银领工程
高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

高等数学学习指导

专升本适用

薛桂兰　牛　莉　主编

高等教育出版社
Higher Education Press

O13
63

银领工程
高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

高等数学学习指导

专升本适用

薛桂兰　牛　莉　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是高职高专银领工程系列教材之一，是一本为大学专科层次的学生和读者编写的高等数学课程学习辅导类教材。全书共分三部分："高等数学"部分包括第一章至第十二章，主要内容有函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数微分学的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，曲线积分，无穷级数；"线性代数"部分是第十三章；第三部分是模拟试卷。

本书内容通俗浅显，各章配有基本要求、基本知识、典型例题、同步练习和综合测试题，书后附优秀全真模拟试卷十五套，能够满足不同程度学生的要求，适应面广，可伸缩性强。本书可作为高等职业院校、高等专科院校、成人高等院校、本科院校举办的二级职业技术学院相关专业的教学用书，也可供五年制高职院校、中等职业学校及其他有关人员使用，对于从事高等数学教学工作的高职高专院校的老师也是一本内容翔实的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/薛桂兰，牛莉主编．—北京：高等教育出版社，2005.6

专升本适用

ISBN 7-04-016435-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①薛…②牛…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-自学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 038981 号

策划编辑 罗德春　**责任编辑** 王文颖　**封面设计** 张　志　**责任绘图** 朱　静

版式设计 王艳红　**责任校对** 俞声佳　**责任印制** 孔　源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005 年 6 月第 1 版
印　　张	27.5	**印　　次**	2005 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	620 000	**定　　价**	31.40 元

物料号　16435-00

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自2001年10月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开了全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能型人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于固化并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型紧缺人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入“银领工程”丛书系列。

“银领工程”丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校开办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社
2004年9月

前　　言

高等数学是高职高专理工科院校学生的一门重要的基础理论课,但目前在高等数学教学过程中,正面临着一个日益突出的矛盾:一方面高等数学课的学时普遍减少,另一方面期末考试、后续专业课程以及专升本、专接本考试对这门课程又有较高的要求。为了适应教学的这一现状,我们编写了这本《高等数学学习指导》,以帮助学生更好地学习和掌握理工科高等数学课程的内容。

本书编写要求以教育部制定的考试大纲为依据;内容深度和广度符合专科、高职、高专类教材和成人教育规划教材(专科)要求;遵循注重概念、强化应用、提高能力的原则;针对专科、高职、高专学校的教学目标,按高等数学核心知识的要求精选典型例题,通过对典型例题进行解析、解答,方便学生在解题过程中以此为范本理解高等数学的知识点,掌握基本的解题方法,提高分析问题、解决问题的能力。

本书在编写上具有以下几个特点:

一、基本要求、基本知识画龙点睛地指出了教材的学习目的和要求,使学生做到心中有数,有的放矢。

二、典型例题对各知识点、考点进行深入浅出的论述和分析,旁征博引,比较详尽地介绍了各种常用的解题方法和解题技巧。同学们掌握了这些方法和技巧,做题时就等于走了捷径,能收到事半功倍的效果。

三、为了体现专科、高职高专类教材的特点,每章都配有结合例题的习题。在题型选择上注重应用性、新颖性和创造性,以开拓学生的视野,为学生向高层次发展奠定基础。

四、本书在编写中既注重基础训练,又注重与专升本考试的要求相衔接,每章都配有一定数量的全国历年专升本考题,具有较高的复习备考参考价值。

本书的主要内容有函数,极限与连续,一元函数微分学,一元函数微分学的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,常微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,曲线积分,无穷级数,线性代数。书后选编了十五套优秀全真模拟试题,以便考生对复习效果进行自测检查、验收,巩固复习成果。

本书结构以章为纲,每章按照基本要求、基本知识、典型例题、同步练习和综合测试题组成,模拟试卷按 150 分编制,每套试卷由选择题、填空题、计算题、综合题和证明题构成。

本书由薛桂兰、牛莉任主编,其中第一章、第二章由白春盛编写,第三章、第五章、第六章、第九章、第十一章由薛桂兰编写,第四章、第七章、第八章由王仲英编写,第十章、第十二章、第十三章由牛莉编写。

本书在编写过程中参考了大量高等数学教材和相关的复习辅导用书，在此向有关作者、编者表示衷心的感谢！

限于编者的水平，书中一定存在缺点和不足之处，敬请读者提出宝贵意见，并批评指正。

编者

2005.3.18

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　模拟试卷

第一部分　高等数学

第一章　函数　极限　连续

【基本要求】

1. 理解函数的概念. 了解函数的单调性、周期性和奇偶性. 了解反函数、复合函数的概念.

