王后雄学案

教材完全解读

选修·专题

高中数学　选修1-1

丛书主编：王后雄
本册主编：余国清

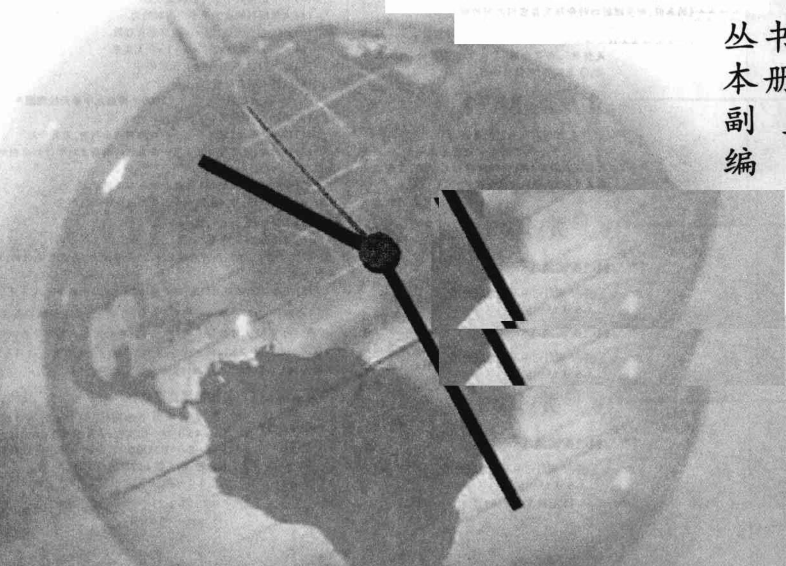
小熊图书
接力出版社 Jieli Publishing House
全国优秀出版社 SPLENDID PUBLISHING HOUSE IN CHINA

王后雄学案

教材完全解读

选修·专题

高中数学　选修1-1



丛书主编：王后雄
本册主编：余国清
副 主 编：汪红燕
编　　委：余国清　汪红燕
何　涛　张　川
李　欢　王　涛
张　贵　孙建华
李和平　谢世民

小熊图书
接力出版社 Jieli Publishing House
全国优秀出版社 SPLENDID PUBLISHING HOUSE IN CHINA

丛书策划：熊　辉
责任编辑：吴惠娟
责任校对：覃灿均
封面设计：木头羊

JIAOCAI WANQUAN JIEDU
GAOZHONG SHUXUE
教材完全解读
高中数学　选修1-1
丛书主编：王后雄　本册主编：余国清
*
社　长：黄　俭　总编辑：白　冰
接力出版社出版发行
广西南宁市园湖南路9号　邮编：530022
E-mail：jielipub@public.nn.gx.cn
咸宁市鄂南新华印务有限公司印刷　全国新华书店经销
*
开本：889毫米×1194毫米　1/16　印张：11.75　字数：313千
2009年9月第4版　2009年9月第4次印刷
ISBN 978-7-80732-470-6
定价：20.70元

教材完全解读

本书特点

1. 以《课程标准》、《考试大纲》为编写依据，完全解读知识、方法、能力、考试题型，全面提高学习成绩。
2. 采用国际流行的双栏对照案例编写方式，左栏对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；右栏用案例诠释考点，对各个考点各个击破。

明确每课学习要求

以课标为依据，三维目标全解教材学习要求，提供总体的学习策略，提出具体的学习要诀，体现目标控制学习规则。

3层完全解读

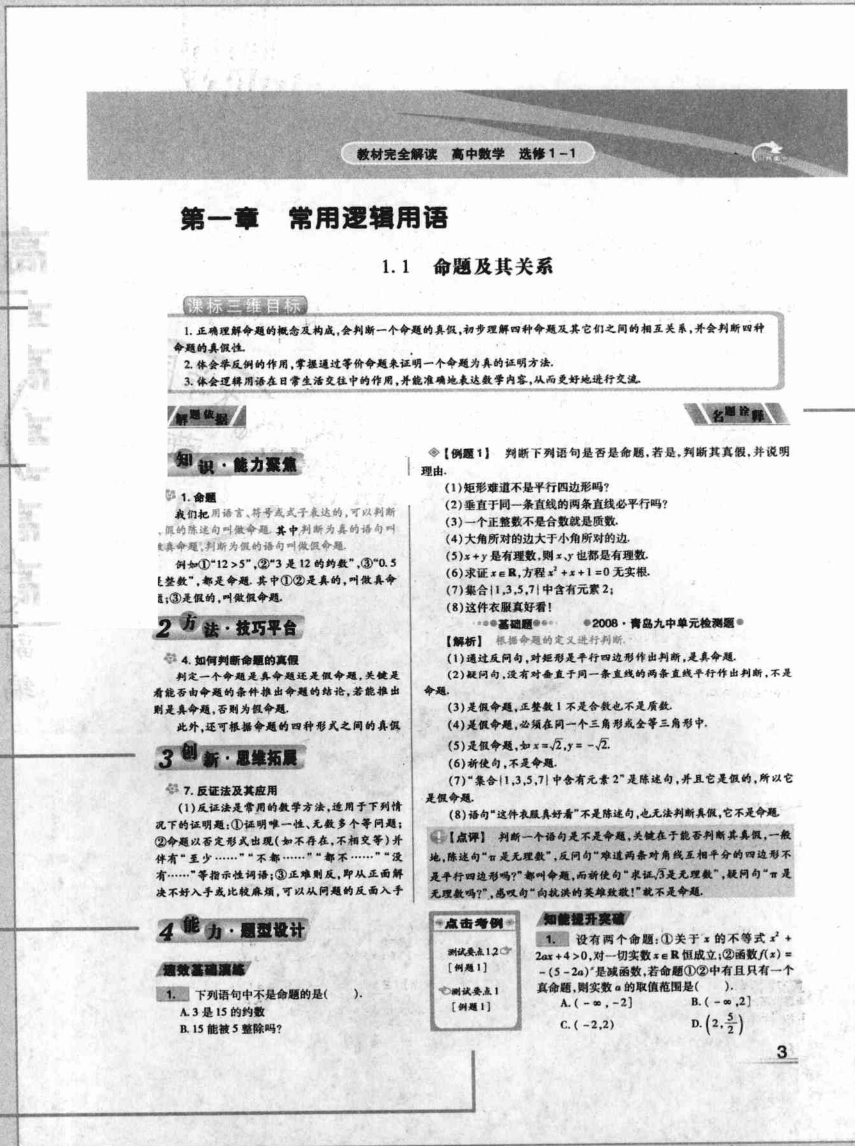
从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

解题错因导引

“点击考例”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。


教材完全解读 高中数学 选修1-1

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

课标三维目标

1. 正确理解命题的概念及构成，会判断一个命题的真假，初步理解四种命题及其它们之间的相互关系，并会判断四种命题的真假性。
2. 体会举反例的作用，掌握通过等价命题来证明一个命题为真的证明方法。
3. 体会逻辑用语在日常生活交往中的作用，并能准确地表达数学内容，从而更好地进行交流。

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 命题

我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题。其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题。

例如①“12 >5”，②“3是12的约数”，③“0.5是整数”，都是命题. 其中①②是真的，叫做真命题；③是假的，叫做假命题.

