Purcell and Varberg

FOURTH EDITION

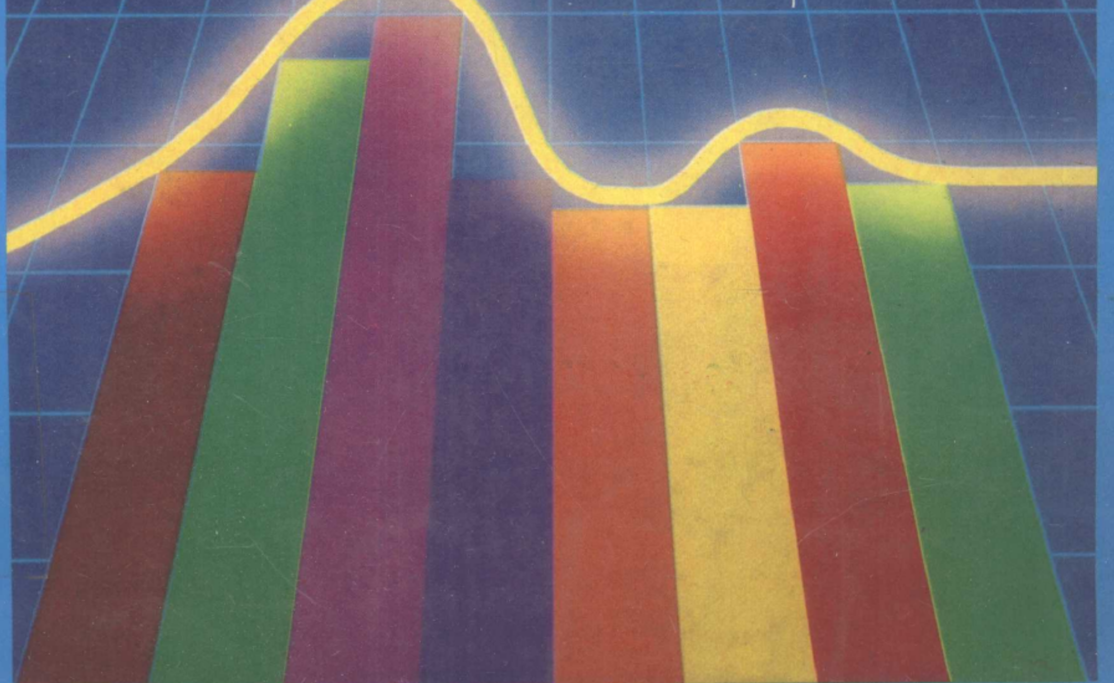
微積分精要

下 冊

編 者

杜書健 謝 抗

東華書局



PURCELL

微積分精要

1984年第四版

下冊

編者

杜 書 健

謝 抗

東華書局印行

中華民國七十五年 七月初版
中華民國七十六年四月二版

PURCELL 微積分精要(下 册)

定價 新臺幣壹佰壹拾元整
(外埠酌加運費滙費)

編　者　杜書健　謝　抗
發行人　卓　鑫　淼
出版者　臺灣東華書局股份有限公司
　　　　臺北市博愛路一〇五號
　　　　郵撥：00064813
印刷者　合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(75062)

編輯大意

本書係根據美國亞利桑那大學 Edwin J. Purcell 教授原著 Calculus with Analytic Geometry 第四版編輯而成。原出版書局在國內授權由東南書報社印行。由於內容及深度頗適合我國學生，許多大學已競先採用爲教學課本。東華書局有鑑於該書普受歡迎，特邀請數學專家整理出全書之精要大綱，附以全部習題詳解，以幫助讀者對原書能徹底瞭解與吸收。

本書章節完全依照原書之順序，先整理出一節之大綱，再解出該節之習題。題解中需要幾何圖形輔助時，均繪圖插排於適當之處。

爲了閱讀攜帶方便，本書分爲三册印行；一至六章列在上册，六至十二章爲中册而十三至十八章爲下册。

本書雖經細心排校、專家校訂，舛誤失當之處在所難免，懇望先進方家多所賜教，以匡不逮，俾再版時得以補正。

目　次

第十三章

平面幾何，向量

13-1　平面曲線：以參數表示

摘　要

1. 平面曲線可以由一對參數方程式表示，即
$$x=f(t),\ y=g(t),\qquad t\in I$$
通常 I 爲一閉區間〔a,b〕。t 稱爲參數 (parameter)，$P=(x(a),y(a))$ 及 $Q=(x(b),y(b))$ 稱爲曲線的端點 (endpoints)，若 $P=Q$，則稱爲閉(closed)曲線。若不同的 t 值產生不同的點，則稱爲簡單曲線 (simple curve)。