2. 熟练掌握基本初等函数的图形.

3. 能将简单实际问题中的函数关系表达出来.

4. 了解极限的 $\varepsilon-N,\varepsilon-\sigma$ 的定义,并能在学习过程中逐步加深理解极限的思想. 能正确应用极限四则运算法则.

5. 了解判别极限存在的单调有界准则和夹逼准则,会用两个重要极限求一些极限.

6. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较.

7. 理解函数在一点连续和间断的概念.

8. 了解初等函数的连续性. 知道在闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大值、最小值定理).

【基本知识】

一、函数

(一) 函数的概念

1. 定义:设 D 是一个数集,x 和 y 是两个变量,如果当变量 x 在 D 中任取一个值时,变量 y 按照确定的对应法则 f 总有唯一确定的值与之对应,则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的函数,记做 $y=f(x)$,数集 D 叫做这函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

2. 函数解析表示法中常见的几个形式

(1) 显函数:形如 $y=f(x)$ 形式的函数称为显函数. 如:$y=3x^2+5\sin x$ 等.

(2) 隐函数:如果函数的对应法则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出的,则称 y 为 x 的隐函数.

(3) 分段函数:如果函数的对应法则是由几个解析式表示的,则称之为分段函数.

如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x<1,\\ x^2, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是由三个解析式来表达的定义域为$(-\infty,+\infty)$的一个函数.

(4) 参数方程表示的函数:如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来,如:$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ 则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

(二) 函数的性质

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果存在正数 M,使得对于一切 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 内是有界的;如果这样的 M 不存在,则称函数 $y=f(x)$在这区间 I 内是无界的.

在定义域内有界的函数称为有界函数,有界函数 $y=f(x)$在平面直角坐标系中的图形介于两条水平直线之间.

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,任给 x_1、$x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上是单调增加的;如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上是单调减少的,单调增加与单调减少统称为函数的单调性.

在定义域内单调增加(减少)的函数称为单调增加(减少)函数,单调增加(或单调减少)的函数 $y=f(x)$在平面直角坐标系中的图形自左至右是上升(或下降)的曲线.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于坐标原点对称,如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数;如果对于定义域 D 中的任何x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在常数 $T(T>0)$,使得对于定义域 D 中的任何 x,若 $x\pm T$ 也在定义域D 中,且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,满足上式的最小正常数 T 称为$f(x)$的最小正周期,简称周期.

例如:$y=\sin x$,$y=\tan x$ 等都是周期函数,周期分别是 2π 和 π.

(三) 函数的运算

1. 复合运算

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$的定义域为 D,且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数 $y=f[g(x)](x\in D)$称为由函数$u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量.

例如:$y=\sin 2x$ 是由 $y=\sin u$,$u=2x$ 复合而成的.

复合函数实际上是将中间变量代入后所构成的函数,复合函数不仅可以由两个函数,而且可以由多个函数经过复合构成.

若函数 $y=f(u)$的定义域与函数 $u=g(x)$的值域交集是空集,这样的两个函数不能构成复合函数.

2. 反函数(函数的逆运算)

定义:设给定 y 是x 的函数$y=f(x)$,若将 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系 $y=f(x)$所确定的函数 $x=\varphi(y)$叫做函数 $f(x)$的反函数,$f(x)$叫做直接函数.

$y=f(x)$的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

若直接函数 $y=f(x)$的定义域是 D,值域是 M,则反函数 $y=f^{-1}(x)$定义域是 M,值域是 D.

直接函数 $y=f(x)$的图像与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

任何一个反函数都是依赖直接函数而存在的,单纯说一个函数是反函数无意义.

(四) 基本初等函数与初等函数

1. 基本初等函数

幂函数:$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数);

指数函数:$y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$);

对数函数:$y=\log_{a}x$($a>0$ 且 $a\neq1$),当 $a=\mathrm{e}$ 时,记为 $y=\ln x$;

三角函数:如 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$;

反三角函数:如 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.例如

$$y=\sqrt{1-x^{2}},\ y=\sin^{2}x,\ y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数,在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

二、极限

(一) 数列极限

1. 数列

按照一定顺序排列的一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$称为数列,记作$\{x_n\}$,数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n称为数列的通项(一般项).

