精 品 课 程　　名 师 讲 堂

线性代数

辅导讲案

主讲教材《线性代数》（同济·第五版）

主 编　赵美霞

◎本讲内容聚焦　◎典型例题　◎课后作业

REMEDIATION

TEACHING PLAN

西北工业大学出版社

精品课程·名师讲堂丛书

线性代数辅导讲案

——主讲教材《线性代数》(同济·第五版)

赵美霞 主 编
赵美霞 李昌兴 郑唯唯 杨秀妮 陈 芳 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是以同济大学数学系编写的《线性代数》(第五版)为蓝本编写而成的,内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型等. 本书共分15讲,各讲内容分为本讲内容聚焦、典型例题、课后作业三部分."本讲内容聚焦"显示了编者对课程内容的理解和长期教学积累的丰富经验;"典型例题"充分挖掘例题的作用,有助于读者在解题过程中达到举一反三,触类旁通的目的;"课后作业"使读者有一个巩固、提高和检测的机会,也使读者对各讲知识要点有更深刻的理解.

本书可作为理、工、农、经、医等非数学专业学生学习线性代数课程的同步学习指导书及数学教师的教学参考书,也可作为考研朋友的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲案/赵美霞主编. —西安:西北工业大学出版社,2009.12

ISBN 978-7-5612-2693-3

Ⅰ.线… Ⅱ.赵… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第218034号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072
电　　话:(029)88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张:10.75
字　　数:280千字
版　　次:2009年12月第1版 2009年12月第1次印刷
定　　价:18.00元

前　　言

“线性代数”是高等院校一门重要的数学基础课，也是考研数学的重要组成部分. 本书是根据教育部组织制定的新《线性代数教学基本要求》和《硕士研究生入学考试数学考试大纲》的要求编写的，为理、工、农、经、医等非数学专业学生学习线性代数课程的学习指导书，适合于初次学习线性代数课程的本、专科生和准备报考硕士研究生的人员使用，也可作为高等院校数学教师的教学参考书.

为了帮助学生学好线性代数课程，编者根据多年的教学经验，在对教材进行全面系统研究、分析的基础上，总结出一套适合学生学习、掌握、提高的学习方法，并将其融入本书的编撰过程. 全书共分 15 讲，各讲内容分为本讲内容聚焦、典型例题、课后作业三部分. 本讲内容聚焦部分指出了各讲基本要求、主要概念、定理及核心内容、重点与难点、知识点联系，使读者从整体上把握各讲所涵盖的知识要点，使知识更加系统化、条理化. 典型例题部分收集了各种经典题型和部分考研试题，力求做到选题全面，解答详细，对部分题目指出了解题思路，并对结论作出总结和评注，旨在帮助读者在以后的解题过程中达到举一反三、触类旁通的目的. 课后作业部分精心选择了各类试题，既基本又典

型，重点突出、覆盖面全，使读者学完各讲内容之后有一个巩固、提高和检测的机会，也使读者对各讲知识要点有更深刻的理解．我们在附录中对同济大学数学系编写的《线性代数》（第五版）教材的课后习题中的典型习题和有一定难度的习题给出了详细解答；还提供了 3 套考试真题，使读者学完本课程有一个检测、检验的机会．

全书共分 15 讲，其中第 1～3 讲由李昌兴编写，第 4，5 讲由郑唯唯编写，第 6，7 讲由杨秀妮编写，第 8～11 讲由陈芳编写，第 12～15 讲由赵美霞编写．全书由赵美霞统稿，并提供课程考试真题．

本书在编写的过程中，参阅了部分近几年国内外出版的一些相关教材与教学参考书，也得到了西安邮电学院、西安工程大学、西安科技大学相关老师的大力支持和帮助，西北工业大学出版社的领导和编辑们对本书的出版给予了大力支持，在此表示衷心的感谢．