2. 定理A：
令 f 及 g 爲連續可微分且 $f'(t)\neq 0$ 當 $\alpha\leq t\leq\beta$。則參數方程式 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 定義 y 爲 x 的可微分函數且
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

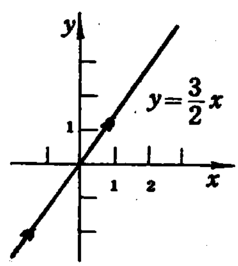
習　題

在問題 1～12 各題中，一曲線的參數表示式已給予。
(a)利用指定一些參數值而畫出曲線 (見例 1)。
(b)曲線能滿足下列那些特性：簡單或封閉。
(c)利用消去參數而得到直角坐標方程式 (見例 1 至 4)。

1. $x=2t$，$y=3t$，$t\in R$

解：(a)

t	x	y
0	0	0
1/2	1	3/2
1	2	3
2	4	6



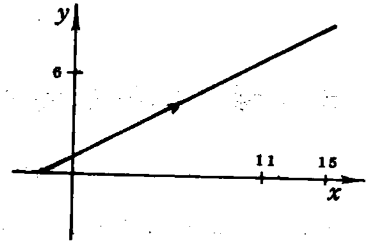
(b)簡單非封閉。

(c) $t=\frac{x}{2}$，故得 $y=\frac{3}{2}x$，$x\in R$。

2. $x=4t-1$，$y=2t$，$0\leq t\leq 3$

解：(a)

t	x	y
0	−1	0
1/4	0	1/2
1	3	2
3	11	6



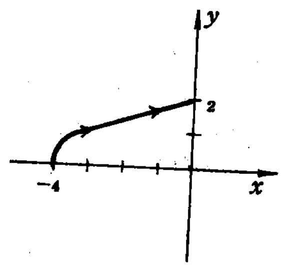
(b)為簡單曲線而非封閉曲線。

(c) $t=\frac{y}{2}$，故得 $x=2y-1$，$y\in[0,6]$。

3. $x=t-4$，$y=\sqrt{t}$，$0\leq t\leq 4$

解：(a)

t	x	y
0	−4	0
1	−3	1
2	−2	1.41
3	−1	1.73
4	0	2



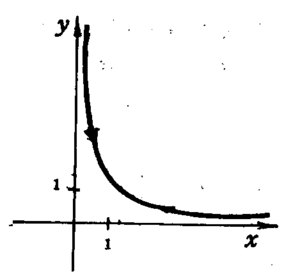
(b)簡單非封閉。

(c) $t=y^2$，$x=y^2-4$，$y\in[0,2]$

4. $x=t$，$y=\frac{1}{t}$；$0<t$

解：(a)

t	x	y
1/4	1/4	4
1/2	1/2	2
1	1	1
2	2	1/2
4	4	1/4



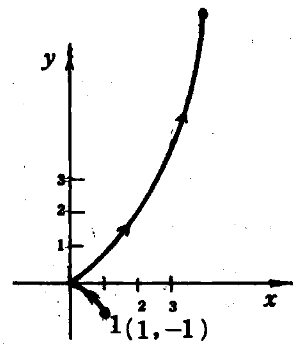
(b)為簡單曲線而非封閉。

(c) $y=\frac{1}{x}$，$x>0$。

5. $x = t^2$，$y = t^3$，$-1 \leq t \leq 2$

解：(a)

t	x	y
-1	1	-1
0	0	0
1	1	1
2	4	8



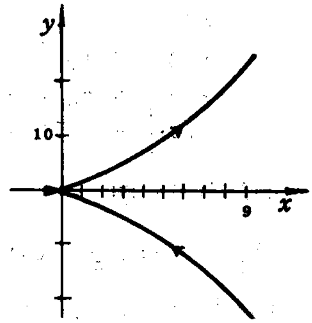
(b)簡單而非封閉。

(c) $t = y^{1/3}$，故 $x = y^{2/3}$，$y \in [-1, 8]$。

6. $x = t^2 - 1$，$y = t^3 - t$，$-3 \leq t \leq 3$

解：(a)

t	x	y
-3	8	-24
-2	3	-6
-1	0	0
-0.5	-0.75	0.38
0	-1	0
0.5	-0.75	0.38
1	0	0
2	3	6
3	8	24