数列$\{x_n\}$可看成定义域是全体正整数的函数 $y=f(n)=x_n$.

设有数列$\{x_n\}$,如果对于每个 n,都有 $x_n\leqslant x_{n+1}$($x_n\geqslant x_{n+1}$),则称$\{x_n\}$是单调增加(单调减少)数列;若 $x_n<x_{n+1}$($x_n>x_{n+1}$),则称$\{x_n\}$是严格单调增加(严格单调减少)数列.

设有数列$\{x_n\}$,如果存在正数 M,使得对一切 n,都有$|x_n|\leqslant M$,则称$\{x_n\}$是有界数列,否则称为无界数列.

2. 数列极限的定义

设有数列$\{x_n\}$,如果对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 N,使得当 $n>N$ 时,有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,此时,也称数列$\{x_n\}$收敛于 a.如果数列极限不存在,则称数列$\{x_n\}$发散.

3. 收敛数列的性质

唯一性:若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限值必唯一;

有界性:若数列$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$有界.

该命题反过来不成立,即有界数列不一定收敛.例如,数列 1,0,1,0,…有界,但不收敛.

4. 四则运算法则

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a+b$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=ab$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}\,(b\neq 0)$.

5. 夹逼准则

若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足不等式 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n\ (n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

6. 单调有界数列极限存在定理

单调有界数列必有极限.

(二) 函数的极限

1. 函数极限的定义

定义:如果在自变量的变化过程中,函数值 $f(x)$(可以是数列)无限接近于 A,就称 A 是函数$f(x)$的极限,记作

(1) 当 $x\to x_0$,$f(x)\to A$;或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的左极限 ,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或$f(x_0-0)=A$.

函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的右极限 ,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或$f(x_0+0)=A$.

当 $x\to x_0$时函数极限存在的**充分必要条件**是左、右极限存在且相等,即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

(2) 当 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to A$ 的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to\infty$).

($\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$.)

2. 函数极限的性质

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则必存在点 x_0 的某一去心邻域,在该邻域内,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

如果在点 x_0 的某一去心邻域内有 $f(x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$),且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$,则必有 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(三) 函数极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼准则) 设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在点 x_0的某一去心邻域内(或$|x|>M$)有定义,如果下列条件均成立:

(i) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$;

(ii) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$,

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

准则Ⅱ 单调有界函数必有极限.

(四) 函数极限四则运算法则

设有函数 $f(x)$、$g(x)$,如果在自变量的同一变化过程中,有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=B$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=A\pm B,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=AB,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}\,(B\neq 0).$$

(五) 两个重要极限

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(六) 无穷小和无穷大

1. 定义

无穷小的定义:如果在自变量的变化过程中,函数 $f(x)$的极限为零,则称函数 $f(x)$为自变量在此变化过程中的无穷小量(简称无穷小),记作 $\lim f(x)=0$,其中 lim 是简记符号,可表示 $x\to x_0$(或 $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$), $x\to\infty$(或 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$)等.

无穷大的定义:如果在自变量的某一变化过程中,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,则称函数

$f(x)$为自变量在此变化过程中的无穷大量(简称无穷大),记作 $\lim f(x)=\infty$,其中 lim 是简记符号,可表示 $x\to x_0$(或 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$),$x\to\infty$(或 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$)等.

2. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小;

(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小;

(3) 有界函数与无穷小的积是无穷小;

(4) 无穷大的倒数为无穷小,当无穷小不为 0 时其倒数为无穷大;

(5) 无穷小与函数极限的关系:$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\alpha(x)=0$.

3. 无穷小阶的比较

设 α、β 都是自变量 x 同一变化过程中的无穷小,

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称在 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$时,$\alpha(x)$是比 $\beta(x)$高阶的无穷小,记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;同时也称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$低阶的无穷小;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\,(c\neq0,1)$,则称在 $x\to x_0(x\to\infty)$时,$\alpha(x)$是与 $\beta(x)$同阶的无穷小;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则在 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$时,称 $\alpha(x)$是与 $\beta(x)$等价的无穷小,记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

4. 等价无穷小的代换定理

设 $\alpha(x)$、$\alpha'(x)$,$\beta(x)$,$\beta'(x)$是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小,且 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$,$\beta(x)\sim\beta'(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$存在,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$.

三、函数的连续性

(一) 连续性的概念

1. 连续定义

设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某一邻域内有定义,如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$趋向于 0 时,对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋向于 0,那么就称函数 $y=f(x)$在点 x_0连续.

