

Purcell and Varberg

FOURTH EDITION

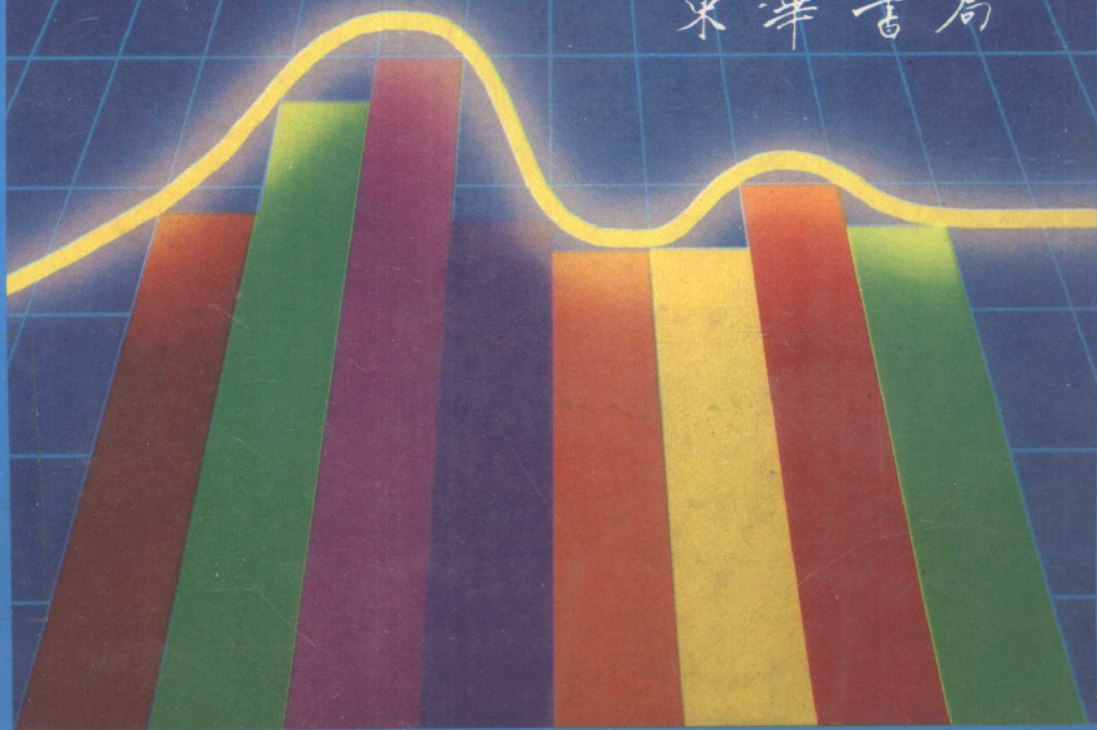
微積分精要

下 冊

編 者

杜書健 謝 抗

東華書局



PURCELL

微積分精要

1984 年第四版

下 冊

編 者

杜 書 健

謝 抗

上海人民教育出版社印行



版權所有·翻印必究

中華民國七十五年七月初版

中華民國七十六年四月二版

PURCELL 微積分精要(下冊)

定價 新臺幣壹佰壹拾元整

(外埠酌加運費滙費)

編者 杜書健 謝抗

發行人 卓鑫 森

出版者 臺灣東華書局股份有限公司

臺北市博愛路一〇五號

郵撥：00064813

印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

(75062)

編輯大意

本書係根據美國亞利桑那大學 Edwin J. Purcell 教授原著 *Calculus with Analytic Geometry* 第四版編輯而成。原出版書局在國內授權由東南書報社印行。由於內容及深度頗適合我國學生，許多大學已競先採用為教學課本。東華書局有鑑於該書普受歡迎，特邀請數學專家整理出全書之精要大綱，附以全部習題詳解，以幫助讀者對原書能徹底瞭解與吸收。