我们恳切希望本书能对广大读者朋友学习线性代数有所帮助．由于编者水平有限，书中疏漏不妥之处，恳请读者批评指正．

编 者

2009 年 3 月

目　　录

第 1 讲　行列式的概念 …… 1

1.1　本讲内容聚焦 …… 1
1.2　典型例题 …… 4
1.3　课后作业 …… 9

第 2 讲　行列式的性质及按行(列)展开 …… 11

2.1　本讲内容聚焦 …… 11
2.2　典型例题 …… 14
2.3　课后作业 …… 32

第 3 讲　克拉默法则 …… 36

3.1　本讲内容聚焦 …… 36
3.2　典型例题 …… 38
3.3　课后作业 …… 41

第 4 讲　矩阵及其运算 …… 43

4.1　本讲内容聚焦 …… 43
4.2　典型例题 …… 52
4.3　课后作业 …… 61

第 5 讲　逆矩阵及矩阵分块法 …… 63

5.1　本讲内容聚焦 …… 63
5.2　典型例题 …… 69

5.3 课后作业……80

第6讲 矩阵的初等变换、矩阵的秩……82

6.1 本讲内容聚焦……82
6.2 典型例题……84
6.3 课后作业……95

第7讲 线性方程组的解……98

7.1 本讲内容聚焦……98
7.2 典型例题……100
7.3 课后作业……112

第8讲 n维向量及其线性相关性……115

8.1 本讲内容聚焦……115
8.2 典型例题……118
8.3 课后作业……124

第9讲 向量组的秩……127

9.1 本讲内容聚焦……127
9.2 典型例题……129
9.3 课后作业……135

第10讲 线性方程组解的结构……138

10.1 本讲内容聚焦……138
10.2 典型例题……140
10.3 课后作业……148

第11讲 向量空间……151

11.1 本讲内容聚焦……151

11.2 典型例题…… 153
11.3 课后作业…… 156

第 12 讲 向量的内积、长度及其正交性…… 158

12.1 本讲内容聚焦…… 158
12.2 典型例题…… 161
12.3 课后作业…… 163

第 13 讲 方阵的特征值与特征向量…… 165

13.1 本讲内容聚焦…… 165
13.2 典型例题…… 168
13.3 课后作业…… 176

第 14 讲 相似矩阵以及矩阵的对角化…… 178

14.1 本讲内容聚焦…… 178
14.2 典型例题…… 181
14.3 课后作业…… 200

第 15 讲 二次型及其标准形…… 202

15.1 本讲内容聚焦…… 202
15.2 典型例题…… 208
15.3 课后作业…… 222

附录…… 225

附录一 主讲教材课后习题精选详解…… 225
附录二 课程考试真题…… 304
附录三 课后作业和课程考试真题参考答案…… 313

参考文献…… 333

第1讲 行列式的概念

本讲涵盖了教材的第一章中第1～4节的内容(2学时)

1.1 本讲内容聚焦

一、内容要点精讲

(一) 教学基本要求

(1) 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.

(2) 了解排列、逆序数、对换的概念.

(3) 知道 n 阶行列式的定义.

(二) 内容提要

1. 二阶与三阶行列式

(1) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2. 全排列及其逆序数

(1) 把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列.

(2) 在一个排列中,当某两个元素的先后次序与规定的标准次

序不同时，就说有一个逆序.

(3) 一个排列中的所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

(4) 逆序数为奇数的排列叫做奇排列.

(5) 逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

3. n 阶行列式的定义

设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的项，其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，即 $t=t(p_1 p_2 \cdots p_n)$，所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

简记为 $\det(a_{ij})$.

4. 对换

(1) 对换：在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种做出新排列的手续叫做对换. 将相邻两元素对换，叫做相邻对换.

(2) 相关定理：

定理 1：一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论：奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

定理 2：n 阶行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

其中,t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

5. 一些特殊行列式的值

(1) 上(下)三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 副三角行列式的值等于添加适当正、负号的次对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 分块三角行列式可化为低阶行列式的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

二、知识结构图解

$$\text{行列式概念}\begin{cases} \text{二阶、三阶行列式的计算公式} \\ \text{排列}\begin{cases} \text{逆序、逆序数} \\ \text{奇排列、偶排列} \end{cases} \\ n\text{ 阶行列式的定义} \\ \text{一些特殊行列式的计算} \\ \text{对换} \end{cases}$$

三、重点、难点点击

行列式是研究线性方程组、矩阵、特征多项式等问题的重要工具.