函数 $y=f(x)$在点 x_0连续的定义又可叙述如下:

设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某一邻域内有定义,如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的极限存在且等于在 x_0处的函数值 $f(x_0)$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,那么就称函数 $f(x)$在点 x_0处连续.

2. 左连续、右连续的概念

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$存在且等于 $f(x_0)$,即 $f(x_0-0)=f(x_0)$,就说函数$f(x)$在点

x_0左连续. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0+0)$存在且等于 $f(x_0)$, 即 $f(x_0+0) = f(x_0)$, 就说函数 $f(x)$在点 x_0右连续.

函数 $y=f(x)$在点 x_0连续的**充分必要条件**是 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

3. 区间连续

如果函数 $y=f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续, 则称 $f(x)$在(a,b)内连续. 如果函数 $y=f(x)$在开区间(a,b)内连续, 在区间端点 a 右连续, 在区间端点 b 左连续, 则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

(二) 函数的间断点

1. 定义

函数 $f(x)$在点 x_0存在下列 3 种情形之一:

在 $x=x_0$处没有定义;

虽在 $x=x_0$有定义, 但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在;

虽在 $x=x_0$有定义, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在, 但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

则称 $f(x)$在点 x_0不连续, 而点 x_0称为 $f(x)$的间断点.

2. 函数的间断点的分类

(1) 第一类间断点

如果函数 $f(x)$在点 x_0处的极限存在, 但在点 x_0没有定义, 或 $f(x_0)$不等于 $f(x)$在点 x_0的极限值, 则称点 x_0为函数 $f(x)$的可去间断点.

如果函数 $f(x)$在点 x_0处的左极限和右极限都存在, 但二者不相等, 则称点 x_0为函数 $f(x)$的跳跃间断点.

可去间断点和跳跃间断点统称第一类间断点. 其特征是: 函数在该点处的左极限和右极限都存在.

(2) 第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点. 常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点.

第二类间断点的特征是: 函数 $f(x)$在点 x_0处的左极限和右极限中至少有一个不存在.

(三) 连续性的运算

1. 设 $f(x)$、$g(x)$在点 x_0处连续, 则 $f(x) \pm g(x)$在点 x_0处连续.

2. 设 $f(x)$、$g(x)$在点 x_0处连续, 则 $f(x) \cdot g(x)$在点 x_0处连续.

特别 $kf(x)$在点 x_0处也连续(k 常数).

3. 设 $f(x)$、$g(x)$在点 x_0处连续, 且 $g(x_0) \neq 0$, 则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在点 x_0处也连续.

4. 设 $y=f(u)$、$u=g(x)$可以复合为 $y=f[g(x)]$. 若 $u=g(x)$在 x_0处连续, $y=f(u)$在

相应点 $u_0=g(x_0)$处连续,则复合函数 $y=f[g(x)]$在 x_0处连续.

即有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f[g(x_0)]$.

(四) 闭区间$[a,b]$上连续函数的性质

1. 在闭区间$[a,b]$上连续的函数一定在该区间上有界.

2. 在闭区间上连续的函数在该区间上必有最大值和最小值.

3. 介值定理:设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)\neq f(b)$,则对于任意介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的 c,必定存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=c$.

4. 在闭区间$[a,b]$上连续函数 $f(x)$,如果端点函数值异号,即 $f(a)\cdot f(b)<0$,则函数 $f(x)$在开区间(a,b)内有零点,即至少有一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

(五) 初等函数的连续性

1. 基本初等函数在它的定义域内是连续的.

2. 初等函数在它的定义区间内是连续的.

3. 设 $f(x)$是初等函数,x_0是它定义区间内的一点,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$.

【典型例题】

【例 1】 求下列函数的定义域.

1. $y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$;

2. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$;

3. $y=\arcsin(1-x)+\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}+\ln(x+4)$.

解 1. 函数$\dfrac{1}{x(x-4)}$的定义域为 $x\neq0,x\neq4$,即$(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$;

对于函数$\sqrt{\ln(2+x)}$,由 $\ln(2+x)\geqslant0$,得 $2+x\geqslant1$ 即 $x\geqslant-1$,故定义域为$[-1,+\infty)$.

所以函数 $y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$的定义域为它们的交集,即$[-1,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.