本書章節完全依照原書之順序，先整理出一節之大綱，再解出該節之習題。題解中需要幾何圖形輔助時，均繪圖插排於適當之處。

為了閱讀攜帶方便，本書分為三冊印行；一至六章列在上冊，六至十二章為中冊而十三至十八章為下冊。

本書雖經細心排校、專家校訂，舛誤失當之處在所難免，懇望先進方家多所賜教，以匡不逮，俾再版時得以補正。

目 次

第十三章 平面幾何，向量	1 ~ 55
13-1 平面曲線：以參數表示	1
習題及詳解	1
13-2 平面上的向量：幾何的處理方法	15
習題及詳解	16
13-3 平面上的向量：代數的處理方法	20
習題及詳解	21
13-4 向量 - 值函數及曲線運動	27
習題及詳解	28
13-5 曲率與加速	37
習題及詳解	38
13-6 本章複習題及詳解	46
第十四章 空間幾何學、向量	56 ~ 106
14-1 三度空間之卡笛兒坐標	56
習題及詳解	56
14-2 三度空間向量	62
習題及詳解	63
14-3 外 積	68
習題及詳解	69
14-4 三度空間之直線與曲線	74
習題及詳解	74
14-5 速度、加速度和曲率	79
習題及詳解	80
14-6 三度空間曲面	87
習題及詳解	87
14-7 柱面與球面坐標	91
習題及詳解	92
14-8 本章複習題及詳解	97
第十五章 n 維(n 度)空間的導數	107 ~ 171
15-1 兩個或更多個變數的函數	107
習題及詳解	107
15-2 偏導數	113
習題及詳解	114
15-3 極限與連續	120
習題及詳解	120
15-4 微 分	125

習題及詳解·····	126	習題及詳解·····	143
15-5 方向導數和梯度向量·····	129	15-8 極大與極小·····	148
習題及詳解·····	130	習題及詳解·····	149
15-6 合成微分法則·····	136	15-9 Lagrange's 方法·····	158
習題及詳解·····	137	習題及詳解·····	159
15-7 切平面與近似值·····	142	15-10 本章複習題及詳解·····	162
第十六章 n-空間中積分·····	172 ~ 232		
16-1 在矩形上的二重積分·····	172	習題及詳解·····	200
習題及詳解·····	173	16-6 曲面面積·····	205
16-2 逐次積分·····	176	習題及詳解·····	205
習題及詳解·····	177	16-7 三重積分(直角坐標)·····	209
16-3 非矩形域上的重積分·····	181	習題及詳解·····	211
習題及詳解·····	182	16-8 三重積分(柱面及球面	
16-4 極坐標中重積分·····	192	坐標系)·····	217
習題及詳解·····	193	習題及詳解·····	219
16-5 重積分的應用·····	199	16-9 本章複習題及詳解·····	225
第十七章 向量計算·····	233 ~ 283		
17-1 向量場·····	233	17-5 面積分·····	261
習題及詳解·····	234	習題及詳解·····	262
17-2 線積分·····	238	17-6 高斯的散度定理·····	266
習題及詳解·····	239	習題及詳解·····	267
17-3 路線的無關·····	245	17-7 史托克定理·····	272
習題及詳解·····	246	習題及詳解·····	272
17-4 平面上的格林定理·····	253	17-8 本章複習題及詳解·····	277
習題及詳解·····	254		
第十八章 微分方程式·····	284 ~ 315		
18-1 一階線性微分方程式·····	284	習題及詳解·····	286

18-2 二階齊性微分方程式... 292	18-4 二階微分式之應用..... 304
習題及詳解..... 293	習題及詳解..... 304
18-3 非齊性微分方程式..... 296	18-5 本章複習題及詳解..... 309
習題及詳解..... 298	

第十三章

平面幾何，向量

13-1 平面曲線：以參數表示

摘 要

1. 平面曲線可以由一對參數方程式表示，即

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in I$$

通常 I 為一閉區間 $[a, b]$ 。 t 稱為參數 (parameter)， $P = (x(a), y(a))$ 及 $Q = (x(b), y(b))$ 稱為曲線的端點 (endpoints)，若 $P = Q$ ，則稱為閉 (closed) 曲線。若不同的 t 值產生不同的點，則稱為簡單曲線 (simple curve)。