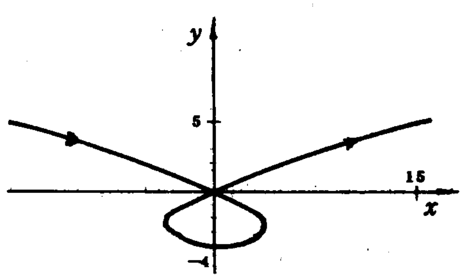
(b)非簡單亦非封閉。

(c) $t^2 = x + 1$ 及 $y^2 = t^2(t^2 - 1)^2$，因此，$y^2 = (x+1)^2 x^2$ $x \in [-1, 8]$。

7. $x = t^3 - 4t$，$y = t^2 - 4$，$-3 \leq t \leq 3$

解：(a)

t	x	y
-2	0	0
-1	3	-3
0	0	-4
1	-3	-3
2	0	0



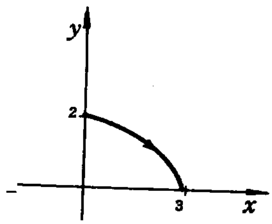
(b)非簡單亦非封閉。

(c) $t^2 = y + 4$，故 $x^2 = t^2(t^2 - 4)^2 = (y+4)y^2$，$y \in [-4, 5]$。

8. $x = 3\sqrt{t-3}$，$y = 2\sqrt{4-t}$；$3 \leq t \leq 4$

解：(a)

t	x	y
3	0	2
3.5	$3/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
4	3	0



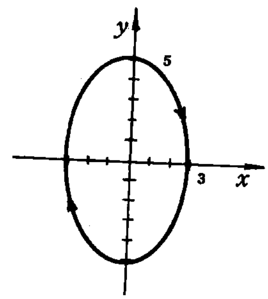
(b)簡單但非封閉。

(c) $\frac{x^2}{9}=t-3$，$\frac{y^2}{4}=4-t$，因此可得 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，$x>0$，$y>0$。

9. $x=3\sin t$，$y=5\cos t$；$0\leq t\leq 2\pi$

解：(a)

t	x	y
0	0	5
$\pi/6$	1.50	4.33
$\pi/4$	2.12	3.54
$\pi/3$	2.60	2.50
$\pi/2$	3	0



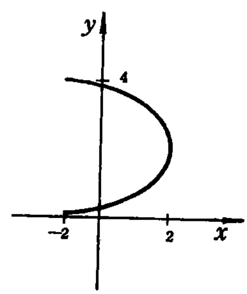
(b)簡單及封閉。

(c) $\frac{x}{3}=\sin t$，$\frac{y}{5}=\cos t$，因此，$(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{5})^2=1$。

10. $x=3\sin\theta-1$，$y=2\cos\theta+2$；$0\leq\theta\leq\pi$

解：(a)

θ	x	y
0	-1	4
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}+2$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$	3
$\frac{\pi}{2}$	2	2
π	-1	0



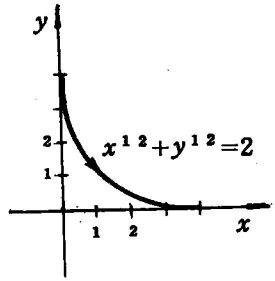
(b)簡單但非封閉。

(c) $\frac{x+1}{3}=\sin\theta$，$\frac{y-2}{2}=\cos\theta$，故得 $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1\quad y\geq 0$

11. $x=4\sin^4 t$，$y=4\cos^4 t$，$0\leq t\leq\frac{1}{2}\pi$

解：(a)

t	x	y
0	0	4
$\pi/6$	1/4	9/4
$\pi/3$	9/4	1/4
$\pi/2$	4	0



(b)簡單而非封閉。

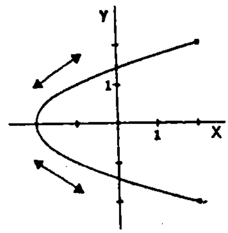
(c) $\sqrt{x}=2\sin^2 t$，$\sqrt{y}=2\cos^2 t$，故可得 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2(\sin^2 t+\cos^2 t)=2$。