2 方法·技巧平台

4. 如何判断命题的真假

判定一个命题是真命题还是假命题，关键是看能否由命题的条件推出命题的结论，若能推出则是真命题，否则为假命题.

此外，还可根据命题的四种形式之间的真假

3 创新·思维拓展

7. 反证法及其应用

(1)反证法是常用的数学方法，适用于下列情况下的证明题：①证明唯一性、无数多个等问题；②命题以否定形式出现（如不存在，不相交等）并伴有“至少……”“不都……”“都不……”“没有……”等指示性词语；③正难则反，即从正面解决不好入手或比较麻烦，可以从问题的反面入手

4 能力·题型设计

速效基础演练

1. 下列语句中不是命题的是(　　).

A. 3是15的约数

B. 15能被5整除吗?

名题诠释

【例题1】 判断下列语句是否是命题，若是，判断其真假，并说明理由.

(1)矩形难道不是平行四边形吗?

(2)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?

(3)一个正整数不是合数就是质数.

(4)大角所对的边大于小角所对的边.

(5)$x+y$是有理数，则x,y也都是有理数.

(6)求证$x\in\mathbf{R}$，方程$x^2+x+1=0$无实根.

(7)集合$\{1,3,5,7\}$中含有元素2;

(8)这件衣服真好看!

基础题 2008·青岛九中单元检测题

【解析】 根据命题的定义进行判断.

(1)通过反问句，对矩形是平行四边形作出判断，是真命题.

(2)疑问句，没有对垂直于同一条直线的两条直线平行作出判断，不是命题.

(3)是假命题，正整数1不是合数也不是质数.

(4)是假命题，必须在同一个三角形或全等三角形中.

(5)是假命题，如$x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$.

(6)祈使句，不是命题.

(7)“集合$\{1,3,5,7\}$中含有元素2”是陈述句，并且它是假的，所以它是假命题.

(8)语句“这件衣服真好看”不是陈述句，也无法判断真假，它不是命题.

【点评】 判断一个语句是不是命题，关键在于能否判断其真假，一般地，陈述句“π是无理数”，反问句“难道两条对角线互相平分的四边形不是平行四边形吗?”都叫命题，而祈使句“求证$\sqrt{3}$是无理数”，疑问句“π是无理数吗?”，感叹句“向抗洪的英雄致敬!”就不是命题.

点击考例

测试要点12 [例题1]

测试要点1 [例题1]

知能提升突破

1. 设有两个命题：①关于x的不等式$x^2+2ax+4>0$，对一切实数$x\in\mathbf{R}$恒成立；②函数$f(x)=-(5-2a)^x$是减函数，若命题①②中有且只有一个真命题，则实数a的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-2]$　B. $(-\infty,2)$　C. $(-2,2)$　D. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$

3

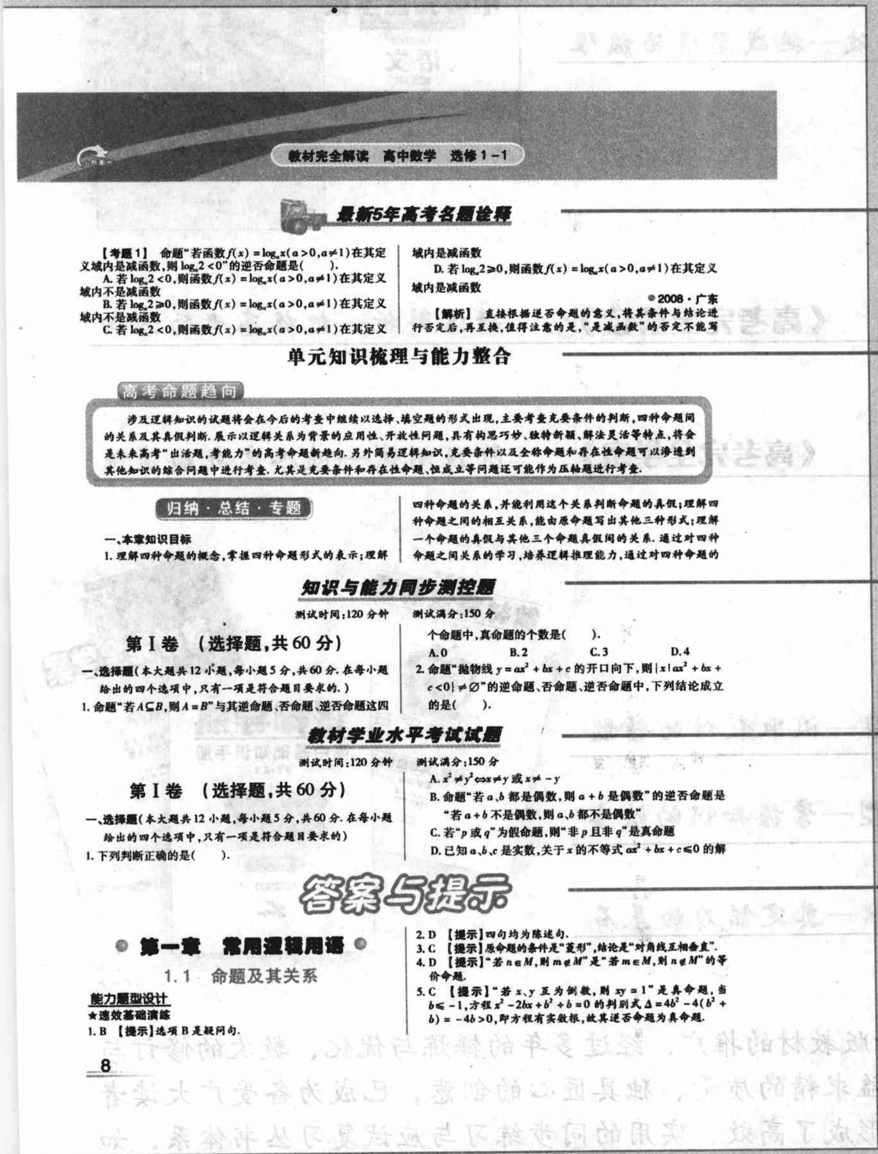
双栏对照学习

左栏全面剖析考点知识，凸现“解题依据”和答题要点。

右栏用典型案例诠释左栏考点。左右栏讲解·案例一一对照，形成高效学习的范式。

教辅大师、特级教师王后雄教授科学超前的体例设置，帮您赢在学习起点，成就人生夙愿。

—— 题记



教材完全解读　高中数学　选修 1－1

最新5年高考名题诠释

【考题1】 命题“若函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数，则 $\log_a 2<0$”的逆否命题是(　　).