2. 定理 A：

令 f 及 g 為連續可微分且 $f'(t) \neq 0$ 當 $\alpha \leq t \leq \beta$ 。則參數方程式 $x = f(t)$ ， $y = g(t)$ 定義 y 為 x 的可微分函數且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

習 題

在問題 1~12 各題中，一曲線的參數表示式已給予。

(a) 利用指定一些參數值而畫出曲線 (見例 1)。

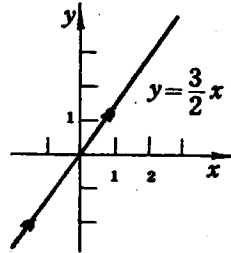
(b) 曲線能滿足下列那些特性：簡單或封閉。

(c) 利用消去參數而得到直角坐標方程式 (見例 1 至 4)。

1. $x = 2t$ ， $y = 3t$ ， $t \in \mathbb{R}$

解：(a)

t	x	y
0	0	0
1/2	1	3/2
1	2	3
2	4	6



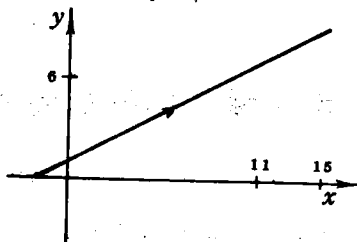
(b) 簡單非封閉。

(c) $t = \frac{x}{2}$, 故得 $y = \frac{3}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$ 。

2. $x = 4t - 1$, $y = 2t$, $0 \leq t \leq 3$

解：(a)

t	x	y
0	-1	0
1/4	0	1/2
1	3	2
3	11	6



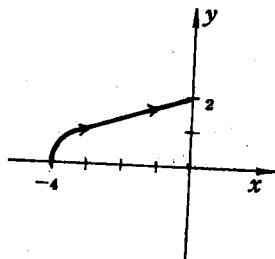
(b) 為簡單曲線而非封閉曲線。

(c) $t = \frac{y}{2}$, 故得 $x = 2y - 1$, $y \in [0, 6]$ 。

3. $x = t - 4$, $y = \sqrt{t}$, $0 \leq t \leq 4$

解：(a)

t	x	y
0	-4	0
1	-3	1
2	-2	1.41
3	-1	1.73
4	0	2



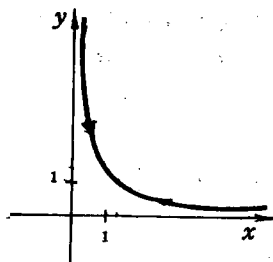
(b) 簡單非封閉。

(c) $t = y^2$, $x = y^2 - 4$, $y \in [0, 2]$

4. $x = t$, $y = \frac{1}{t}$; $0 < t$

解：(a)

t	x	y
1/4	1/4	4
1/2	1/2	2
1	1	1
2	2	1/2
4	4	1/4



(b) 為簡單曲線而非封閉。

(c) $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ 。

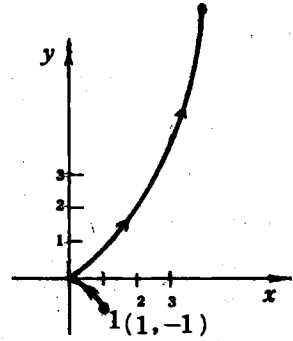
5. $x = t^2$, $y = t^3$, $-1 \leq t \leq 2$

解：(a)

t	x	y
-1	1	-1
0	0	0
1	1	1
2	4	8

(b) 簡單而非封閉。

(c) $t = y^{1/3}$, 故 $x = y^{2/3}$, $y \in [-1, 8]$ 。



6. $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, $-3 \leq t \leq 3$

解：(a)

t	x	y
-3	8	-24
-2	3	-6
-1	0	0
-0.5	-0.75	0.38
0	-1	0
0.5	-0.75	0.38
1	0	0
2	3	6
3	8	24

(b) 非簡單亦非封閉。

(c) $t^2 = x + 1$ 及 $y^2 = t^2(t^2 - 1)^2$, 因此, $y^2 = (x + 1)^2 x^2$, $x \in [-1, 8]$ 。

