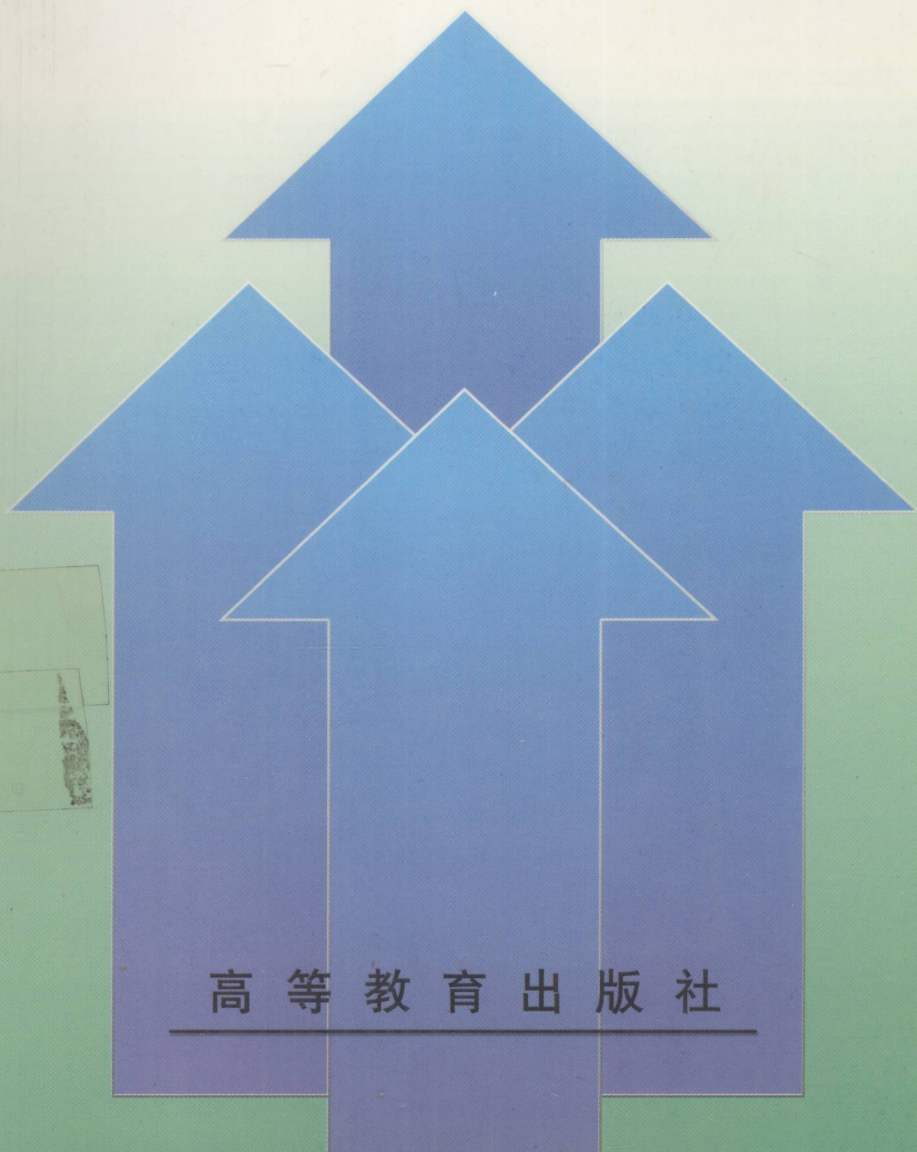


2002 年全国硕士研究生入学考试

基础知识复习丛书

数学 (理工类)

李正元 主编



高等教育出版社

2002 年全国硕士研究生入学考试基础知识复习丛书

数 学

(理工类)

主编	李正元		
编者	刘西垣	周民强	林源渠
	周建莹	尤承业	娄元仁
	孙山泽		

江苏工业学院图书馆
藏书章

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学. 理工类/李正元主编. —北京: 高等教育出版社, 2001. 3
(2002 年全国硕士研究生入学考试基础知识复习丛书)
ISBN 7-04-008581-X

I. 数… II. 李… III. 高等教学-研究生-入学考试-自学参
考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 09002 号

责任编辑 蒋 青 封面设计 刘 翔 版式设计 史新薇 责任印制 杨 明

2002 年全国硕士研究生入学考试基础知识复习丛书——数学(理工类)
李正元 主编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010—64054588

传 真 010—64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京市朝阳区北苑印刷厂

开 本 787×1092 1/16

版 次 2001 年 3 月第 1 版

印 张 30

印 次 2001 年 3 月第 1 次印刷

字 数 730 000

定 价 31.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

编者的话

2002年全国硕士研究生入学考试又要开始准备了.为了协助广大考生加强数学训练,提高应试能力,我们编写了数学科目的考前复习指导用书.

数学科目的考试分理工和经济两个大类.对于每一大类,复习指导用书又分复习用书(即基础知识复习)和练习用书(即强化训练)两册,配套使用.

