

全国180座城市考研辅导班指定用书

文都教育

Maths 2010

全国硕士研究生入学统一考试

线性代数辅导讲义

汤家凤 著

- ★最有效的公式总结，最经典的例题讲解
- ★最专业的分析，最科学的评注
- ★最贴近真题的习题测试

全国180座城市考研辅导班指定用书

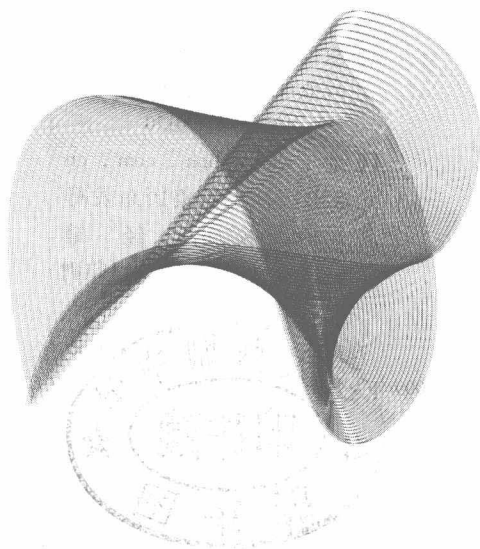
文都教育

Maths 2010

全国硕士研究生入学统一考试

线性代数辅导讲义

汤家凤 著



北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义/汤家凤著. —北京:北京教育出版社,2009.5

ISBN 978 - 7 - 5303 - 6958 - 6

I. 全… II. 汤… III. 线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 059753 号

全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义
QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI
XIANXING DAISHU FUDAO JIANGYI

汤家凤 著

*

北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)

邮政编码:100120

网址: www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
环球印刷(北京)有限公司印刷

*

787×1092 16开本 8.75印张

2009年5月第1版 2009年5月第1次印刷

印数1—5 000

ISBN 978 - 7 - 5303 - 6958 - 6

G · 6877 定价:14.00元

质量监督电话:010 - 58572393

前 言

线性代数是工程类及经济类硕士研究生入学考试数学考试中必考的内容,从历年考试情况看,很多考生对线性代数掌握得不太理想,甚至没有弄清楚其基本原理。本书的目的是给广大准备报考研究生的考生在阅读教材的基础上进一步系统复习提供一些辅导。本书共分为六讲,分别为行列式、矩阵、向量、方程组、特征值与特征向量、二次型的标准形。

本书的特点:

1. 对知识体系进行概括总结

无论是高等数学、线性代数还是概率统计,对知识体系的全面、透彻地理解非常重要。本书按照线性代数复习需要抓住的两条主线入手进行系统总结,展开分析。一条主线是行列式、矩阵、向量组作为研究方程组的三大工具与方程组解的关系以及它们之间的联系;另一条主线是特征值与特征向量、矩阵的对角化作为工具如何应用于二次型的标准化。本书每一讲都按照体系给出需要掌握的基本概念、基本原理、基本性质,特别注重性质之间联系的总结,在关键的概念、原理和性质后面都进行了注解,并且重要内容都给出了巩固题型,这样有助于对相应部分的内容的理解和掌握,同时有助于理解各内容之间的本质联系。

2. 对每个部分的基本题型进行分类

在理解基本概念、原理和性质的基础上,有针对性、适当地做练习题是学好线性代数的关键一环。本书各部分均给出了重要和典型的题型,按题型进行分类概括,给出了规范、详尽的解答,力求简明扼要,有些题目给出了多种解法。这一部分既为读者提供了练习的机会,又将考研涉及的线性代数题型进行全面分类,通过练习既有助于基本知识的掌握,又有助于适应考试题型。

3. 各部分给出练习题及解答

每个部分都给出了检测读者掌握情况的练习题,包括填空题、选择题、计算与证明题。题型全面,所设计的题目既注重基础知识的掌握,又有相当的综合性,对提高读者计算能力、熟练使用基本原理解决问题的能力非常有用。