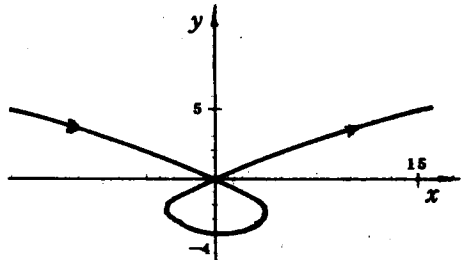
7. $x = t^3 - 4t$, $y = t^2 - 4$, $-3 \leq t \leq 3$

解：(a)

t	x	y
-2	0	0
-1	3	-3
0	0	-4
1	-3	-3
2	0	0

(b) 非簡單亦非封閉。

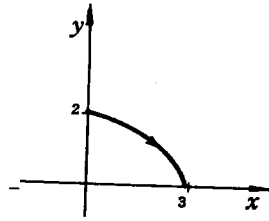
(c) $t^2 = y + 4$, 故 $x^2 = t^2(t^2 - 4)^2 = (y + 4)y^2$, $y \in [-4, 5]$ 。



8. $x = 3\sqrt{t-3}$, $y = 2\sqrt{4-t}$; $3 \leq t \leq 4$

解：(a)

t	x	y
3	0	2
3.5	$3/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
4	3	0

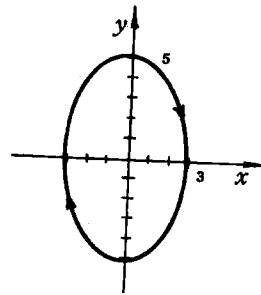


(b) 簡單但非封閉。

(c) $\frac{x^2}{9} = t - 3$, $\frac{y^2}{4} = 4 - t$, 因此可得 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ 。9. $x = 3 \sin t$, $y = 5 \cos t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

解：(a)

t	x	y
0	0	5
$\pi/6$	1.50	4.33
$\pi/4$	2.12	3.54
$\pi/3$	2.60	2.50
$\pi/2$	3	0

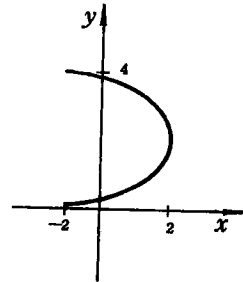


(b) 簡單及封閉。

(c) $\frac{x}{3} = \sin t$, $\frac{y}{5} = \cos t$, 因此, $(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{5})^2 = 1$ 。10. $x = 3 \sin \theta - 1$, $y = 2 \cos \theta + 2$; $0 \leq \theta \leq \pi$

解：(a)

θ	x	y
0	-1	4
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} + 2$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$	3
$\frac{\pi}{2}$	2	2
π	-1	0

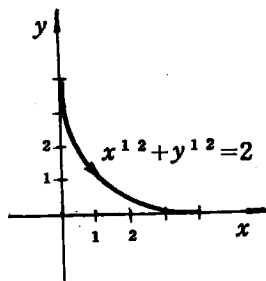


(b) 簡單但非封閉。

(c) $\frac{x+1}{3} = \sin \theta$, $\frac{y-2}{2} = \cos \theta$, 故得 $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$, $y \geq 0$ 11. $x = 4 \sin^4 t$, $y = 4 \cos^4 t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$

解：(a)

t	x	y
0	0	4
$\pi/6$	1/4	9/4
$\pi/3$	9/4	1/4
$\pi/2$	4	0



(b) 簡單而非封閉。

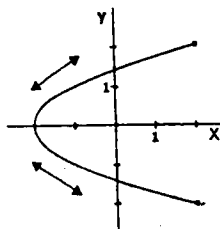
(c) $\sqrt{x} = 2 \sin^2 t$, $\sqrt{y} = 2 \cos^2 t$, 故可得 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2$ 。

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$12. x = 2 \cos \theta, y = 2 \cos \frac{1}{2} \theta, \theta \in R$$

解：(a)

θ	x	y
0	2	2
$\pi/3$	1	1.73
$\pi/2$	0	1.41
$2\pi/3$	-1	1
π	-2	0
$4\pi/3$	-1	-1
$3\pi/2$	0	-1.41
$5\pi/3$	1	-1.73
2π	2	-2