复习用书分为三个部分:高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步.每一部分又分为若干章节.编写指导思想、结构和内容以教育部制定的考试大纲为依据.陈述方式除给出基本事项或知识要点外,均通过典型例题或历年试题来介绍解题思路与方法.考虑到应试的实际情况,题型的选择与解法也可能是综合型的,即在保证重点的情况下不排除运用后续的知识.

练习用书分为三个部分:单元练习、综合练习、模拟试卷.单元练习部分仍按章节体系编写;综合练习则只按学科分支编排;模拟试卷按专业分类,每类三组题[如数学(一)有三组……数学(四)有三组].练习用书供考生自我练习用,虽然附有参考答案,但考生务必自己首先独立解题,然后,根据需要,再与解答进行对照和分析.

历年研究生考试数学试题的特点是量大、面广、综合性强,而从近两年的情况看,少数试题还有深化的趋势,为了取得好的成绩,我们对考生的考前复习提出以下三点:

1. “一传到位”.这里借用排球运动的术语,是指在解题时一定要及时弄清楚本命题内容所涉及的范围,以及熟悉解决这类问题的基本途径或常规方法.例如求函数的导数问题,首先要弄明白该函数是以什么形式出现的,若是分段函数,则在分段点必须用左、右求导的方法进行;如果该函数以积分形式出现,如求

$$\frac{d}{dx} \int_0^x x f(x-t) dt,$$

因为是对 x 求导,而积分号下又含有变量 x ,这在定积分的学习中是没有的,所以我们只能设法通过变换将积分号下的 x 化去,使被积函数中不再出现 x ,即写成

$$\int_0^x x f(x-t) dt = x \int_0^x f(x-t) dt \frac{x-t=u}{dt=-du} = x \int_x^0 f(u) du = x \int_0^x f(u) du.$$

然后就可以求导了.

2. “胸有典型”.这里所说的“典型”是指每一部分内容里最基本且常用的某些范例.而“胸有”的意思是必须熟知这些事实.例如在微积分中的两个重要函数极限;基本初等函数的导数公式;等价极限关系:

$$\varphi(x) \sim \sin \varphi(x) \sim \tan \varphi(x) \sim \ln(1 + \varphi(x)) \quad (x \rightarrow 0),$$

其中 $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$); p 级数, x^{-p} 的广义积分;基本幂级数的和,如

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),$$

以及基本初等函数泰勒级数展式等等. 显然, 若对这些事实能“想到就来”, 则将对解答试题大有裨益.

3. “步步为营”. 为了从形式上减少命题数量, 也为检查考生融会贯通的能力, 试卷上常出现多种概念、方法和要求并存的所谓综合命题. 此时, 我们必须将整个命题分成若干小题, 一步一步地解出来. 要做到这一点, 第一要敢于分解, 第二要善于分解. 如 1999 年微积分部分有试题:

“设 $y(x)$ ($x \geq 0$) 二阶可导且 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(z)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.”

这一试题属于综合题型. 从命题 100 多字的陈述中一句一句读下来, 易知它涉及求切线、面积与函数等, 从而要分三个步骤一一解决.

第一求切线: 因为在点 $P(x, y)$ 的导数是 $y'(x)$, 所以过此点的切线为

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$

第二求面积: S_1 是直角三角形面积, S_2 是曲边梯形面积, 要用定积分, 即 $S_2 = \int_0^x y(t) dt$.

第三求 $y(x)$: 在上面两步中, 由于 $y(x)$ 是未知的, 故具体的面积值并未求出, 都是变量 x 的函数. 为求出 $y(x)$, 就微积分范围而言, 是属于微分方程求解的问题. 那么方程在哪里? 其实题设指出的 $2S_1 - S_2 = 1$ 就是方程, 即

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t) dt = 1.$$

要从这一方程解出 $y(x)$ 来, 必须把积分号下的 y “解放”出来, 办法当然是求导, 最后可得

$$yy'' = (y')^2,$$

这就是 $y = y(x)$ 满足的微分方程, 由微分方程理论可解出.

总起来说, 就是一传到位, 胸有典型, 步步为营.

此外, 需要提醒读者的是, 对于本书所编的大量例题和练习, 并非每题都要细读细做, 而应根据自己的具体情况来定. 虽然每年的试题都有些变化, 但知识的范围和结构基本相同, 因此, 掌握基本概念、基础理论、常用方法是最重要的. 精读, 学会解决一定数量的范例不失为应试的重要方法.

本书是北京大学数学科学学院举办的硕士研究生入学考试数学辅导班的教材. 对本书中存在的不足之处, 请广大读者提出意见和建议. 欢迎考生参加我院举办的暑期辅导班.