本书在编写过程中,得到了文都同仁非常大的帮助,尤其是师潭老师的辛勤劳动,在此表示深深的敬意。由于本书的编写时间非常仓促,加上编者水平所限,不足之处在所难免,望广大读者批评指正。

编 者

2009年5月于南京

目 录

第一章 行列式	(1)
本章概要	(1)
重要知识点讲解	(1)
第一节 行列式的基本概念与性质	(1)
第二节 行列式的应用——克莱姆法则	(7)
综合题型	(8)
题型一 行列式的基本概念	(8)
题型二 低阶行列式的计算	(9)
题型三 n 阶行列式的计算	(11)
本章练习题	(12)
练习题答案与提示	(14)
第二章 矩 阵	(15)
本章概要	(15)
重要知识点讲解	(15)
第一节 矩阵的基本概念与特殊矩阵	(15)
第二节 矩阵的运算	(16)
第三节 逆矩阵	(19)
第四节 初等变换、初等矩阵、矩阵等价	(20)
综合题型	(21)
题型一 矩阵概念与矩阵的行列式运算	(21)
题型二 矩阵的幂	(23)
题型三 初等变换与初等矩阵	(25)
题型四 逆矩阵的计算与证明	(26)
题型五 矩阵方程	(28)
本章练习题	(29)
练习题答案与提示	(32)

第三章 向量	(34)
本章概要	(34)
重要知识点讲解	(34)
第一节 向量基本概念	(34)
第二节 向量的性质	(35)
第三节 矩阵的秩及其性质	(36)
第四节 n 维向量空间与基、向量的坐标与过渡矩阵	(38)
综合题型	(39)
题型一 判断向量组的线性相关性问题	(39)
题型二 证明有关向量组线性无关性问题	(42)
题型三 判断一个向量是否可由一个向量组线性表示	(45)
题型四 矩阵的秩的命题	(46)
本章练习题	(48)
练习题答案与提示	(51)
第四章 线性方程组	(52)
本章概要	(52)
重要知识点讲解	(52)
综合题型	(56)
题型一 线性方程组解的结构与性质	(56)
题型二 不含参数的线性方程组的求解	(60)
题型三 含参数的线性方程组解的讨论	(62)
题型四 方程组的公共解、同解、复合方程组求解问题	(68)
题型五 含参数的向量组的线性表示问题	(72)
题型六 方程组基础解系与通解的证明	(75)
题型七 方程组解的命题的证明	(78)
本章练习题	(80)
练习题答案与提示	(83)
第五章 特征值和特征向量	(85)
本章概要	(85)
重要知识点讲解	(85)
第一节 特征值与特征向量的基本概念与性质	(85)
第二节 相似矩阵的概念与性质及矩阵的对角化	(87)

综合题型	(89)
题型一 求矩阵的特征值与特征向量.....	(89)
题型二 特征值特征向量定义、性质与行列式的题型	(92)
题型三 矩阵对角化的计算与判断.....	(93)
题型四 实对称矩阵的对角化问题.....	(99)
题型五 利用特征值特征向量求矩阵	(101)
题型六 求矩阵的幂	(102)
题型七 特征值特征向量命题的证明	(104)
本章练习题	(105)
练习题答案与提示	(107)
第六章 二次型及其标准形	(109)
本章概要	(109)
重要知识点讲解	(109)
第一节 二次型的基本概念及其标准形	(109)
第二节 正定矩阵与正定二次型	(113)
综合题型	(113)
题型一 二次型的概念与性质	(113)
题型二 二次型的标准形	(114)
题型三 含参数的二次型问题	(117)
题型四 正定二次型的判别与证明问题	(121)
本章练习题	(124)
练习题答案与提示	(125)

第一章 行列式

本章概要

行列式本质上是一个数,行列式反映行列式元素之间的运算关系,熟练掌握不超过四阶的行列式的计算是重点,同时要能计算简单、特殊的 n 阶行列式.