(b) 非簡單亦非封閉。

(c) $y^2 = 4 \cos^2(\theta/2) = 2 + 2 \cos \theta$, 則 $y^2 = 2 + x$, $y \in [-2, 2]$ 。在問題 13 ~ 18 中, 不用消去參數而求出 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

$$13. x = 3t^2, y = 2t^3, t \neq 0$$

$$\text{解：} \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{6t^2}{6t} = t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{6t}$$

$$14. x = 6t^2, y = t^3, t \neq 0$$

$$\text{解：} \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{12t} = \frac{t}{4} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{4} \bigg/ 12t = \frac{1}{48t}$$

15. $x = 2t - \frac{3}{t}$, $y = 2t + \frac{3}{t}$; $t \neq 0$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2 - 3t^{-2}}{2 + 3t^{-2}} = \frac{2t^2 - 3}{2t^2 + 3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{[(2t^2 + 3)4t - (2t^2 - 3)4t]}{(2t^2 + 3)^2} \cdot \frac{t^2}{2t^2 + 3} \\ &= \frac{24t^3}{(2t^2 + 3)^3} \end{aligned}$$

16. $x = 1 - \cos t$, $y = 2 + 3 \sin t$; $t \neq n\pi$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3 \cos t}{\sin t} = 3 \cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} (y') / \frac{dx}{dt} = \frac{-3 \csc^2 t}{\sin t} = -3 \csc^3 t$$

17. $x = 3 \tan t - 1$, $y = 5 \sec t + 2$; $t \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{5 \sec t \tan t}{3 \sec^2 t} = \frac{5}{3} \sin t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{5 \cos t}{3 \sec^2 t} = \frac{5}{9} \cos^3 t$$

18. $x = \frac{2}{1+t^2}$, $y = \frac{2}{t(1+t^2)}$; $t \neq 0$

$$\text{解: } \frac{dy}{dt} = -2(t+t^3)^{-2}(1+3t^2) = -2t^{-2}(1+t^2)^{-2}(1+3t^2)$$

$$\text{且 } \frac{dx}{dt} = -2(1+t^2)^{-2}2t$$

$$\text{因此 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^{-2}(1+3t^2)}{2t} = \frac{1+3t^2}{2t^3} = \frac{1}{2}t^{-3} + \frac{3}{2}t^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'}{dx} = \left(-\frac{3}{2}\right)t^{-4} - \left(\frac{3}{2}\right)t^{-2} / -2(1+t^2)^{-2}2t \\ &= \frac{-3t^{-4}(1+t^2)}{-8t(1+t^2)^{-2}} = \frac{3(1+t^2)^3}{8t^5} \end{aligned}$$

在問題 19 ~ 22 中，不用消去參數而求出所給予曲線在所給予點上的切線方程式。並畫出其圖。

1. $x = t^2$, $y = t^3$, $t = 2$

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$

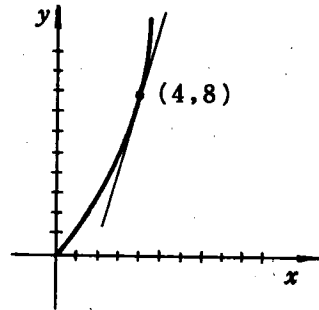
若 $t=2$ ，則 $x=4$ ， $y=8$ ，

$y'=3$ ，故切線方程式為

$$y-8=3(x-4)$$

或 $y=3x-4$

其圖形如右。



20. $x=3t$ ， $y=8t^3$ ； $t=-\frac{1}{2}$

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{24t^2}{3} = 8t^2$

若 $t=-\frac{1}{2}$

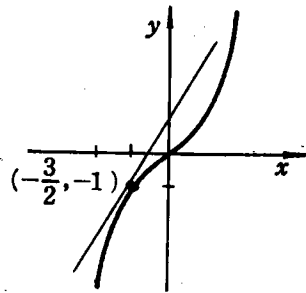
則 $x=-\frac{3}{2}$ ， $y=-1$ ， $y'=2$

故切線方程式為

$$y+1=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

或 $y=2x+2$

圖形如右。



21. $x=2\sec t$ ， $y=2\tan t$ ； $t=-\frac{\pi}{6}$

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2\sec^2 t}{2\sec t \tan t} = \csc t$