$x\geq 0$，$y\geq 0$

12. $x=2\cos\theta$，$y=2\cos\frac{1}{2}\theta$，$\theta\in R$

解：(a)

θ	x	y
0	2	2
$\pi/3$	1	1.73
$\pi/2$	0	1.41
$2\pi/3$	-1	1
π	-2	0
$4\pi/3$	-1	-1
$3\pi/2$	0	-1.41
$5\pi/3$	1	-1.73
2π	2	-2



(b)非簡單亦非封閉。

(c) $y^2=4\cos^2(\theta/2)=2+2\cos\theta$，則 $y^2=2+x$，$y\in[-2,2]$。

在問題 13～18 中，不用消去參數而求出$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

13. $x=3t^2$，$y=2t^3$，$t\neq 0$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{6t^2}{6t}=t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{6t}$$

14. $x=6t^2$，$y=t^3$，$t\neq 0$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3t^2}{12t}=\dfrac{t}{4}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{1}{4}\Big/12t=\dfrac{1}{48t}$

15. $x = 2t - \frac{3}{t}$, $y = 2t + \frac{3}{t}$; $t \neq 0$

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2 - 3t^{-2}}{2 + 3t^{-2}} = \frac{2t^2 - 3}{2t^2 + 3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{[(2t^2+3)4t - (2t^2-3)4t]}{(2t^2+3)^2} \frac{t^2}{2t^2+3}$$

$$= \frac{24t^3}{(2t^2+3)^3}$$

16. $x = 1 - \cos t$, $y = 2 + 3\sin t$; $t \neq n\pi$

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3\cos t}{\sin t} = 3\cot t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}(y') \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{-3\csc^2 t}{\sin t} = -3\csc^3 t$$

17. $x = 3\tan t - 1$, $y = 5\sec t + 2$; $t \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{5\sec t\tan t}{3\sec^2 t} = \frac{5}{3}\sin t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{5}{3}\cos t \Big/ 3\sec^2 t = \frac{5}{9}\cos^3 t$$

18. $x = \frac{2}{1+t^2}$, $y = \frac{2}{t(1+t^2)}$; $t \neq 0$

解：$\frac{dy}{dt} = -2(t+t^3)^{-2}(1+3t^2) = -2t^{-2}(1+t^2)^{-2}(1+3t^2)$

且 $\frac{dx}{dt} = -2(1+t^2)^{-2}2t$

因此 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^{-2}(1+3t^2)}{2t} = \frac{1+3t^2}{2t^3} = \frac{1}{2}t^{-3} + \frac{3}{2}t^{-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \left(-\frac{3}{2}\right)t^{-4} - \left(\frac{3}{2}\right)t^{-2} \Big/ -2(1+t^2)^{-2}2t$$

$$= \frac{-3t^{-4}(1+t^2)}{-8t(1+t^2)^{-2}} = \frac{3(1+t^2)^3}{8t^5}$$

在問題19～22中，不用消去參數而求出所給予曲線在所給予點上的切線方程式。並畫出其圖。

1. $x = t^2$, $y = t^3$, $t = 2$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{3t^2}{2t}=\dfrac{3}{2}t$

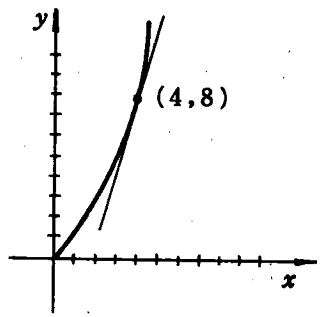
若 $t=2$，則 $x=4$，$y=8$，

$y'=3$，故切線方程式為

$$y-8=3(x-4)$$

或　$y=3x-4$

其圖形如右。



20. $x=3t$，$y=8t^3$；$t=-\dfrac{1}{2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{24t^2}{3}=8t^2$

