{\sqrt{x^3 - 4}}$$

$$\begin{aligned} \text{解：} y &= \frac{x + 11}{\sqrt{x^3 - 4}} \Rightarrow \ln y = \ln(x + 11) - \ln(x^3 - 4)^{1/2} \\ &= \ln(x + 11) - \frac{1}{2} \ln(x^3 - 4) \\ \therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x + 11} - \frac{3x^2}{2(x^3 - 4)} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + 33x^2 + 8}{-2(x^3 - 4)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$28. y = (x^2 + 3x)(x - 2)(x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{解：} \ln y &= \ln(x^2 + 3x) + \ln(x - 2) + \ln(x^2 + 1) \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} + \frac{1}{x - 2} + \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 3x)(x - 2)(x^2 + 1) \left[ \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} + \frac{1}{x - 2} + \frac{2x}{x^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

$$29. y = \frac{\sqrt{x + 13}}{(x - 4)\sqrt[3]{2x + 1}}$$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} \Rightarrow \ln y &= \ln\sqrt{x + 13} - \ln(x - 4) - \ln\sqrt[3]{2x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x + 13) - \ln(x - 4) - \frac{1}{3} \ln(2x + 1) \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2(x + 13)} - \frac{1}{x - 4} - \frac{2}{3(2x + 1)} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{x + 13}}{(x - 4)\sqrt[3]{2x + 1}} \left( \frac{1}{2(x + 13)} - \frac{1}{x - 4} - \frac{2}{3(2x + 1)} \right) \\ &= \frac{-10x^2 - 219x + 118}{6(x + 13)^{1/2}(x - 4)^2(2x + 1)^{4/3}} \end{aligned}$$

$$30. y = \frac{(x^2 + 3)^{2/3}(3x + 2)^2}{\sqrt{x + 1}}$$

解：原式  $\Rightarrow \ln y = \frac{2}{3} \ln(x^2 + 3) + 2 \ln(3x + 2) - \frac{1}{2} \ln(x + 1)$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \left( \frac{2x}{x^2 + 3} \right) + 2 \left( \frac{3}{3x + 2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x + 1} \right)$$

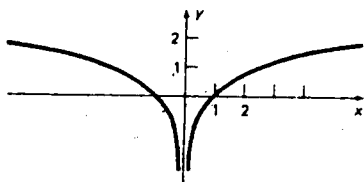
$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{4x}{3(x^2 + 3)} + \frac{6}{3x + 2} - \frac{1}{2(x + 1)} \right]$$

$$= \frac{(51x^3 + 70x^2 + 97x + 90)(3x + 2)}{6(x^2 + 3)^{1/3}(x + 1)^{3/2}}$$

於 31 ~ 34 題中，利用  $y = \ln x$  之圖形作下列各方程式之圖。

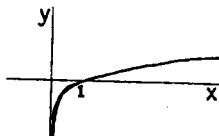
31.  $y = \ln|x|$

解：對稱  $y$  軸。



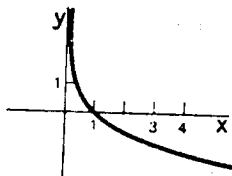
32.  $y = \ln\sqrt{x}$

解： $y = (1/2) \ln x$



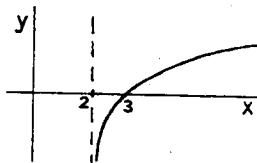
33.  $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

解： $y = -\ln x$  對  $x$  軸而言恰為  $y = \ln x$  之鏡像。



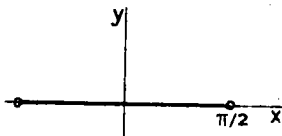
34.  $y = \ln(x - 2)$

解： $y = \ln(x - 2)$  為  $y = \ln x$  向右邊平移兩個單位。



35. 作  $y = \ln \cos x + \ln \sec x$  在  $(-\pi/2, \pi/2)$  之圖，並在作圖之前詳細考慮它。

解：



$$\therefore y = \ln(\cos x \cdot \sec x)$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

