Purcell and Varberg

FOURTH EDITION

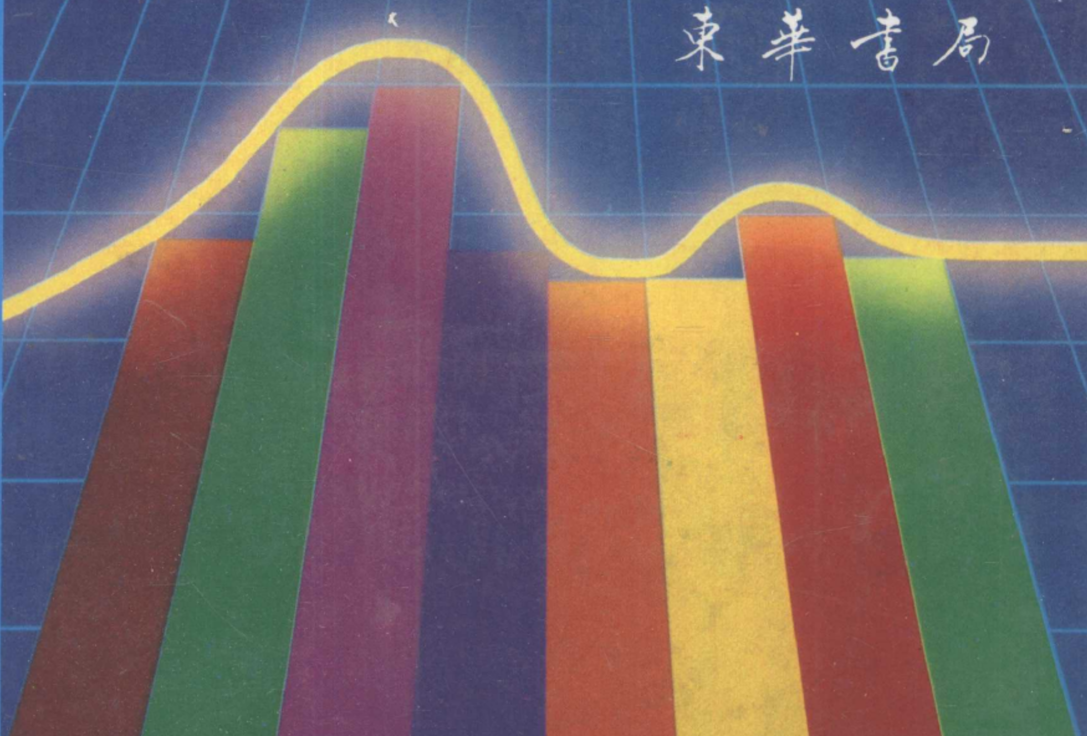
微積分精要

中　冊

編　者

杜書健　謝　抗

東華書局



Purcell

杜書健

PURCELL

微積分精要

1984年第四版

中 冊

編 者

杜 書 健

謝 抗

東華書局印行

版權所有・翻印必究

中華民國七十五年四月 初版
中華民國七十六年四月 三版

PURCELL 微積分精要（中 冊）

定價 新臺幣壹佰壹拾元整
（外埠酌加運費匯費）

編 者 杜書健 謝抗
發行人 卓鑫淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
郵撥：00064813
印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（75038）

編 輯 大 意

本書係根據美國亞利桑那大學 Edwin J. Purcell 教授原著 Calculus with Analytic Geometry 第四版編輯而成。原出版書局在國內授權由東南書報社印行。由於內容及深度頗適合我國學生，許多大學已競先採用爲教學課本。東華書局有鑑於該書普受歡迎，特邀請數學專家整理出全書之精要大綱，附以全部習題詳解，以幫助讀者對原書能徹底瞭解與吸收。

本書章節完全依照原書之順序，先整理出一節之大綱，再解出該節之習題。題解中需要幾何圖形輔助時，均繪圖插排於適當之處。

爲了閱讀攜帶方便，本書分爲三册印行；一至六章列在上册，六至十二章爲中册而十三至十八章爲下册。

本書雖經細心排校、專家校訂，舛誤失當之處在所難免，懇望先進方家多所賜教，以匡不逮，俾再版時得以補正。

目　次

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第七章　超越函數

7-1　自然對數函數

摘　要

1. 定義：自然對數函數（The natural logarithm function）定義爲

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

其定義域爲大於零之所有正數。

2. 公式：

$$D_x \ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u, \qquad \text{設 } u = f(x) \text{ 爲 } x \text{ 之函數}$$

$$D_x \ln |x| = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

3. 定理A：
(1) $\ln 1 = 0$
(2) $\ln ab = \ln a + \ln b$
(3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
(4) $\ln a^r = r \ln a$
此地 a，b 爲正數，r 爲有理數。