编者

于北京大学数学科学学院

2001 年 2 月

目 录

第一部分 高等数学	1	十一、分别求左、右极限	33
第一章 函数	1	十二、求二元函数的极限	33
第一节 函数的有关概念和几种特性	1	第五节 函数的连续性及其判断	34
第二节 分段函数与积分上限的函数	5	一、连续性概念	34
第二章 极限 连续 求极限的方法	9	二、间断点的定义与分类	34
第一节 极限的概念与性质	9	三、连续性运算法则	34
一、定义	9	四、怎样判断函数的连续性	34
二、基本性质	10	五、二元函数的连续性	36
三、与极限的不等式性质有关的若干问题	11	第三章 导数 微分法	37
第二节 极限的存在与不存在问题	11	第一节 导数的概念	37
一、数列 x_n 敛散性的判别	11	一、导数的定义及函数的连续性	37
二、函数 $y = f(x)$ 的极限的存在与不存在问题	12	二、用导数求某些函数的极限	38
三、证明多元函数 $z = f(x, y)$ 极限不存在的问题	13	第二节 微分法则	39
第三节 无穷小量和它的阶	14	一、内容提要	39
一、无穷小量 极限 无穷大量	14	二、分段函数的情形	42
二、无穷小量的阶	15	三、变限积分的情形	46
三、无穷小量阶的运算性质	15	第三节 隐函数以及参数方程表示的函数的微分法	48
四、等价无穷小量的重要性质	16	一、隐函数的微分法	48
五、确定无穷小量阶的方法	16	二、由参数方程表达的函数微分法	49
第四节 求极限的方法	18	第四节 某些简单函数的 n 阶导数	52
一、极限的四则运算与幂指数运算法则	18	一、应用分解法或归纳法求 n 阶导数 (公式)	52
二、用洛必达法则求未定式的极限	20	二、莱布尼茨公式	53
三、利用函数的连续性求极限	22	三、利用幂级数展式求导	54
四、利用变量替换法与两个重要极限求极限	23	第五节 导数的几何意义和物理意义 平面曲线的切线与法线	54
五、利用适当放大缩小法求极限	24	一、导数的几何意义 平面曲线的切线与法线	54
六、利用函数极限求数列极限	26	二、平面上两相交曲线之间的夹角	56
七、递归数列的极限	27	三、导数的物理意义	57
八、利用定积分求某些和式的极限	30	第六节 微分的概念及一阶微分形式的不变性 微分在近似计算中的作用	58
九、利用泰勒公式求未定式的极限	31	一、微分概念及一阶微分形式的不变性	58
十、用数值级数求和法求某些数列的极限	33	二、用微分作近似计算	60
		第七节 多元函数的偏导数与全微分概念	60

一、内容提要	60	四、求不定积分的基本方法	110
二、用定义求偏导数	62	第二节 定积分的内容提要	119
第八节 复合函数偏导数的求法	63	一、定积分的概念和性质 定积分中	
第九节 多元隐函数的微分法	67	值定理	120
第十节 求全微分及全微分在近似计算中的		二、微积分基本定理 牛顿-莱布尼茨	
应用	70	公式	121
一、多元函数全微分计算	70	三、定积分的换元法	122
二、近似计算	73	四、定积分的分部积分法	122
第十一节 方向导数 梯度	74	五、定积分的近似算法	122
一、方向导数	74	第三节 广义积分内容提要	123
二、梯度	76	一、无穷区间上的广义积分(无穷积分)	
第十二节 多元函数极值	77		123
第四章 闭区间上连续函数的性质		二、无界函数的广义积分(瑕积分)	124
微分学的中值定理及其应用		第四节 定积分的计算	124
.....	86	一、计算定积分的基本方法	124
第一节 闭区间上连续函数的性质及其		二、分段函数(包括带绝对值符号的	
应用	86	函数)的定积分计算	128
第二节 微分学中值定理的内容提要	87	三、含参数的定积分计算	129
第三节 用微分学中值定理进行函数性态		第五节 广义积分的计算	130
研究的内容提要	88	第六节 定积分证明题	132
一、函数的单调性	88	一、定积分等式的证明	132
二、函数的极值	88	二、定积分不等式的证明	135
三、函数的最大值、最小值	88	三、定积分中值命题的证明	139
四、函数图形的凹凸性和拐点	89	四、从定积分的信息提取被积函数的	
五、曲线的渐近线	90	信息	140
六、函数图形的描绘	90	第七节 变限定积分与原函数	141
七、二元函数的二阶泰勒公式	90	一、周期函数与奇、偶函数的变限定	
第四节 微分学中值定理的应用题型	91	积分	141
一、函数单调性的讨论	91	二、原函数的微分形式 $d\int f(x)dx = f(x)dx$	
二、曲线凹凸性的讨论	92	的应用	143
三、不等式的证明	93	三、变限定积分的求导法则及其应用	143
四、讨论极值和最值问题	97	四、利用变限定积分证明积分等式与	
五、中值命题的证明	99	不等式	145
六、方程根的讨论	104	第六章 向量代数与空间解析几何	145
七、证明函数恒等常数	106	第一节 向量代数的内容提要	145
八、描绘函数图形并利用图形作辅助工具		一、向量概念	146
解决有关问题	107	二、向量的线性运算	146
第五章 一元积分学	109	三、向量的数量积、向量积和混合积	146
第一节 不定积分的内容提要	109	四、向量运算的坐标表示	147
一、原函数与不定积分的概念	109	五、向量代数的基本题型	147
二、不定积分的基本性质	109	第二节 空间解析几何的内容提要	148
三、求不定积分的基本公式	110	一、直线、平面和曲面	148