36. 解釋為什麼  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = 0$ 。

解： $\because \ln x$  為連續函數

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = \ln(1) = 0$$

37. 求  $f(x) = 2x^2 \ln x - x^2$  在其定義域上之局部極值。

解：其定義域為  $(0, \infty)$

$$f'(x) = 2x^2 \cdot \frac{1}{x} + 4x \ln x - 2x = 4x \ln x = 0 \quad \text{若 } x = 1 \quad (\because x \neq 0)$$

$$f''(x) = 4x \cdot \frac{1}{x} = 4 > 0$$

$\therefore f(1)$  為局部極小值。

38. 觀察電報纜線之輸送率為與  $x^2 \ln(\frac{1}{x})$  成比率，此處之  $x$  為絕緣厚度與線之半徑之比 ( $0 < x < 1$ )，問  $x$  為何值時，有最大之輸送率？

解：令輸送率為  $T(x) = k^2 x^2 \ln(\frac{1}{x}) = -k^2 x^2 \ln x, k > 0$

$$\therefore T'(x) = -kx(1 + 2 \ln x)$$

$$T'(x) = 0, \ln x = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } x = e^{-1/2}$$

$$T''(x) = -k(3 + \ln x)$$

$$T''(e^{-1/2}) = -k(3 + \ln e^{-1/2}) = -k(3 - \frac{1}{2}) < 0$$

故在  $\ln x = -\frac{1}{2}$  (即  $x = e^{-1/2}$ ) 為極大值。

39. 用  $\ln 4 > 1$  之事實，試證  $4^m > m$  ( $m > 0$ )。當  $x$  為充分大時， $\ln x$  亦可為任意大值，則  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$  之含意為何？

解： $\ln 4 > 1 \Leftrightarrow m \ln 4 > m \Leftrightarrow \ln 4^m > m$  ( $m > 0$ )

給任一  $m > 0$ ， $\ln x > m$  對所有  $x > 4^m$  而言，因  $\ln x$  為漸增函數。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

40. 利用  $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$  之事實及 39 題，證明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ 。

證： $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-\ln \frac{1}{x}] = \lim_{z \rightarrow \infty} (-\ln z) = -\infty$

41. 若  $\int_{1/3}^x \frac{1}{t} dt = 2 \int_1^x \frac{1}{t} dt$ ，求  $x$  值。

解： $\ln x - \ln(1/3) = 2 \ln x \Rightarrow \ln x = \ln 3, \therefore x = 3$

42. 證明：

(a) 當  $t > 1$ ，從  $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$ ，證明  $\ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$ ， $x > 1$ 。

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

證：(a)  $t > 1 \Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x t^{-1/2} dt \Rightarrow \ln x < [2\sqrt{t}]_1^x$   
 $\Rightarrow \ln x < 2(\sqrt{x} - 1) \quad (x > 1)$

$$(b) \text{對 } x > 1, 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

43. 計算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$ ，可利用  $\left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots \right.$

$\left. + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right] \frac{1}{n}$  求之。

$$\begin{aligned} \text{解：} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] \\ = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

44. 一個著名的定理（質數定理）敘述為當  $n$  相當大，質數的數目小於  $n$  且接近  $\frac{n}{\ln n}$ ，問小於 1,000,000 之質數有多少？

$$\text{解：} \frac{1000000}{\ln(1000000)} \approx 72382$$

## 7-2 反函數及其導數

### 摘 要

1. 定義：若  $x_1 \neq x_2$ ，則  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，則稱  $f(x)$  為一對一函數。

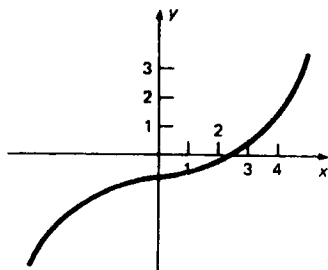
2. 定理 A：若  $f(x)$  為嚴格遞增函數，則  $f(x)$  有反函數。  
 3. 定理 B：(反函數定理) 令  $f$  為可微分及嚴格單調函數於定義域  $I$  中，若  $f'(x) \neq 0$  於  $I$  中之  $x$  點，則  $f^{-1}$  為對應於  $y = f(x)$  之點可微分，並且