習　題

1. 用定理A之性質和 $\ln 2 \approx 0.693$ 及 $\ln 3 \approx 1.099$ 之近似值計算下列各題之近似值。
(a) $\ln 6$　(b) $\ln 1.5$　(c) $\ln 81$　(d) $\ln \sqrt{2}$　(e) $\ln(1/36)$　(f) $\ln 48$

解：(a) $\ln 6 = \ln(2\times 3) = \ln 2 + \ln 3 \approx 1.792$

(b) $\ln 1.5 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2 \approx 0.406$

(c) $\ln 81 = \ln 3^4 = 4(\ln 3) \approx 4.396$

(d) $\ln(\sqrt{2}) = \ln 2^{1/2} = 1/2 \ln 2 \approx 0.346$

(e) $\ln \frac{1}{36} = \ln 1 - \ln 36 = 0 - \ln(4\times 9) = -(\ln 4 + \ln 9)$

$= -2(\ln 2 + \ln 3) \approx -3.584$

(f) $\ln 48 = \ln 3 + 4\ln 2 \approx 3.871$

2. 用您的計算機直接計算第 1 題中各式之值。

解：(a) 1.792　(b) 0.405　(c) 4.394　(d) 0.347　(e) − 3.584
(f) 3.871

假設任何情況之 x 受限制使 $\ln x$ 有定義，求下列所給 3～14 各題之導數。

3. $D_x \ln(x^2 - 5x + 6)$

解：$D_x \ln(x^2 - 5x + 6) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$

4. $D_x \ln(2x^3 + 1)$

解：$D_x \ln(2x^3+1) = \dfrac{6x^2}{2x^3+1}$

5. $D_x \ln(x-5)^4$

解：$D_x \ln(x-5)^4 = \dfrac{4}{x-5}$

6. $D_x \ln\sqrt{3x-25}$

解：$D_x \ln\sqrt{3x-25} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{3x-25} = \dfrac{3}{2(3x-25)}$

7. $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = x\ln x$

解：$y = x\ln x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

8. $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

解：$y = \dfrac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

9. $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = \ln x^3 + (\ln x)^3$

解：$y = \ln x^3 + (\ln x)^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{x^3} + 3(\ln x)^2 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{3(\ln x)^2}{x}$

10. $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = \dfrac{1}{\ln x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

解：$y = \dfrac{1}{\ln x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = (\ln x)^{-1} + \ln 1 - \ln x = (\ln x)^{-1} - \ln x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = (-1)(\ln x)^{-2}\,\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{x}\left(\dfrac{1}{\ln^2 x} + 1\right)$

11. $f'(x)$ if $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

解：if $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x + (x^2-1)^{1/2}}\left(1 + \dfrac{1}{2(x^2-1)^{1/2}} \cdot 2x\right) = (x^2 - 1)^{-1/2}$

12. $f'(x)$ if $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

解：if $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x + (x^2+1)^{1/2}}\left(1 + \dfrac{1}{2(x^2+1)^{1/2}} \cdot 2x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

13. $f'(100)$ if $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$

解：$f(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) = \ln x^{1/3} = \dfrac{1}{3}\ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3x}$

$\therefore \quad f'(100) = \dfrac{1}{300}$

14. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ if $f(x) = \ln(\sin x)$

解：$f(x) = \ln(\sin x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

$\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

於 15 ～ 22 題中，求各積分：

15. $\displaystyle\int \frac{4}{2x+1}\,dx$

解：原式 $= 2\ln|2x+1| + C$

16. $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\,dx$

解：原式 $=(1/2)\ln|4x-3| + C$

17. $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5}dx$

解：原式 $= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}dx = 2\ln|x^2+x+5| + C$

18. $\int \frac{x}{x^2+4}dx$

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$

19. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

解：原式 $= \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

20. $\int \frac{2}{x(\ln x)^2}dx$

解：原式 $= -\frac{2}{\ln x} + C$

21. $\int_0^3 \frac{x^3}{x^4+1}dx$

解：原式 $= \frac{1}{4}\int_0^3 \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)\Big|_0^3 = \frac{1}{4}\ln 82$

22. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$

解：原式 $= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

於 23～26 題中，用定理A寫出對數 ln 之單一表示法：

23. $2\ln(x+1) - \ln x$

解：原式 $= \ln(x+1)^2 - \ln x = \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right)$

24. $\frac{1}{2}\ln(x-9) + \frac{1}{2}\ln x$

解：原式 $= \frac{1}{2}(\ln(x-9) + \ln x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-9x)$

25. $\ln(x-2) - \ln(x+2) + 2\ln x$

解：原式 $= \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + \ln x^2 = \ln\left(\frac{x^3-2x^2}{x+2}\right)$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

26. $\ln(x^2-9)-2\ln(x-3)-\ln(x+3)$

解：原式 $=\ln\left(\dfrac{x^2-9}{(x-3)^2(x+3)}\right)=\ln\left(\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}\right)$

$=\ln\left(\dfrac{1}{x-3}\right)=-\ln(x-3)$

於 27 ～ 30 題中，利用對數微分求 $\dfrac{dy}{dx}$ ：

27. $y=\dfrac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$

解：$y=\dfrac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}\Rightarrow \ln y=\ln(x+11)-\ln(x^3-4)^{1/2}$

$=\ln(x+11)-\dfrac{1}{2}\ln(x^3-4)$

$\therefore\ \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+11}-\dfrac{3x^2}{2(x^3-4)}\qquad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3+33x^2+8}{-2(x^3-4)^{3/2}}$

28. $y=(x^2+3x)(x-2)(x^2+1)$

解：$\ln y=\ln(x^2+3x)+\ln(x-2)+\ln(x^2+1)$

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3}{x^2+3x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=(x^2+3x)(x-2)(x^2+1)\left[\dfrac{2x+3}{x^2+3x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2x}{x^2+1}\right]$

29. $y=\dfrac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}$

解：原式 $\Rightarrow \ln y=\ln\sqrt{x+13}-\ln(x-4)-\ln\sqrt[3]{2x+1}$

$=\dfrac{1}{2}\ln(x+13)-\ln(x-4)-\dfrac{1}{3}\ln(2x+1)$

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(x+13)}-\dfrac{1}{(x-4)}-\dfrac{2}{3(2x+1)}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}\left(\dfrac{1}{2(x+13)}-\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{3(2x+1)}\right)$

$=\dfrac{-10x^2-219x+118}{6(x+13)^{1/2}(x-4)^2(2x+1)^{4/3}}$

30. $y=\dfrac{(x^2+3)^{2/3}(3x+2)^2}{\sqrt{x+1}}$

解：原式 $\Rightarrow$ $\ln y = \frac{2}{3}\ln(x^2+3) + 2\ln(3x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) + 2\left(\frac{3}{3x+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

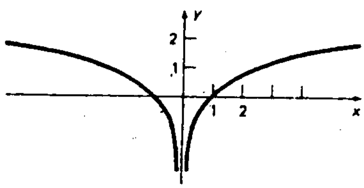
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{4x}{3(x^2+3)} + \frac{6}{3x+2} - \frac{1}{2(x+1)}\right]$$

$$= \frac{(51x^3+70x^2+97x+90)(3x+2)}{6(x^2+3)^{1/3}(x+1)^{3/2}}$$

於 31 ～34 題中，利用 $y=\ln x$ 之圖形作下列各方程式之圖。

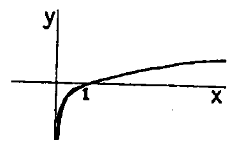
31. $y = \ln|x|$

解：對稱 y 軸。



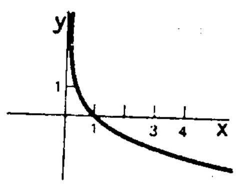
32. $y = \ln\sqrt{x}$

解：$y = (1/2)\ln x$



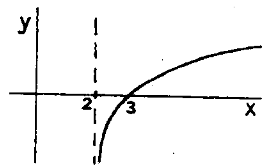
33. $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