二、母线平行于坐标轴的柱面方程及空间曲线在坐标平面上的投影	149	一、 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关时的特征	207
三、关于平面束的定义及定理	150	二、怎样判断曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 是否与路径无关	209
第三节 空间解析几何的基本题型	150	三、积分与路径无关时如何求 $I = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$ 及求原函数的方法	210
一、求直线与直线、直线与平面、平面与平面间的夹角或讨论平行、垂直和相交关系	150	第九章 微积分的应用	212
二、建立直线、平面、旋转曲面的方程	151	第一节 微分学的某些应用	213
三、求点到直线、点到平面及异面直线的距离	157	一、弧微分、曲率和曲率半径	213
四、与多元函数微分学联系的综合题	159	二、求方程近似解的切线法与二分法	215
第七章 多元函数积分的概念与计算	160	三、空间曲线的切线和法平面曲面的切平面和法线	217
第一节 多元函数积分的概念	161	第二节 积分的应用	222
一、多元积分的定义、几何意义或物理意义	161	一、微元法	222
二、两类曲线积分之间的关系 两类曲面积分之间的关系	165	二、定积分的几何应用	223
第二节 多元函数积分的存在性与性质	166	三、定积分的物理应用	232
一、多元函数积分的存在性	166	四、重积分、曲线积分和曲面积分的某些应用	235
二、多元函数积分的性质	166	第三节 最大值与最小值应用问题	243
第三节 多元函数积分的计算	171	第十章 无穷级数	249
一、在直角坐标系中怎样把多元函数积分化为定积分	171	第一节 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一般事项	251
二、重积分的变量替换	179	一、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛、和、发散的概念及基本性质	251
三、怎样应用多元函数积分计算公式及怎样简化多元函数积分的计算	186	二、用差消法、夹逼法求某些级数的和	252
第八章 多元函数积分学中的基本公式及其应用	195	三、用必要条件判别级数的发散性	253
第一节 多元函数积分学中的基本公式	195	四、用基本性质判别级数的收敛性	253
一、向量场的通量与散度及高斯公式	195	第二节 正项级数的审敛法	254
二、向量场的环量与旋度及斯托克斯公式	197	一、估计部分和有界法	254
三、格林公式	198	二、不同通项比较法	255
四、向量场的散度与旋度的计算	199	三、比值审敛法	256
第二节 格林公式、高斯公式与斯托克斯公式的一个应用——简化多元函数积分的计算	201	四、根值判别法	257
一、应用格林公式计算曲线积分	201	第三节 交错级数	257
二、应用高斯公式计算曲面积分	203	第四节 级数的绝对收敛与条件收敛	259
三、应用斯托克斯公式计算曲线积分	206	第五节 函数项级数 幂级数	261
第三节 平面上曲线积分与路径无关问题		一、基本概念	261
		二、幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛区域	261
		三、幂级数在其收敛区间内的基本性质 简单	

幂级数的和函数的求法	266	第二章 矩阵	336
第六节 泰勒级数	270	第一节 矩阵的概念及运算	336
一、内容提要	270	一、矩阵的概念	336
二、初等函数的幂级数展开式	271	二、矩阵的运算	336
三、幂级数在近似计算中的应用	273	三、几类特殊的矩阵	341
第七节 傅里叶级数	275	第二节 逆矩阵与伴随矩阵	343
一、内容提要	275	一、可逆矩阵的概念与性质	343
二、求函数的傅里叶系数与傅里叶级数		二、伴随矩阵	345
展式	278	第三节 初等变换与初等矩阵	348
三、计算傅里叶级数在特定点上的值	280	一、概念与性质	348
第十一章 常微分方程	282	二、利用初等行变换求逆矩阵	350
第一节 基本概念	282	三、利用初等行变换解矩阵方程	352
第二节 一阶微分方程	284	第四节 矩阵的分块运算	356
一、变量可分离的方程与齐次方程	284	第三章 向量	357
二、一阶线性方程	289	第一节 向量组的线性关系	357
三、伯努利方程	293	一、向量的基本概念	357
四、全微分方程	293	二、向量的线性运算	358
五、可用简单的变量代换求解的某些微分		三、线性组合与线性表示	359
方程	295	四、向量组的线性相关与线性无关	361
第三节 可降阶的高阶微分方程	297	第二节 向量组的极大无关组与秩 矩阵	
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	297	的秩	367
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	298	一、向量组的极大无关组与秩	367
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	300	二、矩阵的秩	369
第四节 高阶线性微分方程	301	三、秩的计算	372
一、线性方程解的性质和通解的结构	301	第三节 向量的内积运算	375
二、二阶常系数齐次线性微分方程	304	一、内积的定义及性质	375
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	307	二、正交矩阵	376
四、包含两个未知函数的一阶常系数线性		三、施密特正交化	377
微分方程组	313	第四节 向量空间	379
五、欧拉方程	315	一、 n 维向量空间及其子空间	379
六、微分方程幂级数解法简介	316	二、基、维数与坐标	380
第五节 微分方程(或方程组)的简单应用		三、基变换、过渡矩阵和坐标变换	380
问题	318	第四章 线性方程组	381
第二部分 线性代数	325	第一节 概念与基本性质	381
第一章 行列式	325	一、基本概念	381
第一节 行列式的概念	325	二、线性方程组解的性质	382
第二节 行列式的性质	327	三、线性方程组解的情况的判别	382
第三节 行列式按行(或列)的展开公式	330	四、克拉默法则	383
第四节 分块行列式 范德蒙德行列式	332	第二节 齐次线性方程组 $Ax = O$	384
一、分块行列式	332	一、基础解系和通解	384
二、范德蒙德行列式	334	二、基础解系的求法	385
第五节 行列式的计算	334	第三节 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$	389