A. 若 $\log_a 2<0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

B. 若 $\log_a 2\geqslant0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

C. 若 $\log_a 2<0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

D. 若 $\log_a 2\geqslant0$，则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

● 2008 · 广东

【解析】 直接根据逆否命题的意义，将其条件与结论进行否定后，再互换，值得注意的是，“是减函数”的否定不能写

单元知识梳理与能力整合

高考命题趋向

涉及逻辑知识的试题将会在今后的考查中继续以选择、填空题的形式出现，主要考查充要条件的判断，四种命题间的关系及其真假判断. 展示以逻辑关系为背景的应用性、开放性问题，具有构思巧妙、独特新颖、解法灵活等特点，将会是未来高考“出活题，考能力”的高考命题新趋向. 另外简易逻辑知识，充要条件以及全称命题和存在性命题可以渗透到其他知识的综合问题中进行考查. 尤其是充要条件和存在性命题、恒成立等问题还可能作为压轴题进行考查.

归纳 · 总结 · 专题

一、本章知识目标

1. 理解四种命题的概念，掌握四种命题形式的表示；理解四种命题的关系，并能利用这个关系判断命题的真假；理解四种命题之间的相互关系，能由原命题写出其他三种形式；理解一个命题的真假与其他三个命题真假间的关系. 通过对四种命题之间关系的学习，培养逻辑推理能力，通过对四种命题的

知识与能力同步测控题

测试时间：120 分钟　测试满分：150 分

第 I 卷　(选择题，共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 命题“若 $A\subseteq B$，则 $A=B$”与其逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中，真命题的个数是(　　).

A. 0　B. 2　C. 3　D. 4

2. 命题“抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，则 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$”的逆命题、否命题、逆否命题中，下列结论成立的是(　　).

教材学业水平考试试题

测试时间：120 分钟　测试满分：150 分

第 I 卷　(选择题，共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 下列判断正确的是(　　).

A. $x^2\neq y^2\Leftrightarrow x\neq y$ 或 $x\neq -y$

B. 命题“若 a、b 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数”的逆否命题是“若 $a+b$ 不是偶数，则 a、b 都不是偶数”

C. 若“p 或 q”为假命题，则“非 p 且非 q”是真命题

D. 已知 a、b、c 是实数，关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c\leqslant0$ 的解

答案与提示

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

能力题型设计

★速效基础演练

1. B 【提示】选项 B 是疑问句.

2. D 【提示】四句均为陈述句.

3. C 【提示】原命题的条件是“菱形”，结论是“对角线互相垂直”.

4. D 【提示】“若 $n\in M$，则 $m\notin M$”是“若 $m\in M$，则 $n\notin M$”的等价命题.

5. C 【提示】“若 x、y 互为倒数，则 $xy=1$”是真命题，当 $b\leqslant-1$，方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 的判别式 $\Delta=4b^2-4(b^2+b)=-4b>0$，即方程有实数根，故其逆否命题为真命题.

8

同步体验高考

结合本章节知识及考纲要求，精心选编最新五年高考试题，体现“高考在平时”的学习理念，同步触摸、感知高考，点拨到位，破解高考答题规律与技巧。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然。能使您养成良好规范的答题习惯。

小熊图书　最新教辅

讲《中考完全解读》　复习讲解——紧扼中考的脉搏

练《中考完全学案》　难点突破——挑战思维的极限

讲《高考完全解读》　精湛解析——把握高考的方向

练《高考完全学案》　阶段测试——进入实战的演练

讲《教材完全解读》　细致讲解——汲取教材的精髓

例《课标导航·基础知识手册》　透析题型——掌握知识的法宝

练《教材完全学案》　夯实基础——奠定能力的基石

伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“小熊图书”以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

目录

知识与方法

阅读索引

第一章 常用逻辑用语

第二章 圆锥曲线与方程

第三章 导数及其应用

全书知识结构图解·名师学法指津

一、全书知识结构图解

- 选修1－1
  - 常用逻辑用语
    - 四种命题
      - 原命题（若p，则q）
      - 逆命题（若q，则p）
      - 否命题（若$\neg p$，则$\neg q$）
      - 逆否命题（若$\neg q$，则$\neg p$）
      - 原命题与逆命题：互逆；原命题与否命题：互否；原命题与逆否命题：互为逆否
      - 逆命题与逆否命题：互否；否命题与逆否命题：互逆；逆命题与否命题：互为逆否
    - 充分条件,必要条件,充要条件
      - 充分或必要条件
      - 充要条件 — $p\Leftrightarrow q$
    - 简单逻辑联结词
      - 且$\wedge$ — $p\wedge q$
      - 或$\vee$ — $p\vee q$
      - 非(否定)$\neg$ — $\neg p$(或$\neg q$)
    - 全称量词、存在量词
      - 全称命题
      - 特称命题
  - 圆锥曲线
    - 椭圆
    - 双曲线
    - 抛物线
    - 各自定义
    - 统一定义
      - $e>1$　双曲线
      - $e=1$　抛物线
      - $0<e<1$　椭圆
    - 标准方程（参数的几何意义）
    - 几何特征
      - 形状（离心率）
      - 位置（焦点、准线、中心、顶点、对称轴、渐近线）
      - 大小（长短轴、实虚轴、通径、范围）
    - 位置关系
      - 点与曲线、直线与曲线、曲线与曲线
  - 导数及其应用
    - 变化率与导数
      - 变化率
      - 导数的概念
      - 导数的几何意义
    - 导数的计算
      - 几个常用函数的导数
      - 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则
    - 导数在研究函数中的应用
      - 函数的单调性与导数
      - 函数的极值与导数
      - 函数的最大(小)值与导数
    - 生活中的优化问题举例

二、名师学法指津

同学们，我们已经顺利地学完了高中数学的全部必修内容，必修系列的课程是为了满足所有高中学生的共同数学需求，是会考的全部内容．如果你高中毕业后，想到文史、财经、管理类专业的大学深造，还必须选修系列1的数学，《选修1－1》就是其中的主要内容之一．如何学好这一册内容呢？首先必须了解本册教材的基本内容、所讲授的知识的特点、知识的地位和作用，然后根据具体情况找出最适当的学习方法．本册教材共分三章，下面分章谈一些学习方法，供同学们学习时参考．

《常用逻辑用语》这一章主要讲述命题的概念和命题的构成及四种命题之间的关系；充分条件与必要条件；简单的逻辑联结词"或""且""非"的含义；全称量词与存在量词及含有一个量词的命题的否定的一些基本知识．

逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科，学习数学需要全面地理解概念，正确地进行表述、判断和推理，这就离不开对逻辑知识的掌握和运用．在日常生活、学习、工作中，基本的逻辑知识也是认识问题、研究问题不可缺少的工具．常用逻辑用语作为学习数学知识的工具，可谓无处不在．逻辑学是数学的基础．学习时，应注意以下三点：

1．用联系的观点看问题，可以使我们更加深刻地理解数学知识．本章中，把充分条件、必要条件、充要条件与集合的关系联系起来．把逻辑联结词与集合运算、电路的串联和并联联系起来，从中找到新知识的挂靠点，这样容易理解新知识，同时也体现了联系的观点，为树立辩证唯物主义科学的世界观打下基础．

2．本章知识较为抽象，有些概念很难理解，在学习中决不可死记硬背．应当善于从生活实际中找到具体的实例，通过例子来记忆概念、理解概念、应用概念．尝试运用这部分知识解决问题，在应用的过程中得到巩固、提高．

3．学习这些内容主要是为今后进一步学习其他知识做准备，随着后续章节的学习，对逻辑知识的应用将越来越广泛和深入，相应地，对逻辑知识的理解和掌握的水平也就越来越高．因此，在对本章的学习中，一定要以课本为主，打好基础，循序渐进，切忌急于求成，盲目拔高．

《圆锥曲线与方程》这一章采用坐标法在探究圆锥曲线几何特征的基础上，建立它们的方程，通过方程研究它们的性质，并用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题和实际问题，进一步感受数形结合的基本思想．圆锥曲线在数学和其他科学技术领域中占有重要地位，在实际生产和生活中有着大量的应用．人造地球卫星的运行轨道、电影放映机的装置、汽车车灯反光镜的设计、通风塔的造型等，都用到了有关圆锥曲线的知识．因此，学习本章应注意以下五点：

1．重视圆锥曲线的定义在解题中的作用．

2．本章内容对运算能力要求比较高，在学习中要不断提高自己的运算能力．

3．加强运用数形结合的思想方法，提高分析问题、解决问题的能力．

4．要学会类比的方法，如不同圆锥曲线间的类比，同一圆锥曲线不同形式间的类比等．

5．要学会反思，不断总结所学知识，形成自己的知识网络，反思解题过程、解题方法、规律．如在解决直线与圆锥曲线的问题时，韦达定理与根的判别式的作用等．

《导数及其应用》这一章导数是微积分的核心概念之一，它是研究函数增减、最值问题最有效的工具，导数作为函数的延续，是高中数学的重要内容，也是高考的重点．微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用，开创了近代数学过程的新时期，为研究变化量和函数提供了重要的方法和手段，导数的概念具有丰富的实际背景，它在物理、化学、生物、天文、地理以及经济等各种科学领域中都有非常广泛的重要的应用．因此学习本章应注意以下三点：

1．一定要理解导数的物理意义及几何意义，尤其是几何意义在解决曲线的切线问题上的应用．

2．公式要记牢，尤其是指数函数与对数函数的求导公式比较容易记混，要在应用中理解并记忆，积函数与商函数的导数公式要弄清区别，以免造成由于公式记错而丢分．

3．特别注意能用导数的方法解决一些函数的性质问题．解决一些用初等方法很难解决而导数方法却较顺利解决的问题，即能解决导数与函数的综合性问题．

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

课标三维目标

1. 正确理解命题的概念及构成,会判断一个命题的真假,初步理解四种命题及其他们之间的相互关系,并会判断四种命题的真假性.

2. 体会举反例的作用,掌握通过等价命题来证明一个命题为真的证明方法.

3. 体会逻辑用语在日常生活交往中的作用,并能准确地表达数学内容,从而更好地进行交流.

解题依据　名题诠释

1 知识·能力聚焦

1. 命题

我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题. 其中判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

例如:①"12 > 5",②"3 是 12 的约数",③"0.5是整数",都是命题. 其中①②是真的,叫做真命题;③是假的,叫做假命题.

又如:④"这是一棵大树",⑤"$x<2$". 由于"大树"没有界定,就不能判断"这是一棵大树"的真假;由于 x 是未知数,也不能判断"$x<2$"是否成立. 故④⑤都不是命题.

再如:"5 > 2","6 = 2","π 是无理数"都是命题.

而"x^2-x+8","$x+5=8$","$x>0$",它们都不能判断真假,所以不是命题.

【防错档案】 (1)并不是任何语句都是命题,只有那些能判断真假的语句才是命题. 一般来说,疑问句、祈使句、感叹句都不是命题,如:"三角函数是周期函数吗?""但愿每一个三次方程都有三个实根!""指数函数的图象真漂亮!"等,都不是命题;(2)在数学或其他科学技术中,还有一类陈述句也经常出现,如:"每一个不小于6的偶数都是两个奇素数之和"(歌德巴赫猜想)"在2020年前,将有人登上火星"等,虽然目前还不能确定这些语句的真假,但是随着科学技术的发展与时间的推移,总能确定它们的真假,人们把这一类猜想仍算为命题.

北师大版

2. 命题的结构

在数学中,具有"若 p 则 q"这种形式的命题是常见的. 我们把这种形式的命题中的 p 叫做命题的条件,q 叫做命题的结论.

◈**【例题1】** 判断下列语句是否是命题,若是,判断其真假,并说明理由.

(1)矩形难道不是平行四边形吗?

(2)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?

(3)一个正整数不是合数就是质数.

(4)大角所对的边大于小角所对的边.

(5)$x+y$ 是有理数,则 x、y 也都是有理数.

(6)求证:$x\in\mathbf{R}$,方程 $x^2+x+1=0$ 无实根.

(7)集合{1,3,5,7}中含有元素2.

(8)这件衣服真好看!

基础题　2008·青岛九中单元检测题

【解析】 根据命题的定义进行判断.

(1)通过反问句,对矩形是平行四边形作出判断,是真命题.

(2)疑问句,没有对垂直于同一条直线的两条直线平行作出判断,不是命题.

(3)是假命题,正整数1不是合数也不是质数.

(4)是假命题,必须在同一个三角形或全等三角形中.

(5)是假命题,如 $x=\sqrt{2}$,$y=-\sqrt{2}$.

(6)祈使句,不是命题.

(7)"集合{1,3,5,7}中含有元素2"是陈述句,并且它是假的,所以它是假命题.

(8)语句"这件衣服真好看"不是陈述句,也无法判断真假,它不是命题.

【点评】 判断一个语句是不是命题,关键在于能否判断其真假,一般地,陈述句"π 是无理数",反问句"难道两条对角线互相平分的四边形不是平行四边形吗?"都叫命题,而祈使句"求证$\sqrt{3}$是无理数",疑问句"π 是无理数吗?",感叹句"向抗洪的英雄致敬!"就不是命题.