解：$y = -\ln x$ 對 x 軸而言恰爲 $y=\ln x$ 之鏡像。



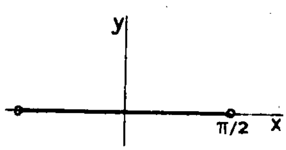
34. $y = \ln(x-2)$

解：$y=\ln(x-2)$ 爲 $y=\ln x$ 向右邊平移兩個單位。



35. 作 $y = \ln\cos x + \ln\sec x$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 之圖，並在作圖之前詳細考慮它。

解：



$\because\ y = \ln(\cos x \cdot \sec x)$

$= \ln(1)$

$= 0$

36. 解釋爲什麼 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x} = 0$。

解：$\because$ $\ln x$ 爲連續函數

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

37. 求 $f(x)=2x^2\ln x-x^2$ 在其定義域上之局部極值。

解：其定義域為 $(0,\infty)$

$$f'(x)=2x^2\frac{1}{x}+4x\ln x-2x=4x\ln x=0 \qquad \text{若} x=1\ (\because x\neq 0)$$

$$f''(x)=4x\cdot\frac{1}{x}=4>0$$

$\therefore$ $f(1)$ 為局部極小值。

38. 觀察電報纜線之輸送率為與 $x^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ 成比率，此處之 x 為絕緣厚度與線之半徑之比 $(0<x<1)$，問 x 為何值時，有最大之輸送率？

解：令輸送率為 $T(x)=k^2x^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-k^2x^2\ln x$，$k>0$

$$\therefore\quad T'(x)=-kx(1+2\ln x)$$

$$T'(x)=0\ ,\ \ln x=-\frac{1}{2}\text{，即 } x=e^{-1/2}$$

$$T''(x)=-k(3+\ln x)$$

$$T''(e^{-1/2})=-k(3+\ln e^{-1/2})=-k\left(3-\frac{1}{2}\right)<0$$

故在 $\ln x=-\frac{1}{2}$（即 $x=e^{-1/2}$）為極大值。

39. 用 $\ln 4>1$ 之事實，試證 $4^m>m\ (m>0)$。當 x 為充分大時，$\ln x$ 亦可為任意大值，則 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x$ 之含意為何？

解：$\ln 4>1 \Leftrightarrow m\ln 4>m \Leftrightarrow \ln 4^m>m\ (m>0)$
給任一 $m>0$，$\ln x>m$ 對所有 $x>4^m$ 而言，因 $\ln x$ 為漸增函數。

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$$

40. 利用 $\ln x=-\ln\frac{1}{x}$ 之事實及 39 題，證明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$。

證：$\lim\limits_{n\to 0^+}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\ln\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{z\to\infty}(-\ln z)=-\infty$

41. 若 $\int_{1/3}^{x}\frac{1}{t}\,dt=2\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt$，求 x 值。

解：$\ln x-\ln(1/3)=2\ln x \Rightarrow \ln x=\ln 3$，$\therefore x=3$

42. 證明：

(a)當 $t>1$，從 $\frac{1}{t}<\frac{1}{\sqrt{t}}$，證明 $\ln x<2(\sqrt{x}-1)$，$x>1$。

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

證：(a) $t>1 \Rightarrow \frac{1}{t}<\frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}\,dt<\int_1^x t^{-1/2}\,dt \Rightarrow \ln x<[2\sqrt{t}]^x$

$\Rightarrow \ln x<2(\sqrt{x}-1) \quad (x>1)$

(b)對 $x>1$，$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}0=0$， $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\right)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

43. 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right]$，可利用 $\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}$ 求之。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right]$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2$

44. 一個著名的定理（質數定理）敍述爲當 n 相當大，質數的數目小於 n 且接近 $\frac{n}{\ln n}$，問小於 1,000,000 之質數有多少？

解：$\frac{1000000}{\ln(1000000)}\approx 72382$

7-2 反函數及其導數

摘 要

1. 定義：若 $x_1\neq x_2$，則 $f(x_1)\neq f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 爲一對一函數。

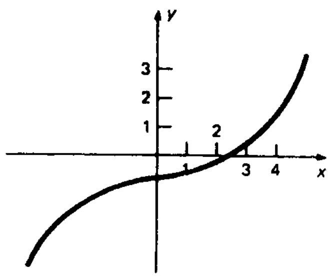
2. 定理A：若 $f(x)$ 爲嚴格遞增函數，則 $f(x)$ 有反函數。
3. 定理B：（反函數定理）令 f 爲可微分及嚴格單調函數於定義域 I 中，若 $f'(x) \neq 0$ 於 I 中之 x 點，則 f^{-1} 爲對應於 $y = f(x)$ 之點可微分，並且