一、通解的结构	389	六、综合题	427
二、通解的求法	390	第二节 随机变量	431
第五章 n 阶矩阵的特征值与特征向量		一、随机变量及其分类	431
n 阶矩阵的相似关系和对角化		二、离散型随机变量	431
.....	394	三、连续型随机变量	433
第一节 特征向量与特征值	394	四、综合题	435
一、定义与性质	394	第三节 随机向量	438
二、特征多项式	397	一、随机向量的基本概念	438
三、特征值与特征向量的计算	399	二、离散型随机向量	439
第二节 n 阶矩阵的相似关系与对角化	402	三、连续型随机向量	440
一、 n 阶矩阵的相似关系	402	四、综合题	443
二、 n 阶矩阵的对角化问题	403	第四节 概率补遗	449
第三节 实对称矩阵的对角化	408	一、正态随机向量的几个定理	449
第六章 二次型	412	二、 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布	450
第一节 二次型及其矩阵	412	三、切比雪夫不等式和弱大数定律	451
一、二次型的定义	412	四、中心极限定理	452
二、可逆线性变换替换	413	第二章 数理统计	453
三、 n 阶矩阵的合同关系	414	第一节 数理统计的基本概念	453
第二节 二次型的标准化和规范化 惯性		一、总体与样本	453
指数	414	二、统计量	453
一、惯性指数	414	三、正态总体某些统计量的分布	454
二、标准化和规范化的方法	414	第二节 参数估计	454
三、惯性指数与特征值的关系	419	一、点估计	454
第三节 正定二次型与正定矩阵	420	二、区间估计	457
一、定义与基本性质	420	第三节 假设检验	459
二、正定性的判别	420	一、假设检验的基本点	459
第三部分 概率论与数理统计初步	424	二、单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的假设	
第一章 概率论	424	检验	459
第一节 事件和概率	424	三、两个独立正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$	
一、最基本的概念	424	$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的假设检验	461
二、事件的关系和运算	424	四、总体分布假设的 χ^2 检验	461
三、概率的重要概念	425	第四节 分布函数的分位数	462
四、计算概率的主要公式	425	第三章 综合练习	462
五、解题指南	426		

第一部分 高等数学

第一章 函 数

按照考试大纲,本章的考试内容包括:一元函数和多元函数的概念,函数的表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数以及简单应用问题中函数关系的建立等.

本章的考试要求是:理解函数的概念,掌握函数的表示方法.了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数和隐函数的概念.掌握基本初等函数的性质及其图形.会建立简单应用问题中的函数关系式.

在历年的试题中,既有单纯考查函数有关知识的题目,也有许多把函数有关知识融会于其他内容当中的综合性题目.

第一节 函数的有关概念和几种特性

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, x 的变动域是 D ,如果对于每个数 $x \in D$,按照某一对应规则,变量 y 总有唯一确定的一个数值和它对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y = f(x)$, $x \in D$;数集 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值,记作 $f(x_0)$,当 x 取遍 D 的每一个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y | y = f(x), x \in D\} \quad (1.1)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

定义 1.2 设 D 是 n 维空间中一个给定的点集,如果对于每个点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$,变量 y 按照一定对应规则总有唯一确定的一个数值和它对应,则称变量 y 是变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 元函数,记作 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,点集 D 叫做函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的定义域, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 叫做自变量, y 叫做因变量.

当 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 取遍 D 的每一个点时,对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y | y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\} \quad (1.2)$$

称为函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的值域.

显然,当 $n = 1$ 时, n 元函数就是定义 1.1 中定义的一元函数;当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称多元函数.

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D ,集合 $X \subset D$. 如果存在数 K_1 ,使得

$$f(x) \leq K_1 \quad (1.3)$$

对于任何 $x \in X$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 数 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 的一个上界; 如果存在数 K_2 , 使得

$$f(x) \geq K_2 \quad (1.4)$$

对于任何 $x \in X$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, 数 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 的一个下界; 如果存在数 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M \quad (1.5)$$

对于任何 $x \in X$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 数 M 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个界, 否则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

容易证明, 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界. 注意, 如果 M 是函数 $f(x)$ 在 X 上的一个界, 则任何比 M 更大的正数也是函数 $f(x)$ 在 X 上的界, 所以一个有界函数必有无穷多个界, 可以证明其中必有一个最小的界. 对于函数的上界和下界也有类似的结论.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上有界, 则称为有界函数; 否则称为无界函数.