重点:二阶与三阶行列式的计算、一些特殊高阶行列式的计算.

难点:逆序数、n 阶行列式的概念.

1.2 典型例题

例 1.1 按自然数从小到大的标准顺序,求下列排列的逆序数.

(1)21736854

(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

分析 计算一个排列的逆序数主要有两种思路:思路一,按排

列的次序分别计算出每个数的后面比它小的数的个数,然后再求和;思路二,按自然数的顺序分别计算出排在1,2,3,… 前面比它大的数的个数,再求和.

解 (1) 解法一

2的后面有1小于2,故2的逆序数为1;

1的后面没有小于1的数,故1的逆序数为0;

7的后面有3,6,5,4小于7,故7的逆序数为4;

3的后面没有小于3的数,故3的逆序数为0;

6的后面有5,4小于6,故6的逆序数为2;

8的后面有5,4小于8,故8的逆序数为2;

5的后面有4小于5,故5的逆序数为1;

4排在末尾,故4没有逆序.

可知此排列的逆序数为

$$t=1+0+4+0+2+2+1+0=10$$

解法二

2排在首位,故没有逆序;

1前面比1大的数有一个2,故1的逆序数是1;

7前面没有比7大的数,故7的逆序数为0;

3前面有一个7比3大,故3的逆序数为1;

6前面有7比6大,故6的逆序数为1;

8前面没有比8大的数,故8的逆序数为0;

5前面有7,6,8比5大,故5的逆序数为3;

4前面有7,6,8,5比4大,故4的逆序数为4.

可知排列的逆序数为

$$t=1+0+1+4+3+1+0+0=10$$

(2) 此排列的前n个数$135\cdots(2n-1)$之间没有逆序,后n个数$246\cdots(2n)$之间也没有逆序,只是前n个数与后n个数之间才有逆序,用思路一容易得到此排列的逆序数为

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)+0+0+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1)$$

用思路二得到的逆序数为

$$t=0+(n-1)+0+(n-2)+0+\cdots+0+1+0=\frac{1}{2}n(n-1)$$

例 1.2 设排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为 m，求排列 $p_n\cdots p_2p_1$ 的逆序数.

分析 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 逆序对的个数等于排列 $p_n\cdots p_2p_1$ 顺序对的个数.

解 在排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中任取两个数 p_i 和 $p_j(i<j)$，则数对 (p_i,p_j) 或为逆序对或为顺序对，该排列的所有数对总和为 C_n^2，故排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的顺序数为 C_n^2-m 个，所以排列 $p_n\cdots p_2p_1$ 逆序数为C_n^2-m.

例 1.3 已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在四阶行列式中带负号，试求 j 与 k.

分析 注意到本例有两种解法，一种方法是将该项的行标按自然顺序排好，再用列标为奇排列来确定 j 与 k. 另一种方法是直接计算行标排列的逆序数与列标排列的逆序数，使其和为奇数来确定 j 与 k.

解 解法一

由于 $$a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$$

$2kj1$ 是 1234 的排列，所以

$$k=3,\quad j=4$$

或 $$k=4,\quad j=3$$

如果 $k=3,j=4$，则

$$t(2kj1)=t(2341)=1+2+1=4$$

即 $2kj1$ 为偶排列，这与 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 带负号矛盾. 从而所求 j 与 k 分别是 3 和 4.

解法二 类似解法一，可确定 $k=3,j=4$ 或 $k=4,j=3$. 如果 $k=3,j=4$，则 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 的行标排列与列标排列的逆序数之和为

$$t(3142)+t(j21k)=t(3142)+t(3214)=3+3=6$$

是偶数，这与该项带负号矛盾．故所求 j 与 k 分别是 3 和 4.

评注 若 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=a_{1r_1}a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$

则 $$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)+t(q_1q_2\cdots q_n)}=(-1)^{t(r_1r_2\cdots r_n)}$$

但是 $t(p_1p_2\cdots p_n)+t(q_1q_2\cdots q_n)$ 不一定等于 $t(r_1r_2\cdots r_n)$，它们只是奇偶性相同，这一点不要混淆.