◈**【例题2】** 把下列命题改写成"若 p 则 q"的形式,并判断命题的真假.

(1)$ac>bc\Rightarrow a>b$;

(2)已知 x、y 为正整数,当 $y=x+1$ 时,$y=3$, $x=2$;

(3)当 $m>\frac{1}{4}$时,$mx^2-x+1=0$ 无实根;

(4)当 $abc=0$ 时,$a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$;

(5)当 $x^2-2x-3=0$ 时,$x=3$ 或 $x=-1$.

基础题　2009·金太阳高一联考题

【特别提醒】 数学中有一些命题虽然表面上不是“若p则q”的形式，但是把它的表述作适当改变，也可以写成“若p则q”的形式.

苏教版

例如：把下列命题写成“若p则q”的形式.

(1)当$x=2$时，$x^2-3x+2=0$.

$x=2$是该命题的条件，$x^2-3x+2=0$是该命题的结论. 故可写成：若$x=2$，则$x^2-3x+2=0$.

(2)菱形的对角线互相垂直且平分.

“四边形为菱形”是它的条件. 而“对角线垂直且平分”是结论，故可写成：若一个四边形为菱形，则它的对角线互相垂直且平分.

3. 命题的四种形式

一般地，用p和q分别表示原命题的条件和结论，用$\neg p$和$\neg q$分别表示p和q的否定，于是四种命题的形式：

原命题：若p则q；逆命题：若q则p；否命题：若$\neg p$则$\neg q$；逆否命题：若$\neg q$则$\neg p$.

【点评】 关于逆命题、否命题与逆否命题，也可以如下表述：

(1)交换原命题的条件和结论，所得的命题是逆命题.

例如：同位角相等，两条直线平行.

它的逆命题是：两条直线平行，同位角相等.

(2)同时否定原命题的条件和结论，所得的命题是否命题.

如上例中的否命题是：同位角不相等，两条直线不平行.

(3)交换原命题的条件和结论，并且同时否定，所得的命题是逆否命题.

如上例中的逆否命题是：两条直线不平行，同位角不相等.

互逆命题、互否命题与互为逆否命题都是说两个命题的关系，把其中一个命题作为原命题时，另一个命题就叫做原命题的逆命题、否命题或逆否命题.

四种命题之间的相互关系，如图1－1－1所示.

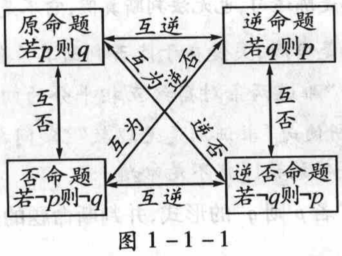


图1－1－1

【点评】 我们已经知道，原命题为真，它的否命题不一定为真. 一般地，一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三种关系.

(1)原命题为真，它的逆命题不一定为真.

(2)原命题为真，它的否命题不一定为真.

(2)原命题为真，它的逆否命题一定为真.

【解析】 找准命题的条件和结论，是解这类题目的关键.

(1)若$ac>bc$，则$a>b$，假命题.

(2)已知x、y为正整数，若$y=x+1$，则$y=3$且$x=2$，假命题.

(3)若$m>\frac{1}{4}$，则$mx^2-x+1=0$无实根，真命题.

(4)若$abc=0$，则$a=0$或$b=0$或$c=0$，真命题.

(5)若$x^2-2x-3=0$，则$x=3$或$x=-1$，真命题.

【点评】 改写时，一定要注意找出命题的条件和结论，同时要注意所叙述的条件和结论的完整性.

在(2)中，“已知x、y为正整数”是大前提，不能把它写在条件中，应当写在前面，仍然作为命题的大前提.

【例题3】 (1)写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断其真假.

①实数的平方是非负数；

②等底等高的两个三角形是全等三角形；

③弦的垂直平分线经过圆心，并平分弦所对的弧.

基础题

(2)已知三个不等式：$ab>0$，$bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$(其中$a$、$b$、$c$、$d$均为实数)，用其中两个不等式作为条件，余下一个不等式作为结论组成一个命题，可组成正确命题的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

中难题

【解析】 (1)①逆命题：若一个数的平方是非负数，则这个数是实数. 为真命题.

否命题：若一个数不是实数，则它的平方不是非负数. 为真命题.

逆否命题：若一个数的平方不是非负数，则这个数不是实数. 为真命题.

②逆命题：若两个三角形全等，则这两个三角形等底等高. 为真命题.

否命题：若两个三角形不等底或不等高，则这两个三角形不全等. 为真命题.

逆否命题：若两个三角形不全等，则这两个三角形不等底或不等高. 为假命题.

③逆命题：若一条直线经过圆心，且平分弦所对的弧，则这条直线是弦的垂直平分线. 为真命题.

否命题：若一条直线不是弦的垂直平分线，则这条直线不过圆心或不平分弦所对的弧. 为真命题.

逆否命题：若一条直线不经过圆心或不平分弦所对的弧，则这条直线不是弦的垂直平分线. 为真命题.

(2)由$ab>0$，$bc-ad>0\Rightarrow\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$；

$ab>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0\Rightarrow bc-ad>0$；

$bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0\Rightarrow ab>0$，可组成三个正确命题. 故选D.

【点评】 命题的四种形式之间的关系，还提供了一个判断命题真假的变通手段，由于互为逆否的两个命题是等价命题，它们同真、同假，所以当一个命题不易判断时，可以通过判断其逆否命题的真假来判断原命题的真假.

2 方法·技巧平台

4. 如何判断命题的真假

判定一个命题是真命题还是假命题，关键是看能否由命题的条件推出命题的结论，若能推出则是真命题，否则为假命题.

此外，还可根据命题的四种形式之间的真假关系进行转换性判断，如果判断一个命题的原命题不易时，可以转换成它的等价命题（逆否命题）再进行判断. 一般地，四种命题的真假性，有且仅有下面四种情况：

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

人教版

【拓展】 由于逆命题与否命题也是互为逆否命题，因此这四种命题的真假性之间的关系如下：

(1)两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

(2)两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系.

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性，即互为逆否命题具有等价性，所以我们在直接证明某一命题为真命题有困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，来间接地证明原命题为真命题.