想要证明一个函数 $f(x)$ 是有界函数, 应按照定义找到 $f(x)$ 在其定义域上的一个界 M ; 反之, 如果想要证明一个函数 $f(x)$ 是无界函数, 则应说明任何正数 M 都不是 $f(x)$ 的界, 也就是说: 对于任意给定的 $M > 0$, 都存在 $x_M \in D$, 使得 $|f(x_M)| > M$ 成立.

不难看出, 只需把 x 换为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 上面有关函数有界性的讨论, 对于多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 同样是成立的.

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$, 只要 $x_1 < x_2$, 就有

$$f(x_1) < f(x_2), \quad (1.6)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上(严格)单调增加; 如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$, 只要 $x_1 < x_2$, 就有

$$f(x_1) > f(x_2), \quad (1.7)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上(严格)单调减少.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调增加, 则称 $f(x)$ 为单调增加函数(简称增函数); 如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调减少, 则称 $f(x)$ 为单调减少函数(简称减函数); 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任何 $x \in D$, 总有

$$f(x) = f(-x), \quad (1.8)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任何 $x \in D$, 总有

$$f(x) = -f(-x), \quad (1.9)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的; 奇函数的图形关于原点对称的.

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D . 如果存在常数 $T > 0$, 使得对于任何 $x \in D$, 总有

$$x \pm T \in D, \quad (1.10)$$

$$f(x+T)=f(x), \quad (1.11)$$

则称 T 是 $f(x)$ 的一个周期, 称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

显然, 如果 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期, 则 T 的任何整数倍倍数也是函数 $f(x)$ 的周期, 因而一个周期函数必有无穷多个周期; 为了确定起见, 我们所说的周期函数的周期都是指它的最小正周期 (如果存在的话).

设 T 是函数 $f(x)$ 的周期, 则在它定义域内每个长度为 T 的区间上, $f(x)$ 有相同的图形.

注意: 有关函数奇偶性、单调性和周期性的讨论只对一元函数有效.

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D , 值域是 Z . 如果对于每个 $y \in Z$, 存在唯一的 $x \in D$ 满足 $f(x)=y$, 把 y 看作自变量, 把 x 看作因变量, 则 x 是一个定义在 $y \in Z$ 上的函数, 记此函数为

$$x=f^{-1}(y) \quad (y \in Z), \quad (1.12)$$

称之为 $y=f(x) \quad (x \in D)$ 的反函数.

习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 所以通常把反函数表达式中的 x 和 y 对换, 写成

$$y=f^{-1}(x) \quad (x \in Z) \quad (1.13)$$

的形式. 这样一来, 在同一个直角坐标系中, 函数 $y=f(x) \quad (x \in D)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x) \quad (x \in Z)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

很明显, (严格)单调函数一定有反函数; 若某个函数不是单调函数, 但是它的定义域能够分为若干个单调区间, 则在每个单调区间中该函数就有一个相应的反函数. 例如: $y=x^2$ 分别在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 相应的反函数分别是 $y=-\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$ 和 $y=\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$. 同单调性一样, 仅对一元函数才能讨论其反函数问题.

定义 1.8 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f , 值域是 Z_f , 函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g , 值域是 Z_g . 如果 $Z_g \cap D_f \neq \emptyset$, 则称函数

$$y=f[g(x)], \quad x \in D = \{x | g(x) \in D_f\} \quad (1.14)$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数. 变量 u 称为中间变量.

定义 1.9 常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等六种函数称为基本初等函数. 基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数.

初等函数有很多好的性质, 它们是微积分的重要研究对象.

定义 1.10 设 $F(x, y)$ 是一个已知二元函数, I 是一个区间. 如果对于每个 $x \in I$, 都存在唯一的 y 满足方程 $F(x, y)=0$, 则称这个函数 $y=y(x)$ 为方程 $F(x, y)=0$ 在区间 I 上确定的隐函数.

从定义 1.10 可知, 把隐函数 $y=y(x)$ 代入方程 $F(x, y)=0$, 就得到在区间 I 上成立的恒等式

$$F[x, y(x)] \equiv 0, \quad x \in I. \quad (1.15)$$

尽管在大多数情况下, 不能从方程 $F(x, y)=0$ 解出隐函数 $y=y(x)$ 的显式表达式, 然而, 却

可利用恒等式(1.15)来研究隐函数的许多性质,如:隐函数的可微性以及导数公式等.

与定义 1.10 类似,还可以定义由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 以及由方程组 $F(x, y, u, v) = 0$ 和 $G(x, y, u, v) = 0$ 确定的两个隐函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 等等更复杂的隐函数.

例 1.1(1987 年)① $f(x) = |x \sin x|e^{\cos x} \quad (-\infty < x < +\infty)$ 是

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

【分析】 已知 $\sin x$ 和 $\cos x$ 分别是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数和偶函数,于是对于任何实数 x 有

$$f(-x) = |(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)} = |(-1)^2 x \sin x|e^{\cos x} = f(x).$$

这表明 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.

【答】 选(D).