當 $t=-\frac{\pi}{6}$

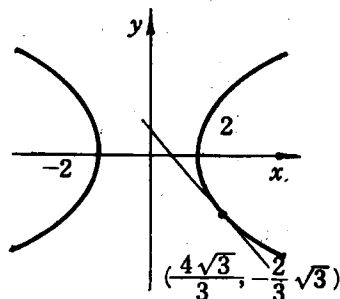
則 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ， $y=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ， $y'=-2$

故切線方程式為

$$y+\frac{2}{3}\sqrt{3}=-2\left(x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

或 $y=-2x+2\sqrt{3}$

其圖形如右所示。



22. $x = 2e^t, y = \frac{1}{3}e^{-t}; t = 0$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{1}{3}e^{-t}/2e^t$
 $= -\frac{1}{6}e^{-2t}$, 若 $t = 0$, 則

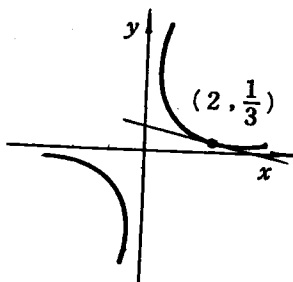
$x = 2, y = \frac{1}{3}, y' = -\frac{1}{6}$

切線方程式為

$$y - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{6}\right)(x - 2)$$

或 $y = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$

其圖形如右所示。



在問題 23 ~ 24 中, 計算積分值。

23. $\int_0^1 (x^2 - 4y) dx$, 其中 $x = t + 1, y = t^3 + 4$

解: x 由 0 到 1, 則 t 由 -1 到 0, 故可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 [(t+1)^2 - 4(t^3 + 4)] dt \\ &= \left[-t^4 + \left(\frac{1}{3}\right)t^3 + t^2 - 15t \right]_{-1}^0 \\ &= -44/3 \end{aligned}$$

$dx = dt$ $x = 1 \Rightarrow t = 0$ $x = 0 \Rightarrow t = -1$
--

24. $\int_1^{\sqrt{3}} xy dy$; 其中 $x = \sec t, y = \tan t$

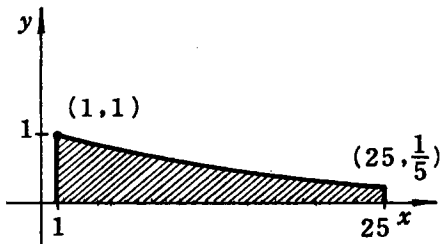
解: 把原積分轉換成對 t 積分, 可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec t \tan t \sec^2 t dt \\ &= \left[\frac{\sec^3 t}{3} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1.7239 \end{aligned}$$

$dy = \sec^2 t dt$ $y = \sqrt{3} \Rightarrow t = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$ $y = 1 \Rightarrow t = \tan^{-1}(1) = \pi/4$
--

25. 求介於曲線 $x = e^{2t}, y = e^{-t}$ 及由 $t = 0$ 到 $t = \ln 5$ 之間的 x 軸之間的區域之面積並畫圖。

$$\begin{aligned}
 \text{圖：面積} &= \int_1^{25} y \, dx \quad [dx = 2e^{2t} dy; x = 25 \Rightarrow t = \ln 5; x = 1 \Rightarrow t = 0] \\
 &= \int_0^{\ln 5} e^{-t} 2e^{2t} dt \\
 &= \int_0^{\ln 5} 2e^t dt \\
 &= \left[2e^t \right]_0^{\ln 5} \\
 &= 2e^{\ln 5} - 2e^0 \\
 &= 10 - 2 = 8
 \end{aligned}$$