湘教版

5. 互为逆否命题的等价性的集合解释

命题的四种形式之间的关系，提供了一个判断命题真假的变通手段，由于互为逆否的两个命题是等价命题，它们同真同假，所以当一个命题不易判断时，可以通过判断其逆否命题的真假来判断原命题真假. 如判断“若 $ab\leqslant 0$，则 $a\leqslant 0$ 或 $b\leqslant 0$”真假，直接去判断，是不易判断其真假的，但判断其逆否命题“$a>0$ 且 $b>0\Rightarrow a\cdot b>0$”就容易多了. 互为逆否的两个命题的等价性可以从集合角度给出恰当的解释，设 $A=\{x|x\in p\}$，$B=\{x|x\in q\}$，其中 p、q 是集合 A、B 的特征性质，若 $A\subsetneqq B$，则意味着对于元素 x 具有性质 p 必具有性质 q，所以可认为 $A\subsetneqq B$ 与 $p\to q$ 等同，具有同真同假性. 由 Venn 图易发现有下面结论：$A\subsetneqq B$ 与 $(\complement_I B)\subsetneqq(\complement_I A)$ 等价，如图 1－1－2，也就说明“$p\Rightarrow$

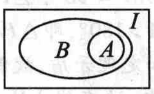


图 1－1－2

◈【例题4】判断命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题的真假.

●●●●基础题●●●● ●2008·南昌市期末考题●

【解析】 可以直接进行逻辑推理判断，也可以借用集合关系判断；可以从逆否命题直接判断，也可以先判断原命题的真假，然后利用原命题与逆否命题的等价关系使问题获解.

解法一：$\because m>0$，$\therefore 4m>0$，$\therefore 4m+1>0$，

$\therefore$ 方程 $x^2+x-m=0$ 的判别式 $\Delta=4m+1>0$，

因而方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根.

$\therefore$ 原命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”为真命题.

又原命题与它的逆否命题等价，$\therefore$“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题也为真命题.

解法二：原命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题为“若 $x^2+x-m=0$ 无实数根，则 $m\leqslant 0$”.

$\because x^2+x-m=0$ 无实数根，$\therefore \Delta=4m+1<0$，$\therefore m<-\dfrac{1}{4}\leqslant 0$.

$\therefore$“若 $x^2+x-m=0$ 无实数根，则 $m\leqslant 0$”为真命题.

解法三：$p:m>0$，$q:x^2+x-m=0$ 有实数根.

$\therefore p:A=\{m\in\mathbf{R}|m>0\}$，

$q:B=\{m\in\mathbf{R}|$方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根$\}=\left\{m\in\mathbf{R}\,\middle|\,m\geqslant -\dfrac{1}{4}\right\}$

以下同解法一.

解法四：$p:m>0$，$q:x^2+x-m=0$ 有实数根，

$\neg p:m\leqslant 0$，$\neg q:x^2+x-m=0$ 无实数根.

$\therefore \neg p:A=\{m\in\mathbf{R}|m\leqslant 0\}$，

$\neg q:B=\{m\in\mathbf{R}|$方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根$\}=\left\{m\in\mathbf{R}\,\middle|\,m<-\dfrac{1}{4}\right\}$.

$\because B\subseteq A$，$\therefore$“若$\neg q$，则$\neg p$”为真，即“若方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根，则 $m\leqslant 0$”为真命题.

【点评】 解法一是利用原命题与逆否命题的等价关系判断；解法二是由逆否命题直接判断；解法三是利用集合关系判断；解法四是直接进行逻辑推理判断，要注意各种不同解法的正确选用.

◈【例题5】设命题“如果 a,b,c 均为奇数，那么方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 没有等根”. 试判断它的四种命题的真假.

●●●●中难题●●●● ●2008·海口高考题●

【解析】 (1)设 $a=2m-1$，$b=2n-1$，$c=2p-1$ $(m,n,p\in\mathbf{Z})$.

则 $b^2-4ac=(2n-1)^2-4(2m-1)(2p-1)=4[n^2-n-(2m-1)(2p-1)]+1$ 为奇数.

$\therefore b^2-4ac\neq 0$.

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 没有等根.

即原命题是真命题.

它的逆否命题“若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有等根，则 a,b,c 不全为奇数”也是真命题.

(2)它的逆命题为“若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 没有等根，则 a,b,c 均为奇数”.

当 $a=1,b=0,c=-1$ 时，方程 $x^2-1=0$ 没有等根，其中 $b=0$ 不是奇数.

所以它的逆命题是假命题.

它的否命题“如果 a,b,c 不全为奇数，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有等根”也是假命题.

q"与"$\neg q \Rightarrow \neg p$"是等价的.

关于这一点在前面已加以说明,在此再一次强调此问题,希望能真正理解. 北师大版

6. 逆否证法的运用

逆否证法:我们知道原命题与其逆否命题是等价的,因此当我们证明或判断原命题感到困难时,可考虑换证它的逆否命题成立,这样也同样达到证明原命题的目的,这种证法叫做逆否证法.

如要证明:对任意非正数 c,若有 $a\leqslant b+c$ 成立,则 $a\leqslant b$.

可作如下分析,并给予证明.

将"对任意非正数 c,若有 $a\leqslant b+c$ 成立,则 $a\leqslant b$"视为原命题.要证明原命题为真命题,可以考虑证明它的逆否命题"对任意非正数 c,若 $a>b$,则有 $a>b+c$ 成立"为真命题.

证明:若 $a>b$,由 $c\leqslant 0$ 知 $b\geqslant b+c$,

$\therefore a>b+c$.

$\therefore$ 原命题的逆否命题为真命题,从而原命题为真命题.

即对任意 $c\leqslant 0$,若有 $a\leqslant b+c$ 成立,则 $a\leqslant b$.

3 创新·思维拓展

7. 反证法及其应用

(1)反证法是常用的数学方法,适用于下列情况下的证明题:①证明唯一性、无数多个等问题;②命题以否定形式出现(如不存在,不相交等)并伴有"至少……""不都……""都不……""没有……"等指示性词语;③正难则反,即从正面解决不好入手或比较麻烦,可以从问题的反面入手解决.

(2)反证法导出结果的常见情况有:①导出 $\neg p$ 为真,即与原命题条件矛盾;②导出 q 为真,即与假设"$\neg q$ 为真"矛盾;③导出一个恒假命题,即与定义、公理、定理矛盾;④导出自相矛盾的问题.

(3)用反证法证明命题的一般步骤:

①假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;

②从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾;

③由矛盾判断假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

【点评】 由于逆命题与否命题也是互为逆否命题,因此这四种命题的真假性之间的关系如下:

(1)两个命题互为逆否命题,它们有相同的真假性;

(2)两个命题为互逆命题或互否命题,它们的真假性没有必然的关系.

【例题6】 证明:已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,$a、b\in\mathbf{R}$.若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant 0$.

中难题　　2008·南昌十一中考题

【解析】 证明:原命题的逆否命题为"若 $a+b<0$,则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$."

若 $a+b<0$,则 $a<-b,b<-a$,

又$\because f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,

$\therefore f(a)<f(-b),f(b)<f(-a)$.

$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,

即逆否命题为真命题.