【讨论】 由类似的计算可得 $g(x) = x \sin x e^{\cos x}$ 也是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.还可得到一般性的结论:两个奇函数之积是偶函数;两个偶函数之积仍是偶函数;任一函数 $y = f(u)$ 与偶函数 $u = g(x)$ 的复合函数 $f[g(x)]$ 也是偶函数.

作为进一步的练习,我们来证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是有界函数,也不是单调函数.

要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是有界函数,即需证明任何正数 M 都不是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的界.事实上,对于任意给定的 $M > 0$,令 $x_M = 2[M]\pi + \frac{\pi}{2}$,于是

$$|f(x_M)| = x_M.$$

我们来证 $x_M > M$ 总是成立的:若 $0 < M < 1$,则有 $x_M = \frac{\pi}{2} > 1 > M$;若 $n \leq M < n+1$ ($n = 1, 2, \dots$),则有 $x_M > 2n\pi > n+1 > M$;综合起来即得 $|f(x_M)| > M$ 成立.这表明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的确不是有界函数.注意,如果在有限区间 $[a, b]$ 上讨论,则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必为有界函数(请读者求出 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个界来).

要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数,只需比较函数值 $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $f(\pi)$.注意 $f(0) = f(\pi) = 0$,而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.这表明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上既不是单调增加的,也不是单调减少的,从而它在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数.

把上述证明一般化可得,若存在 $x_1, x_2, x_3 \in I$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$,但 $f(x_1) < f(x_2)$ 与 $f(x_2) > f(x_3)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$ 与 $f(x_2) < f(x_3)$) 同时成立,则 $f(x)$ 在区间 I 上不是单调函数.

例 1.2 证明 $f(x) = x - [x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界周期函数.

【分析】 可通过取整函数 $y = [x]$ 分段变化的规律来了解函数 $f(x) = x - [x]$ 是怎样变化的.

【证】 当 $n \leq x < n+1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时,有

$$f(x) = x - [x] < n+1 - n = 1,$$

$$f(x) = x - [x] \geq n - n = 0.$$

即 $0 \leq f(x) < 1$,这表明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界函数.

又因对于任何实数 x ,总有

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - ([x]+1) = x - [x] = f(x),$$

所以, $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

例 1.3(1988 年) 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【分析】 按照复合函数的定义,从 $f(x)$ 的解析式可得复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的一般形式,把它与题设的

① 1987 年指本例为 1987 年研究生入学考试试题.下同.

$f[\varphi(x)]$ 的解析式比较,即可求得 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】 注意

$$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x,$$

解出即得

$$\varphi^2(x) = \ln(1 - x),$$

由于 $\varphi(x) \geq 0$, 于是

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)},$$

它的定义域是

$$D = \{x | \ln(1 - x) \geq 0\} = \{x | 1 - x \geq 1\} = \{x | x \leq 0\}.$$

例 1.4(1996 年) 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有 _____ 个实根.

【分析】 记 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 易见 $f(x)$ 是定义域 $D = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ 上的偶函数, 且 $f(0) = -1 < 0$. 于是方程 $f(x) = 0$ 的实根个数恰为方程 $f(x) = 0$ 的正根个数的 2 倍.

注意, 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} - \cos x \geq 2 - 1 > 0$, 这表明 $f(x) = 0$ 的正根必在区间 $(0, 1)$ 内.

在闭区间 $[0, 1]$ 上, $f(x)$ 是连续函数, $f(0) \cdot f(1) < 0$; 由 $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, $\cos x$ 在 $[0, 1]$ 上单调减少可知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加. 由此可知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个零点, 即方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有且仅有一个根.

综上所述, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有两个实根.

【答】 应填 2.

第二节 分段函数与积分上限的函数

在自变量的不同变化范围中, 自变量与因变量的对应法则用不同的式子来表示的函数称为分段函数. 绝对值函数 $y = |x|$, 取整函数 $y = [x]$ 等都是分段函数.

若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 它在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分在区间 $[a, b]$ 上定义了一个函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

称为变上限定积分定义的函数或积分上限的函数.

在考研数学试题中经常出现这两类函数, 因此有必要重视这两类函数的有关概念和运算.

例 2.1(1992 年) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则

$$(A) f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$$

$$(B) f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$$

$$(D) f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

【分析】 本题实质上是求分段函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = -x$ 的复合函数的解析式的问题, 通常采用代入法: 用 $-x$ 代替分段函数 $y = f(x)$ 中的自变量 x , 然后将所得结果变形和化简, 从而选出正确答案.

注意

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0, \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0, \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$$

这表明答案(D)是正确的.

【答】 选(D).

例 2.2(1997 年) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] =$

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

【分析】 本题与例 2.1 是同一类型的题目,因而可用同样的方法解决. 首先,用 $f(x)$ 代替 $g(x)$ 的自变量 x ,得

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ 2+f(x), & f(x) > 0. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知,当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$; 而当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = -x \leq 0$, 于是

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-(-x), & x \geq 0, \\ 2+x^2, & x < 0, \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ 2+x^2, & x < 0. \end{cases}$$

这表明答案(D)是正确的.

【答】 选(D).

【讨论】 作为练习,我们来求复合函数 $f[f(x)]$, $f[g(x)]$, $g[g(x)]$ 的解析式.