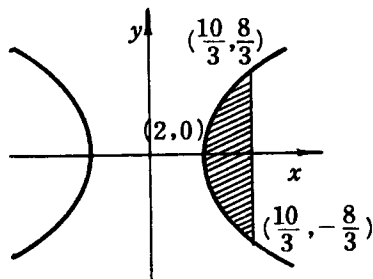
其圖形如右所示。

26. 不用消去參數而求出由曲線 $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ 及直線 $3x - 10 = 0$ 所圍之區域的面積，並畫圖。

圖：曲線 $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ 可化為 $x^2 - y^2 = 4$ ，此為雙曲線，其與 $3x - 10 = 0$ 所圍之區域如右圖所示。

$$[dx = (1 - t^{-2})dt; x = 10/3 \Rightarrow t = 3; x = 2 \Rightarrow t = 1]$$

$$\begin{aligned}
 \text{面積} &= 2 \int_2^{10/3} y \, dx \\
 &= 2 \int_1^3 (t - t^{-1})(1 - t^{-2}) dt \\
 &= 2 \int_1^3 (t - 2t^{-1} + t^{-3}) dt \\
 &= 2 \left[\frac{t^2}{2} - 2 \ln t + \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^3 \\
 &= 2 \left(\frac{40}{9} - 2 \ln 3 \right) \approx 4.4944
 \end{aligned}$$



27. 修改課文內有關擺線（或稱為旋輪線）(cycloid) 的探討（及其圖形）以處理 P 點距輪子中心之距離為 b ，而 $b < a$ 之情形。證明其所對應的參數方程式為

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

當 $a = 8$ 及 $b = 4$ 時，畫出這些方程式的圖形（稱為短幅旋輪線）(curtate cycloid)。

圖：在 554 頁的圖 6 上加上點 Q 及 T

(如右圖所示)。 Q 的坐標為：

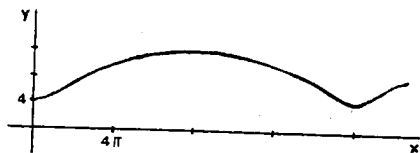
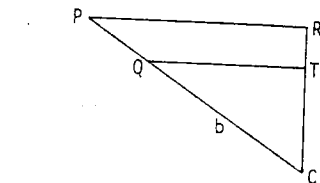
$$x = |ON| - |QT| = at - b \sin t$$

$$y = |NC| + |CT| = a - b \cos t$$

對於 $x = 8t - 4 \sin t$

$$y = 8 - 4 \cos t$$

t	x	y
0	0	4
$\pi/2$	$4\pi - 4$	8
π	8π	12
$3\pi/2$	$12\pi + 4$	8
2π	16π	4



其圖形如右所示。

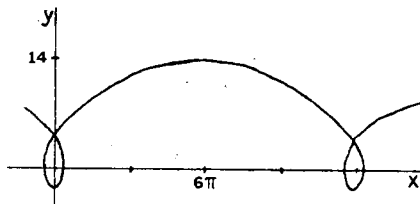
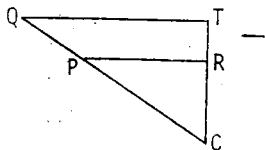
28. 對於 $b > a$ (一具有凸緣的輪子, 如火車的輪子) 的情形可依據問題 27 的做法證明你可以得到相同的參數方程式。當 $a = 6$ 及 $b = 8$ 時, 畫出這些方程式的圖形 (稱為長幅旋輪線 (擺線) (Prolate cycloid))。

圖：在 554 頁的圖 6 上加上點 Q 及 T (如下圖所示), Q 的坐標為：

$$x = |ON| - |QT| = at - b \sin t$$

$$y = |NC| + |CT| = a - b \cos t$$

對於 $x = 6t - 8 \sin t$, $y = 6 - 8 \cos t$:



29. 一支火箭在地面上以每秒 v_0 呎的速度及與地面成 α 角的角度發射, 而其路線軌跡為參數方程式

$$x = (v_0 \cos \alpha) t \quad y = -16t^2 + (v_0 \sin \alpha) t$$

(a) 證明其軌跡為拋物線。

(b) 求其飛行時間。

(c) 證明其範圍 (所飛行的水平距離) 為 $(v_0^2/32) \sin 2\alpha$ 。