行列式的计算是按照行列式的性质进行的.低阶行列式的计算主要有两个思路,即降阶和按行或列展开,但一般是把两种思路相结合; n 阶行列式的计算主要有数学归纳法、递推法、升阶法、转化为上(下)三角行列式法.

行列式是线性代数中一个非常重要、非常基础的工具,在后面的学习中经常使用到,归纳起来主要有如下几个方面的应用:

1. 向量组的相关性

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 个 n 维向量组,令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

2. 矩阵的满秩与可逆

(1) 设 A 为 n 阶矩阵,则 A 满秩的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 当 $|A| \neq 0$ 时, 又称 A 为非奇异矩阵, 即满秩矩阵与非奇异矩阵是等价的.

(2) 设 A 为 n 阶矩阵, 则 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

3. 方程组的解

(1) 设 A 为 n 阶矩阵, 则 $AX=0$ 只有零解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

(2) 设 A 为 n 阶矩阵, 则 $AX=b$ 有唯一解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

4. 特征值、特征向量

设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

重要知识点讲解

第一节 行列式的基本概念与性质

一、基本概念

1. **逆序** 设 i, j 是一对不等的正整数, 若 $i > j$, 则称 (i, j) 为一对逆序.

2. **逆序数** 设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 该排列所含的逆序总数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

3. **对换** 对排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中任意两个数的位置进行对调, 称为对该排列的一次对换, 对换改变排列的奇偶性.

4. **行列式** 由 n^2 数组成的下列记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式, 规定

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

5. 余子式与代数余子式 把行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行元

素和第 j 列元素去掉, 剩下的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列按照原来的排列次序构成的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} , 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

[注解]

★ 逆序指两个正整数之间的关系, 而逆序数指一个排列中所含的所有逆序的总数, 是对一个排列而言的.

★ 在所有可能的排列中, 奇偶排列各占一半.

★ 行列式本质上是一个数, 所以不同阶的行列式完全有可能相等, 行列式反映行列式中各元素之间的乘法和加减法的关系, 如果行列式中元素都是整数, 则行列式应该为整数, 二、三阶行列式的计算比较简单, 但高阶行列式(除特殊高阶行列式)若按照定义进行计算将非常复杂, 所以行列式的计算一般按照两个思路: 一是把普通的高阶行列式化为特殊的高阶行列式; 一是降低行列式的阶数.

◆巩固题型◆

例题 1 设 $a_{1i} a_{23} a_{35} a_{4j} a_{54} a_{6k}$ 为六阶行列式中带正号的项, 则 $i = \underline{\hspace{2cm}}$, $j = \underline{\hspace{2cm}}$, $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 对排列 $i35j4k, ijk$ 的可能取值为 126, 162, 216, 261, 612 和 621, 因为 $\tau(135246) = 3, \tau(135642) = 6, \tau(235146) = 4, \tau(235641) = 7, \tau(635142) = 11, \tau(635241) = 12$, 所有可能取值为 $i = 1, j = 6, k = 2; i = 2, j = 1, k = 6; i = 6, j = 2, k = 1$.

二、几个特殊的高阶行列式

以下几种行列式为常用的特殊行列式, 其计算非常方便, 应用也非常广泛:

1. 对角行列式

形如 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 的行列式, 称为对角行列式, 对角行列式等于其对角线上元素

之积.

2. 上(下)三角行列式

分别称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为上三角行列式和下三角行列式,它们都等于主对角线上的元素之积.

3. 范得蒙行列式

形如

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的行列式称为 n 阶范得蒙行列式,且

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

4. 广义对角行列式

形如

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 为方阵})$$

的行列式称为广义对角行列式,且

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

5. 分块矩阵行列式

设 A, B 分别为 m 和 n 阶矩阵,则 $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$, $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$.