2. 对于函数$\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$,由 $2-x^2>0$ 得$|x|<\sqrt2$,因此其定义域为$(-\sqrt2,\sqrt2)$;

对于函数 $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$,由$\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|\leqslant1$,得 $0\leqslant x\leqslant4$,因此其定义域为$(0,4)$.

故函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$的定义域为$(-\sqrt2,\sqrt2)\cap[0,4]=[0,\sqrt2]$.

3. 函数 $\arcsin(1-x)$的定义域为$[0,2]$;

对于函数$\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$,由$\dfrac{1+x}{1-x}>0$,得 $-1<x<1$,即定义域为$(-1,1)$.

故函数 $y=\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$的定义域为$[0,2]\cap(-1,1)=[0,1)$.

4. 对于$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$,由 $x^2-4>0$ 得 $x>2$ 或 $x<-2$,定义域为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$;

对于 $\ln(x+4)$,定义域是 $x+4>0$,得 $x>-4$,取它们的交集得原函数的定义域为$(-4,-2)\cup(2,+\infty)$.

【例 2】 求函数值.

1. 设 $f(x)=2^{x-2}$,求 $f(-2)$、$f(0)$、$f\left(\frac{5}{2}\right)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\leqslant -1,\\ \sqrt{1+x^2}, & -1<x\leqslant 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(2)$.

3. 设 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$,求 $f[f(x)](x\neq 0)$.

4. 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$,求 $f\{f[f(x)]\}$.

5. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,$g(x)=1+x^2$,求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$、$f[f(x)]$、$g[g(x)]$、$f[g(x)]$、$g[f(x)]$的表达式,并指出它们的定义域.

解 1. $f(-2)=2^{-2-2}=2^{-4}=\frac{1}{16}$, $f(0)=2^{0-2}=2^{-2}=\frac{1}{4}$,

$f\left(\frac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}-2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

2. $f(-2)=-(x+1)=1$,$f(0)=\sqrt{1+x^2}=1$,$f(2)=0$.

3. $f[f(x)]=\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-x}}{1-\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1-x+1+x}{1-x-1-x}=-\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$.

4. 求 $f[f(x)]$就是用 $f(x)$代替 x 然后化简,得

$$f[f(x)]=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x},$$

由此可推得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}.$$

5. $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}(x\neq -1)$,

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{1+x+1}=\frac{1+x}{2+x}(x\neq -2),$$

$$g[g(x)]=1+(1+x^2)^2=x^4+2x^2+2 \quad (x\in(-\infty,+\infty)),$$

$$f[g(x)]=\frac{1}{1+(1+x^2)}=\frac{1}{x^2+2}(x\in(-\infty,+\infty)),$$

$$g[f(x)]=1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2=\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}(x\neq -1).$$

【例 3】 求函数的表达式.

1. 设 $f(1+x)=x^2+3x+5$,求 $f(x)$.

2. 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$的表达式.

解 1. **解法一** 设 $1+x=t$,则 $x=t-1$.

$f(t)=f(1+x)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3$,故 $f(x)=x^2+x+3$.

解法二 $f(1+x)=(1+x)^2+(1+x)+3$,故 $f(x)=x^2+x+3$.

2. 设 $u=e^x+1$,即 $x=\ln(u-1)$.

$$\begin{aligned}f(u)&=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1\\&=(u-1)^2+(u-1)+1\\&=u^2-u+1,\end{aligned}$$

从而有 $f(x)=x^2-x+1$.

此题也可直接将 $f(e^x+1)$的表达式凑成 e^x+1 的函数,即

$$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1,$$

故 $f(x)=x^2-x+1$.

【例 4】 求下列函数的反函数.

1. $y=e^x+1$; 2. $y=\frac{1+x}{1-x}$.

解 1. 由 $y=e^x+1$ 得 $e^x=y-1$,故 $x=\ln(y-1)$,而函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图像重合;交换 x 与 y 的位置,$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称,
得反函数 $$y=\ln(x-1).$$

2. 由 $y=\frac{1+x}{1-x}$,得 $y(1-x)=1+x$,即 $x=\frac{y-1}{y+1}$;交换 x 与 y 的位置得反函数 $y=\frac{x-1}{x+1}$.

【例 5】 下列各函数中,哪些是奇函数?哪些是偶函数?哪些是非奇非偶函数?

1. $f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})\cos x$; 2. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

3. $f(x)=\frac{\sin(\cos x)}{x}$; 4. $f(x)=x^3+\frac{\arctan x}{x}(x\neq 0)$.