$\therefore$ 原命题为真命题.

【点评】 在证明时,一定要正确写出已知命题的逆否命题.值得注意的是:逆否证法与反证法不同,反证法是通过否定结论的反面而达到目的,而逆否证法则是证明它的等价命题成立,但二者又有一定的联系.

【例题7】 (1)已知 $p_1、p_2、q_1、q_2\in\mathbf{R}$,且 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$.

求证:方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中,至少有一个方程有实根.

难题　　2009·太原市统考题

(2)求证:在一个平面内,过直线 l 外一点 P 只能作出一条直线垂直于 l.

难题　　2009·黄冈调考题

【解析】 用反证法证明.

证明:(1)假设这两个一元二次方程都没有实根,那么它们的判别式都小于0,即 $\begin{cases}\Delta_1=p_1^2-4q_1<0,\\ \Delta_2=p_2^2-4q_2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1^2<4q_1,\\ p_2^2<4q_2.\end{cases}$

$\therefore p_1^2+p_2^2<4(q_1+q_2)$.

把 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$ 代入上式,得 $p_1^2+p_2^2-2p_1p_2<0$,即 $(p_1-p_2)^2<0$.

这与"任何实数的平方为非负数"相矛盾,所以假设不成立.

故这两个方程中,至少有一个方程有实根.

(2)假设过点 P 可以作两条直线垂直于直线 l,如图1－1－3,那么 $\angle PAB=90°$,$\angle PBA=90°$,于是 $\angle APB+\angle PAB+\angle PBA>180°$,即 $\triangle PAB$ 的内角和大于 $180°$,这与三角形内角和定理矛盾,故假设不成立.

所以,在一个平面内,过直线 l 外一点 P 只能作出一条直线垂直于 l.

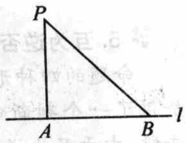


图1－1－3

【点评】 用反证法证明命题时,若原命题问题的反面不唯一,这时容易漏掉一些情况,对于这种情况,要把每种可能一一否定,不要遗漏.

4 能力·题型设计

速效基础演练

点击考例
测试要点1,2 [例题1]
测试要点1 [例题1]

1. 下列语句中不是命题的是(　　)

A. 3是15的约数.

B. 15能被5整除吗?

C. 3小于2.

D. 0不是自然数.

2. 下列是命题的有(　　).

①矩形的对角线相等;②9的平方根是3或－3;③2既是自然数也是偶数;④平行四边形的对角线互相平分且相等.

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

3. 命题“菱形的对角线互相垂直”的逆否命题是(　　).

A. 对角线互相垂直的四边形是菱形

B. 不是菱形的四边形对角线不互相垂直

C. 对角线不互相垂直的四边形不是菱形

D. 菱形的对角线不互相垂直

4. 与命题“若 $m\in M$,则 $n\notin M$”等价的命题是(　　).

A. 若 $m\in M$,则 $n\notin M$

B. 若 $n\notin M$,则 $m\in M$

C. 若 $m\notin M$,则 $n\in M$

D. 若 $n\in M$,则 $m\notin M$

5. 有下列四个命题:

①“若 $xy=1$,则 x、y 互为倒数”的逆命题;②“相似三角形的周长相等”的否命题;③“若 $b\leqslant -1$,则方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 有实根”的逆否命题;④若“$A\cup B=B$,则 $A\supseteq B$”的逆否命题.

其中的真命题是(　　).

A. ①②　B. ②③　C. ①③　D. ③④

6. 给定下列命题:

①“若 $k>0$,则方程 $x^2+2x-k=0$”有实数根;②若 $a>b$,则 $a+c>b+c$;③对角线相等的四边形是矩形;④若 $xy=0$,则 x、y 中至少有一个为0.

其中真命题的序号是________.

7. 命题“各位数字之和是3的倍数的正整数,可以被3整除”的逆否命题是________;逆命题是________;否命题是________.

8. 判断下列命题的真假,并写出它们的逆命题、否命题、逆否命题并判断其真假.

(1)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$;

(2)若四边形的对角互补,则该四边形是圆的内接四边形;

(3)若在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中,$b^2-4ac<0$,则该函数的图象与 x 轴有交点.

知能提升突破

1. 设有两个命题:①关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$,对一切实数 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立;②函数 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数,若命题①②中有且只有一个真命题,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,2]$

C. $(-2,2)$　　D. $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$

2. 命题“若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的 $\Delta=b^2-4ac<0$,则方程无实根”的否命题的逆否命题是(　　).

A. 若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$,则方程有二实根

B. 若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 无实根,则其 $\Delta<0$

C. 若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有二实根,则其 $\Delta\geqslant0$

D. 以上均不对

3. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量,且相互不共线,则①$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$;②$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;③$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直;④$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$ 中,是真命题的有(　　).

A. ①②　B. ②③　C. ③④　D. ②④

4. 已知 a、b 为两条不同的直线,α、β 为两个不同的平面,且 $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,则下列命题中,假命题是(　　).

A. 若 $a/\!/b$,则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若 $\alpha\perp\beta$,则 $a\perp b$

C. 若 a、b 相交,则 α、β 相交

D. 若 α、β 相交,则 a、b 相交

5. 在空间中,

①若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;

②若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中,逆命题为真命题的是________.

6. 用反证法证明命题“若整数 n 的立方是偶数,则 n 也是偶数”如下:

假设 n 是奇数,则 $n=2k+1$(k 是整数),$n^3=(2k+1)^3=$________,与已知 n^3 是偶数矛盾,所以 n 是偶数.

7. 下面是关于四棱柱的四个命题:

①若有两个侧面垂直于底面,则该四棱柱为直四棱柱;②若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面,则该四棱柱为直四棱柱;③若四个侧面两两全等,则该四棱柱为直四棱柱;④若四棱柱的四条对角线两两相等,则该四棱柱为直四棱柱.

其中,真命题的编号是________(写出所有真命题的编号).

8. 写出下列命题、逆命题、否命题与逆否命题,并分别指出四种命题的真假.

(1)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $a^2>b^2$,则 $a>b$;

(2)若 $x+y\leqslant0$,则 $x\leqslant0$,或 $y\leqslant0$;

(3)设 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $a+b>0$,$ab>0$,则 $a>0$,$b>0$.

9. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,a、$b\in\mathbf{R}$,对命题“若 $a+b\geqslant0$,则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”.

(1)写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2)写出其逆否命题,并证明你的结论.

10. 判断命题“已知 a、x 为实数,如果关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant0$ 的解集非空,则 $a\geqslant1$”的逆否命题的真假.