三、行列式的性质

二阶和三阶行列式的计算比较容易,一般的高阶行列式运算比较复杂,但特殊的高阶行列式的运算比较简单,所以计算行列式一般是转化为特殊行列式或者降低行列式的阶数,因此行列式的性质可以分为两类:

1. 把行列式转化为特殊行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等, 即 $D=D^T$.

(2) 对调两行(或列)行列式改变符号.

(3) 行列式某行(或列)有公因子可以提取到行列式的外面.

推论① 行列式某行(或列)元素全为零, 则该行(或列)行列式为零.**推论②** 行列式某两行(或列)元素相同, 行列式为零.**推论③** 行列式某两行(或列)元素对应成比例, 行列式为零.

(4) 行列式某行(或列)的每个元素皆为两数之和时, 行列式可分解为两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 行列式的某行(或列)的倍数加到另一行(或列), 行列式不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 k 为任意常数.

◆巩固题型◆

例 1 计算 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 8 & -7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

【解】 $D = - \begin{vmatrix} 8 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -372$.

例 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$.

【解】 把行列式的第 2, 3 两行加到第一行得 $D = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$,

第一行提取公因子得 $D=(a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$, 第 2, 3 两行分别减去第一行的 b 倍得

$$D=(a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2.$$

例题 3 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } D &= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行加到第 2 行}]{\text{第 1, 3 列对调}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第 1 行的 -1 倍加到第 4 行}]{\text{第 1 行的 -2 倍加到第 3 行}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行 -2 倍加到第 3 行}]{\text{第 2, 3 两行对调}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第 3 行的 1 倍加到第 4 行}]{\text{第 2 行的 1 倍加到第 4 行}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9. \end{aligned}$$

例题 4 设 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为 4 维列向量, 且 $|A| = |\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = 4, |B| = |\beta, \gamma_1, 3\gamma_2, \gamma_3| = 21$, 求 $|A+B|$.

【解】 由 $|\beta, \gamma_1, 3\gamma_2, \gamma_3| = 21$ 得 $3|\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = 21$, 从而 $|\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = 7$.
则 $|A+B| = |\alpha+\beta, 2\gamma_1, 4\gamma_2, 2\gamma_3| = 16|\alpha+\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3|$
 $= 16(|\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| + |\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3|) = 16 \times (4+7) = 176$.

例题 5 设三阶行列式 $|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2$, 求行列式 $|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 16\alpha_3|$ 的值.

【解】 令 $D = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 16\alpha_3|$, 则
 $D = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 8\alpha_3, 3\alpha_2 + 15\alpha_3|$
 $= 6|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3| = 6|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_3|$
 $= 6|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3| = 6|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 12$.

例题 6 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a, |B| = b$, 求 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$.

【解】 把 B 的第 1 行分别与 A 的第 $m, m-1, \dots, 1$ 行对调, 再把 B 的第 2 行分别与 A 的第 $m, m-1, \dots, 1$ 行对调, 直到把 B 的第 n 行分别与 A 的第 $m, m-1, \dots, 1$ 行对调, 每对调一次行列式改变一次符号, 则有

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} B & O \\ O & A \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B| = (-1)^{mn} ab.$$

2. 行列式降阶的性质

(6) 行列式等于行列式某行(或列)元素与其对应的代数余子式之积的和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

(7) 行列式的某行(或列)元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式之积的和为零.

[注解]

★ 当改变某行(或列)元素时, 该行(或列)元素对应的代数余子式不变.

★ 行列式的第 i 行(或列)元素与第 j 行(或列)元素的代数余子式之积的和等于该行列式中把第 j 行(或列)元素用第 i 行(或列)元素代替, 显然代替后的行列式有两行(或列)相同, 所以结果为零.

◆ 巩固题型 ◆

例题 1 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 求

(1) $A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}$; (2) $A_{31} + A_{33}$; (3) $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$.