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

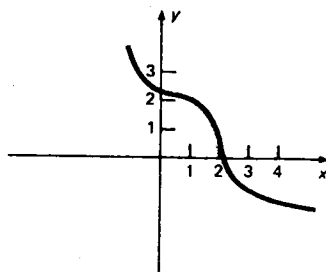
## 習題

於 1~6 題， $y = f(x)$  之圖如下列所示，在這種情況下決定  $f(x)$  是否有反函數，若有反函數的話，並且估計  $f^{-1}(2)$  之值。

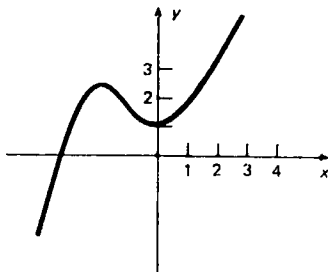
1.



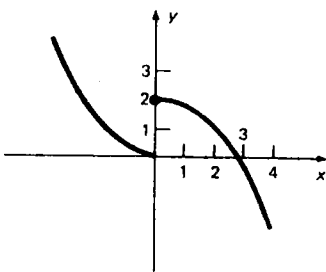
2.



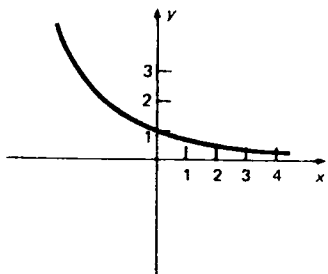
3.



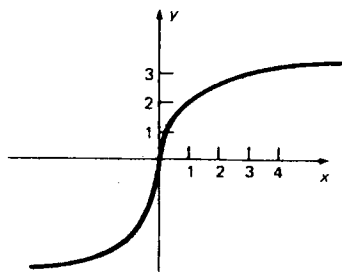
4.



5.



6.



解：1. 有反函數， $f^{-1}(2) \approx 4.3$ 。



2. 有反函數,  $f^{-1}(2) \approx 1.2$ 。

3.  $\because f(x) = 2$  之  $n$  有三個值,  $\therefore$  沒有反函數。

4. 沒有反函數。

5. 有反函數,  $f^{-1}(2) \approx -1.8$ 。

6. 有反函數,  $f^{-1}(2) \approx 1$ 。

於 7 ~ 14 題, 利用其嚴格單調函數之方法, 證明有反函數。

7.  $f(x) = -3x^5 - x$

解:  $f'(x) = -15x^4 - 1 < 0$ 。  $\therefore f$  為遞減函數, 有反函數。

8.  $f(x) = x^7 + 5x^3$

解:  $f'(x) = 7x^2 + 15x^2 > 0$ 。  $\therefore f$  為遞增函數, 有反函數。

9.  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

解:  $f'(x) = \sec^2 x > 0, \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 遞增, 有反函數。

10.  $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$

解:  $f'(x) = -\sin x < 0, \forall x \in (0, \pi)$ ,  $f$  在  $[0, \pi]$  為遞減, 所以有反函數。

11.  $f(x) = (x+1)^2, x \leq -1$

解:  $f'(x) = 2(x+1) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$ , 為遞減, 所以有反函數。

12.  $f(x) = x^2 + x + 5, \forall x \geq -\frac{1}{2}$

解:  $f'(x) = 2x + 1 > 0, \forall x \in [-\frac{1}{2}, \infty)$ , 為遞增, 所以有反函數。

13.  $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 2} dt$

解:  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} > 0, \forall x \in R$ ,  $\therefore f$  為遞增函數, 有反函數。

14.  $f(x) = \int_1^x \sin^4 t dt$

解:  $f'(x) = \sin^4 x > 0, x \neq n\pi$

$f(x) = 0, x = n\pi$ , 故  $f$  為遞增函數, 有反函數。

於 15 ~ 28 題中, 求一個  $f^{-1}(x)$  之式子, 並證明  $f^{-1}(f(x)) = x$  且  $f(f^{-1}(x)) = x$ 。

15.  $f(x) = 3x - 1$

解: 令  $y = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{(x+1)}{3} = (x+1)/3$