若 $t=-\dfrac{1}{2}$

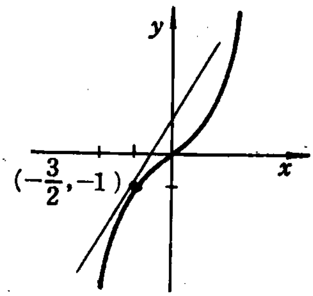
則 $x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-1$，$y'=2$

故切線方程式為

$$y+1=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

或　$y=2x+2$

圖形如右。



21. $x=2\sec t$，$y=2\tan t$；$t=-\dfrac{\pi}{6}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{2\sec^2 t}{2\sec t\ \tan t}=\csc t$

當 $t=-\dfrac{\pi}{6}$

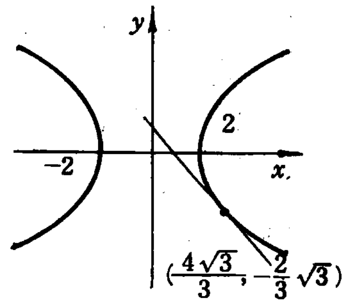
則 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$y=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，$y'=-2$

故切線方程式為

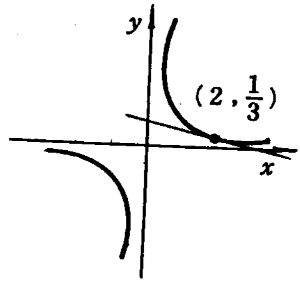
$$y+\frac{2}{3}\sqrt{3}=-2\left(x-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$$

或　$y=-2x+2\sqrt{3}$

其圖形如右所示。



22. $x = 2e^{t}$, $y = \frac{1}{3}e^{-t}$; $t = 0$



解：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{1}{3}e^{-t} \Big/ 2e^{t}$

$= -\frac{1}{6}e^{-2t}$ ，若 $t = 0$，則

$x = 2$ ，$y = \frac{1}{3}$ ，$y' = -\frac{1}{6}$

切線方程式爲

$$y - \frac{1}{3} = (-\frac{1}{6})(x - 2)$$

或 $\quad y = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$

其圖形如右所示。

在問題 23 ～24 中，計算積分值。

23. $\int_0^1 (x^2 - 4y)dx$ ，其中 $x = t + 1$ ，$y = t^3 + 4$

解：x 由 0 到 1 ，則 t 由 -1 到 0 ，故可得

$$\text{原式} = \int_0^1 [(t+1)^2 - 4(t^3+4)]dt$$

$$= \left[-t^4 + (\frac{1}{3})t^3 + t^2 - 15t\right]_{-1}^{0}$$

$$= -44/3$$

$dx = dt$
$x = 1 \Rightarrow t = 0$
$x = 0 \Rightarrow t = -1$

24. $\int_1^{\sqrt{3}} xy\,dy$ ；其中 $x = \sec t$ ，$y = \tan t$

解：把原積分轉換成對 t 積分，可得

$$\text{原式} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec t \tan t \sec^2 t\, dt$$

$$= \left[\frac{\sec^3 t}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1.7239$$

$dy = \sec^2 t\ dt$
$y = \sqrt{3} \Rightarrow t = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$
$y = 1 \quad \Rightarrow t = \tan^{-1}(1) = \pi/4$

25. 求介於曲線 $x = e^{2t}$ ，$y = e^{-t}$ 及由 $t = 0$ 到 $t = \ln 5$ 之間的 x 軸之間的區域之面積並畫圖。

解：面積$=\int_1^{25} y\,dx$ 〔$dx=2e^{2t}dy$；$x=25 \Rightarrow t=\ln 5$；$x=1 \Rightarrow t=0$〕

$=\int_0^{\ln 5} e^{-t}2e^{2t}dt$

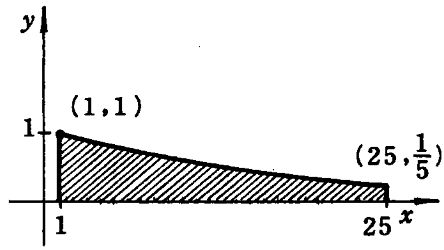
$=\int_0^{\ln 5} 2e^{t}dt$

$=\left[2e^{t}\right]_0^{\ln 5}$

$=2e^{\ln 5}-2e^{0}$

$=10-2=8$

其圖形如右所示。



26. 不用消去參數而求出由曲線 $x=t+\frac{1}{t}$，$y=t-\frac{1}{t}$ 及直線 $3x-10=0$ 所圍之區域的面積，並畫圖。

解：曲線 $x=t+\frac{1}{t}$，$y=t-\frac{1}{t}$ 可化為 $x^2-y^2=4$，此為雙曲線，其與 $3x-10=0$ 所圍之區域如右圖所示。