【解】 (1) $A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}$ 即为第 2 行元素全为 1 时按第 2 行展开的式子, 所以

$$\begin{aligned} A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ 5 & -2 & -7 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -7 & 8 & 3 \\ -2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 148. \end{aligned}$$

$$(2) A_{31} + A_{33} = A_{31} + 0A_{32} + A_{33} + 0A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

$$(3) M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{【解】 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1),$$

因为 a_1, a_2, a_3 两两不等, 所以 $D \neq 0$, 由 Cramer 法则, 方程组有唯一解. 由

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_2 a_3 (a_3 - a_2), \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & 0 & a_3 \\ a_1^2 & 0 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_1 a_3 (a_1 - a_3),$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_2 (a_2 - a_1),$$

得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{a_2 a_3}{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{a_1 a_3}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)},$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{a_1 a_2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}.$$

例题 2 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为互不相同的实数, b_1, b_2, \dots, b_n 为任意给定的实数, 证明: 存在唯一的 $n-1$ 次多项式, 满足 $f(a_i) = b_i (i=1, 2, \dots, n)$.

【证明】 设 $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$, 则有

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + \dots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1, \\ c_0 + c_1 a_2 + \dots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2, \\ \vdots \\ c_0 + c_1 a_n + \dots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n, \end{cases}$$

因为系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0$, 所以由 Cramer 法则, 上述

关于 c_0, c_1, \dots, c_{n-1} 的方程组有唯一解, 所以满足条件的多项式是唯一存在的.

综合题型

题型一 行列式的基本概念

例题 1 方程 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = 0$ 的根的个数为 ()

(A) 1 个.

(B) 2 个.

(C) 3 个.

(D) 4 个.

【解】 $f(x)$ 本质上是一个多项式, 所以问该方程有多少个根要先确定该多项式, 由行列式的基本性质, 将第 2, 3, 4 列分别减去第 1 列得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix},$$

再将第 2 列加到第 4 列得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

则 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$, $f(x)$ 为两个一次多项式的乘积, 所以原方程有两个根, 答案为 (B).

例题 2 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x+3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$, 求 x^4 及 x^3 的系数.

【解】 $f(x)$ 本质上是一个 4 次多项式, 当然可以将其展开计算, 由于含 x 的元素主要集中在主对角线上, 且题中要求的是 x^4 及 x^3 的系数, 所以只要按照行列式的定义找出三次和四次项即可. 显然四次项只能出现在主对角线上元素之积, 且符号为正, 所以 x^4 的系数为 2, 三次项只能出现在 $2x \times (x+3)(x+2)(x+1)$ 和 $x \times 1 \times (x+2)(x+1)$ 中, 且符号分别为正和负, 所以 x^3 的系数为 11.

题型二 低阶行列式的计算

【思路】 有限阶行列式计算的基本方法有: 利用行列式的性质把普通行列式化为特殊行列式(如上、下三角行列式)、行列式按行或列展开, 有时是先用行列式的性质把某一行或列元素化为尽可能多的零, 然后再使用行列式按行或列展开进行计算.

例题 1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

【解】 $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 24 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -24.$$

例题 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

【解】

方法一:

$$D \xrightarrow{\text{第2,3,4列加到第1列}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4.$$

方法二:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0+1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0+1 & -1 & x+1 & -1 \\ 0+1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & -1 & x+1 & -1 \\ 0 & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4+1} x \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ x-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -x \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ x-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 0-1 & 1 & x-1 \\ 0-1 & x+1 & -1 \\ x-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + x^3$$

$$= -x \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ 0 & x+1 & -1 \\ x & 1 & -1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + x^3$$

$$= -x^2 \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x+1 & -1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + x^3$$

$$= -x^2(-1-x^2+1) - x^3 + x^3 = x^4.$$

例题 3 计算行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$, 其中 α, β, γ 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根.