例 1.4 写出五阶行列式中含有因子 $a_{23}a_{32}$ 并带负号的所有项.

分析 应写出五阶行列式中含有因子 $a_{23}a_{32}$ 的不同行不同列的 5 个元素的乘积项，再根据排列的逆序数确定所求的项.

解 五阶行列式含有因子 $a_{23}a_{32}$ 的一般项为

$$(-1)^{t(q_132q_4q_5)}a_{1q_1}a_{23}a_{32}a_{4q_4}a_{5q_5}$$

其中 $q_1q_4q_5$ 是 1,4,5 这三个数所构成的全排列，相应项分别为

$$(-1)^{t(13254)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}=a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$$

$$(-1)^{t(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}$$

$$(-1)^{t(43215)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$$

$$(-1)^{t(43251)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51}=-a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51}$$

$$(-1)^{t(53241)}a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}=a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}$$

$$(-1)^{t(53214)}a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54}=-a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54}$$

所以五阶行列式中含有因子 $a_{23}a_{32}$ 并带负号的所有项为

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55},\quad -a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51},\quad -a_{15}a_{23}a_{32}a_{41}a_{54}$$

例 1.5 试求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

分析 根据行列式的定义，在四阶行列式的展开式的 24 项中，找出含 x^4 与 x^3 的项，即可确定 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 在表示 $f(x)$ 的四阶行列式中，位于不同行不同列的 4 个元素乘积含有 x^4，那么各行各列必含有 x 的因子．即只能是 a_{11}，a_{22}，

a_{33},a_{44}四个元素的乘积,即含有 x^4 的项有 1 项

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x\cdot x\cdot x\cdot x=2x^4$$

从而 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 2.

对于 x^3,可以判断必不含 a_{11},若含 a_{12},则可由 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$,$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 分别构成. 若不含 a_{12},则可由 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 构成,并且

$$(-1)^{t(2431)}a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}=(-1)^4x\cdot(-1)\cdot x\cdot x=-x^3$$

$$(-1)^{t(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^1x\cdot 1\cdot x\cdot x=-x^3$$

$$(-1)^{t(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=(-1)^5 2\cdot x\cdot x\cdot x=-2x^3$$

所以 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -4.

例 1.6 用定义计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

分析 由行列式的定义,n 阶行列式的展开式中有 $n!$ 项,且每一项是由位于不同行不同列的 n 个元素的乘积并添加适当的符号构成的,若这 n 个元素中有某一个元素为零,则该乘积为零. 对于含零元素较多的行列式可以用定义进行计算,此时只要求出行列式展开式中所有非零元素乘积项即可求得该行列式的值.

解 根据行列式定义,D_n 的一般项为

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

若要该项不为零,必有

$$p_1=n-1,p_2=n-2,\cdots,p_{n-1}=1,p_n=n$$

故有

$$\begin{aligned} D_n=&(-1)^{t[(n-1)(n-2)\cdots 21n]}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}= \\ &(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n= \\ &(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n! \end{aligned}$$

评注 对于行列式，要认识到它是不同行不同列元素乘积的代数和，要处理好每一项所带的正负号，它是由排列的奇偶性决定的.这里的行列式有较多的零，因而可以用定义分析法来论证，以加深对概念的理解，但是即便有如此多的零，我们仍应当用行列式的性质，展开定理来计算，以减少工作量.

例 1.7 已知 n 阶行列式 D 中至少有 n^2-n+1 个零，试证 $D=0$.

解 因为 n 阶行列式 D 中共有 n^2 个元素，现在其中至少有 n^2-n+1 个零，故非零元素至多有 $n-1$ 个，从而取自不同行不同列的 n 个元素 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 中至少有一个是零，再根据行列式的定义，有

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$$

可知 $D=0$.

1.3 课后作业

1. 求下列排列的逆序数，并确定是奇排列还是偶排列.

(1)3254176

(2)$246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$

2. 已知排列是偶排列，确定下列 i,j 的值.

(1) $3972i15j4$

(2)$1i25j4897$

3. 写出四阶行列式中包含因子 $a_{12}a_{24}$ 且带正号的项.

4. 用行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ x & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.