点击考例

测试要点2、3 [例题2]

测试要点4、5 [例题4]

测试要点4、5 [例题4]

测试要点5、6 [例题5]

测试要点5 [例题5]

测试要点3、5 [例题3]

测试要点6 [例题6]

测试要点7 [例题7]

测试要点4 [例题4]

测试要点3、4、5 [例题4、5]

测试要点4、6 [例题6]

测试要点3、4、5 [例题5]

测试要点3、5 [例题5]

测试要点6 [例题6]

测试要点4、6 [例题6]

测试要点5 [例题5]

最新5年高考名题诠释

【考题1】 命题“若函数$f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$在其定义域内是减函数，则$\log_a 2<0$”的逆否命题是（　　）.

A. 若$\log_a 2<0$，则函数$f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$在其定义域内不是减函数

B. 若$\log_a 2\geq0$，则函数$f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$在其定义域内不是减函数

C. 若$\log_a 2<0$，则函数$f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$在其定义域内是减函数

D. 若$\log_a 2\geq0$，则函数$f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$在其定义域内是减函数

●2008 · 广东

【解析】 直接根据逆否命题的意义，将其条件与结论进行否定，再互换，值得注意的是，“是减函数”的否定不能写成“是增函数”，而应写成不是减函数.

【答案】 B

【考题2】 给出命题：若函数$y=f(x)$是幂函数，则函数$y=f(x)$的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中，真命题的个数是（　　）.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

●2008 · 山东

【解析】 逆命题：若函数$y=f(x)$的图象不过第四象限，则函数$f(x)$是幂函数. 否命题：若函数$y=f(x)$不是幂函数，则函数$y=f(x)$的图象过第四象限. 逆否命题：若函数$y=f(x)$的图象过第四象限，则函数$y=f(x)$不是幂函数. 只有逆否命题正确，故选C.

【答案】 C

【考题3】 已知两条直线m、n，两个平面α、β，给出下面四个命题：

①$m\parallel n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$；　　②$\alpha\parallel\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$；

③$m\parallel n,m\parallel\alpha\Rightarrow n\parallel\alpha$；　　④$\alpha\parallel\beta,m\parallel n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\beta$；

其中正确命题的序号是（　　）.

A. ①③　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

●2007 · 江苏

【解析】 本小题主要考查线线、线面位置关系的判定. 由判定定理知命题①正确；若$\alpha\parallel\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则$m,n$可以为异面直线，即命题②不正确；若$m\parallel n,m\parallel\alpha$，则$n$可以在$\alpha$内，∴命题③不正确；由线面垂直的判定知命题④正确. 所以选C.

【答案】 C

【考题4】 对于函数：①$f(x)=\lg(|x-2|+1)$；②$f(x)=(x-2)^2$；③$f(x)=\cos(x+2)$，判断如下三个命题的真假.

命题甲：$f(x+2)$是偶函数；

命题乙：$f(x)$在$(-\infty,2)$上是减函数，在$(2,+\infty)$上是增函数；

命题丙：$f(x+2)-f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是（　　）.

A. ①③　　B. ①②　　C. ③　　D. ②

●2007 · 北京

【解析】 ③不能使命题甲为真，因为$\cos(x+4)$不是偶函数，①不能使命题丙为真. 而②则能满足甲、乙、丙全为真，对于丙，$f(x+2)-f(x)=x^2-(x-2)^2=4x-4$，在$\mathbf{R}$上是增函数.

【答案】 D

【考题5】 如图1－1－4，正方体AC_1的棱长为1，过点A作平面A_1BD的垂线，垂足为点H，则以下命题中，错误的命题是（　　）.

A. 点H是$\triangle A_1BD$的垂心

B. AH垂直平面CB_1D_1

C. AH的延长线经过点C_1

D. 直线AH和BB_1所成角为45°

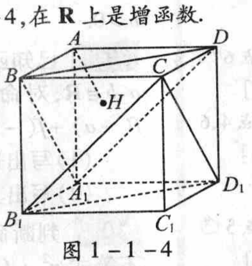


图1－1－4

●2007 · 江西

【解析】 本小题主要考查立体几何中线线关系、线面关系、面面关系的特殊判定. 由于三棱锥$A-BDA_1$为正三棱锥，所以H为底面$\triangle A_1BD$的垂心，容易证明平面$A_1BD\parallel$平面CB_1D_1，所以$AH\perp$平面CB_1D_1，连结AC_1利用三垂线定理易证明$AC_1\perp$平面BA_1D，∴A、H、C_1三点共线，所以选D.

【答案】 D

【考题6】 关于平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，有下列三个命题：

①若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

②若$\boldsymbol{a}=(1,k),\boldsymbol{b}=(-2,6),\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$k=-3$；

③非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角为60°.

其中真命题的序号为________（写出所有真命题的序号）.

●2008 · 陕西

【解析】 ①由数量积定义$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. 则$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$，∴$|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\varphi$，即只要$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$上的投影相等. 则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. 如图1－1－5所示.

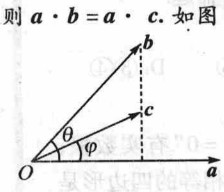


图1－1－5

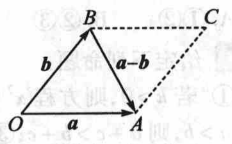


图1－1－6

②$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2),\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$. ∴$6=-2k$，∴$k=-3$，故②正确.

③$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，∴$\triangle OAB$为等边三角形. 如图1－1－6所示. 而$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$，∴$\boldsymbol{a}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为30°. 故③不正确.

【答案】 ②

【考题7】 对于四面体$ABCD$，下列命题正确的是________（写出所有正确命题的序号）.

①相对棱AB与CD所在的直线是异面直线；②由顶点A作四面体的高，其垂足是$\triangle BCD$的三条高线的交点；③若分别作$\triangle ABC$和$\triangle ABD$的边AB上的高，则这两条高的垂足重合；④任何三个面的面积之和都大于第四个面的面积；⑤分别作三组相对棱中点的连线，所得的三条线段相交于一点.

●2009 · 安徽

【解析】 由空间四面体的棱、面关系可判断①④⑤正确，可举例说明②③错误.

【答案】 ①④⑤

【考题8】 设α和β为不重合的两个平面，给出下列命题：

①若α内的两条相交直线分别平行于β内的两条直线，则α平行于β；②若α外一条直线l与α内的一条直线平行，则l和α平行；③设α和β相交于直线l，若α内有一条直线垂直于l，则α和β垂直；④直线l与α垂直的充分必要条件是l与α内的两条直线垂直.

上面命题中，真命题的序号是________（写出所有真命题的序号）.

●2009 · 江苏

【解析】 由定理我们很容易知道①②是正确的，③α内有一条直线垂直于l，不能判定线面垂直，更不能判定面面垂直. ④直线l与α垂直的充分必要条件是l与α内的两条相交直线垂直. 因此③④是错误的.

【答案】 ①②