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

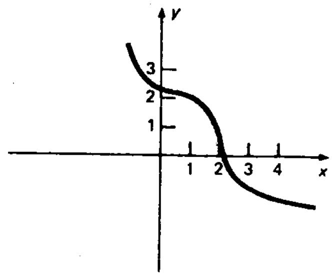
習　　題

於 1～6 題，$y = f(x)$ 之圖如下列所示，在這種情況下決定 $f(x)$ 是否有反函數，若有反函數的話，並且估計 $f^{-1}(2)$ 之值。

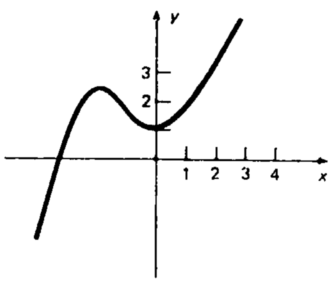
1.



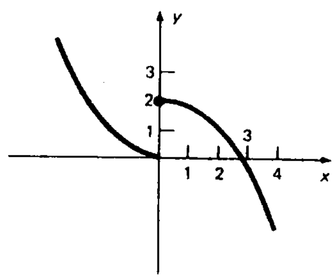
2.



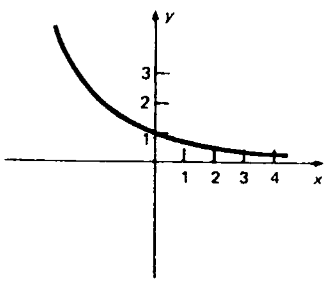
3.



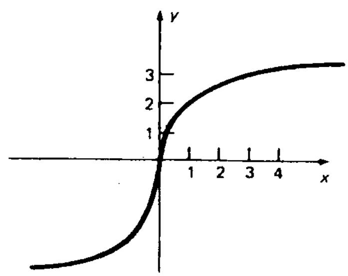
4.



5.



6.



解：1.有反函數，$f^{-1}(2) \approx 4.3$。

2. 有反函數，$f^{-1}(2)\approx 1.2$。

3. $\because f(x)=2$ 之 n 有三個值，$\therefore$ 沒有反函數。

4. 沒有反函數。

5. 有反函數，$f^{-1}(2)\approx -1.8$。

6. 有反函數，$f^{-1}(2)\approx 1$。

於 7～14 題，利用其嚴格單調函數之方法，證明有反函數。

7. $f(x)=-3x^5-x$

解：$f'(x)=-15x^4-1<0$。$\therefore f$ 爲遞減函數，有反函數。

8. $f(x)=x^7+5x^3$

解：$f'(x)=7x^2+15x^2>0$。$\therefore f$ 爲遞增函數，有反函數。

9. $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$

解：$f'(x)=\sec^2 x>0$，$\forall x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，遞增，有反函數。

10. $f(x)=\cos x,\ 0\leq x\leq\pi$

解：$f'(x)=-\sin x<0$，$\forall x\in(0,\pi)$，f 在 $[0,\pi]$ 爲遞減，所以有反函數。

11. $f(x)=(x+1)^2,\ x\leq -1$

解：$f'(x)=2(x+1)<0$，$\forall x\in(-\infty,-1)$，爲遞減，所以有反函數。

12. $f(x)=x^2+x+5$，$\forall x\geq -\dfrac{1}{2}$

解：$f'(x)=2x+1>0$，$\forall x\in[-\dfrac{1}{2},\infty)$，爲遞增，所以有反函數。

13. $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+2}\,dt$

解：$f'(x)=\sqrt{x^2+2}>0$，$\forall x\in R$，$\therefore f$ 爲遞增函數，有反函數。

14. $f(x)=\displaystyle\int_1^x \sin^4 t\ dt$

解：$f'(x)=\sin^4 x>0$，$x\neq n\pi$

$f(x)=0$，$x=n\pi$，故 f 爲遞增函數，有反函數。

於 15～28 題中，求一個 $f^{-1}(x)$ 之式子，並證明 $f^{-1}(f(x))=x$ 且 $f(f^{-1}(x))=x$。

15. $f(x)=3x-1$

解：令 $y=3x-1\ \Rightarrow\ x=\dfrac{y+1}{3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{(x+1)}{3}=(x+1)/3$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com