首先,用 $f(x)$ 代替 $f(x)$ 的自变量 x ,得

$$f[f(x)] = \begin{cases} f^2(x), & f(x) < 0, \\ -f(x), & f(x) \geq 0. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知,当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$; 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x < 0$, 于是

$$f[f(x)] = \begin{cases} (-x)^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

其次,用 $g(x)$ 代替 $f(x)$ 的自变量 x ,得

$$f[g(x)] = \begin{cases} g^2(x), & g(x) < 0, \\ -g(x), & g(x) \geq 0. \end{cases}$$

注意, $g(x) = 2 + |x| \geq 2$, 因而 $g(x) < 0$ 的解集是空集, $g(x) \geq 0$ 恒成立, 于是

$$f[g(x)] = -g(x) = -2 - |x|.$$

类似可得

$$g[g(x)] = 2 + |g(x)| = 2 + g(x) = 4 + |x|.$$

例 2.3(1996 年) 设 $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

【分析】 分段函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 被分成三个区间 $(-\infty, -1)$, $[-1, 2]$ 和 $(2, +\infty)$. 在每个区间中 $f(x)$ 有不同的解析式,但分别是单调增加的. 又因 $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (1-2x^2) = -1 = f(-1)$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (12x-16) = 8 = f(2)$, 从而 $f(x)$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上也是单调增加的. 于是其反函数存在,且可分别在区间 $(-\infty, -1)$, $[-1, 2]$ 和 $(2, +\infty)$ 中求其解析式.

若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调,求它的反函数的程序是:求 $f(x)$ 当 $x \in I$ 时对应的值域 Z ; 把 $y = f(x)$ 中的变量 x 和 y 对换,即把它写成 $x = f(y)$ 的形式;解出 $y = g(x)$, 这就是所求的反函数的解析式,其

定义域是 $x \in \mathbb{Z}$.

【解】 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $y = 1 - 2x^2$ 的值域 $Z_1 = \{y | y = 1 - 2x^2, x < -1\} = \{y | y < -1\}$;

把 $y = 1 - 2x^2$ 改写成 $x = 1 - 2y^2$, 可解得 $y = -\sqrt{\frac{1-x}{2}}$.

当 $x \in [-1, 2]$ 时, $y = x^3$ 的值域 $Z_2 = \{y | y = x^3, -1 \leq x \leq 2\} = \{y | -1 \leq y \leq 8\}$; 把 $y = x^3$ 改写成 $x = y^{\frac{1}{3}}$, 可解得 $y = \sqrt[3]{x}$.

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $y = 12x - 16$ 的值域 $Z_3 = \{y | y = 12x - 16, x > 2\} = \{y | y > 8\}$; 把 $y = 12x - 16$ 改写成 $x = 12y - 16$, 可解得 $y = \frac{1}{12}(x + 16)$.

综合即得 $f(x)$ 的反函数是

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{1}{12}(x + 16), & x > 8. \end{cases}$$

例 2.4 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x^3+x} f(t)dt = x$, 则 $f(2) =$ _____.

【分析】 设积分上限的函数 $\Phi(u) = \int_0^u f(t)dt$, 则 $\int_0^{x^3+x} f(t)dt$ 是 $y = \Phi(u)$ 与 $u = x^3 + x$ 的复合函数 $\Phi(x^3 + x)$. 由题设知 $\Phi(x^3 + x) = x$ 是恒等式, 我们的任务是由此求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的函数值 $f(2)$.

为此, 必须将恒等式 $\Phi(x^3 + x) = x$ 两端对 x 求导数, 并利用积分上限的函数的导数公式以及复合函数求导法则才能得出正确结果.

【解】 设

$$\Phi(u) = \int_0^u f(t)dt, u = x^3 + x.$$

由 $f(x)$ 连续可得

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^3+x} f(t)dt = \frac{d}{dx} \Phi(x^3 + x) = \Phi'(x^3 + x)(3x^2 + 1) = (3x^2 + 1)f(x^3 + x),$$

又因 $\Phi(x^3 + x) \equiv x$, 于是

$$(3x^2 + 1)f(x^3 + x) \equiv 1.$$

令 $x = 1$ 即得

$$f(2) = \frac{1}{4}.$$

例 2.5(1987 年) 设 $I = t \int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$, 其中 $f(x)$ 连续, $t > 0, s > 0$, 则 I 的值

(A) 依赖于 s, t .

(B) 依赖于 s, t, x .

(C) 依赖于 t, x , 不依赖于 s .

(D) 依赖于 s , 不依赖于 t .

【分析】 I 是用变上限定积分定义的一个一元函数. 作变量代换 $u = tx$ 就不难得出这个结论. 注意, 在变量代换 $u = tx$ 之下, $f(tx) = f(u)$, $t dx = du$, 对应于 x 从 0 变到 $\frac{s}{t}$, u 从 0 变到 s , 于是

$$I = \int_0^s f(u)du.$$

这表明答案(D)正确.

【答】 选(D).

例 2.6(1997 年) 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$

(A) 为正常数.

(B) 为负常数.

(C) 恒为零.

(D) 不为常数.