〔$dx=(1-t^{-2})dt$；$x=10/3 \Rightarrow t=3$；$x=2 \Rightarrow t=1$〕

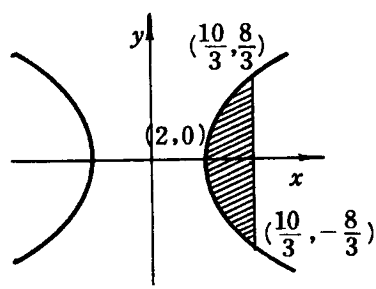
面積$=2\int_2^{10/3} y\,dx$

$=2\int_1^3 (t-t^{-1})(1-t^{-2})dt$

$=2\int_1^3 (t-2t^{-1}+t^{-3})\,dt$

$=2\left[\frac{t^2}{2}-2\ln t+\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^3$

$=2\left(\frac{40}{9}-2\ln 3\right)\approx 4.4944$



27. 修改課文內有關擺線（或稱為旋輪線）（cycloid）的探討（及其圖形）以處理 P 點距輪子中心之距離為 b，而 $b<a$ 之情形。證明其所對應的參數方程式為

$$x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t$$

當 $a=8$ 及 $b=4$ 時，畫出這些方程式的圖形（稱為短幅旋輪線）（擺線）（curtate cycloid）。

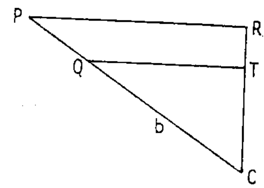
解：在 554 頁的圖 6 上加上點 Q 及 T（如右圖所示）。Q 的坐標爲：

$x = |ON| - |QT| = at - b\sin t$

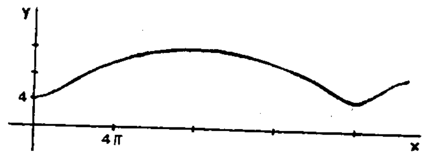
$y = |NC| + |CT| = a - b\cos t$

對於 $x = 8t - 4\sin t$

$y = 8 - 4\cos t$



t	x	y
0	0	4
$\pi/2$	$4\pi-4$	8
π	8π	12
$3\pi/2$	$12\pi+4$	8
2π	16π	4



其圖形如右所示。

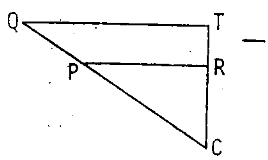
28. 對於 $b > a$（一具有凸緣的輪子，如火車的輪子）的情形可依據問題 27的做法證明你可以得到相同的參數方程式。當 $a = 6$ 及 $b = 8$ 時，畫出這些方程式的圖形（稱爲長幅旋輪線（擺線）(Prolate cycloid)）。

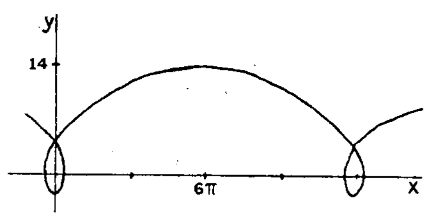
解：在 554 頁的圖 6 上加上點 Q 及 T（如下圖所示），Q 的坐標爲：

$x = |ON| - |QT| = at - b\sin t$

$y = |NC| + |CT| = a - b\cos t$

對於 $x = 6t - 8\sin t$，$y = 6 - 8\cos t$：





29. 一支火箭在地面上以每秒 v_0 呎的速度及與地面成 α 角的角度發射，而其路線軌跡爲參數方程式

$$x = (v_0\cos\alpha)t \qquad y = -16t^2 + (v_0\sin\alpha)t$$

(a) 證明其軌跡爲拋物線。

(b) 求其飛行時間。

(c) 證明其範圍（所飛行的水平距離）爲 $(v_0^2/32)\sin 2\alpha$。