一九七七年各省、市、自治区

高考数学题解汇编

梧州市教学研究室编

一九七八年三月

目　录

北 京 市 （理科）

一、解方程 $\sqrt{x-1}=3-x$。

解 方程两边平方得 $x-1=9-6x+x^2$

$x^2-7x+10=0$

解之得 $x_1=5$，$x_2=2$。

经检验 $x_1=5$ 是增根；$x_2=2$ 是原方程的很。

二、计算 $2^{-\frac{1}{2}}+\frac{2^{\circ}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$。

解 原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)=-1.$$

三、已知 $lg2=0.3010$，$lg3=0.4771$，求 $lg\sqrt{45}$。

解 $lg\sqrt{45}=\frac{1}{2}lg(9\times5)=\frac{1}{2}(lg3^2+lg5)$

$$=\frac{1}{2}(2lg3+lg\frac{10}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(2lg3+lg10-lg2)$$

$$=\frac{1}{2}(2\times0.4771+1-0.3010)$$

$$=0.8266.$$

四、证明：$(1+tg\alpha)^2=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

证明(一)　$(1+tg\alpha)^2=(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$

$$=\frac{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

证明(二)　$(1+tg\alpha)^2=1+2tg\alpha+tg^2\alpha$

$$=1+\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

五、求过两直线$x+y-7=0$和$3x-y-1=0$的交点，并且通过点(1，1)的直线方程。

解法一　解 $\begin{cases}x+y-7=0 & (1)\\ 3x-y-1=0 & (2)\end{cases}$

(1)+(2)得　$4x-8=0$

∴　$x=2$，代入(1)得$y=5$。

∴　两直线的交点是(2,5)，由两点式得：

$$\frac{y-5}{5-1}=\frac{x-2}{2-1}$$

$y=4x-3$　即　$4x-y-3=0$，这是所求的直线方程。

解法二　设所求直线方程为

$$(x+y-7)+k(3x-y-1)=0.$$

已知它过点(1,1)，则$-5+k=0$。

即　$k=5$。　代入所设方程得 $4x-y-3=0$。

六、某工厂今年七月份的生产为100万元，以后每月产

值比上个月增加20%，问今年七月份到10月份的总产值是多少？（以上每题8分）

解 设W为总产值.

$$W=1,000,000[1+120\%+(120\%)^2+(120\%)^3]$$

方括号[ ]中为一等比级数和，公比$\gamma=1.2$.

$\therefore\ W=1,000,000[\frac{(1-\gamma^4)}{(1-\gamma)}]$ 把$\gamma=1.2$代入得

$$W=1,000,000\left[\frac{1-1.2^4}{1-1.2}\right]=1,000,000\left[\frac{1-2.0736}{1-1.2}\right]$$

$$=1,000,000\times\frac{-1.0736}{-0.2}=5,368,000\ (\text{元})$$

答：今年七月份到10月份的总产值是5,368,000元.

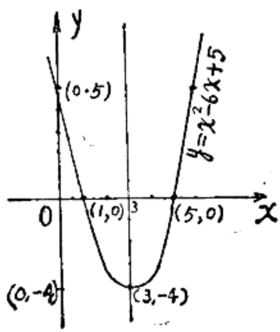
七、已知二次函数 $y=x^2-6x+5$

1. 求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程；
2. 画出它的图象；
3. 分别求出它的图象和x轴、y轴的交点坐标.

（本题13分）

解 1. $y=x^2-6x+5=x^2-6x+3^2-3^2+5$

$$=(x-3)^2-4,$$



顶点坐标是(3, −4)，对称轴方程是$x=3$,

2. 画出它的图象如图.

x	3	4	5	6
y	−4	−3	0	5

3. 令$y=0$，得

$x^2-6x+5=0$

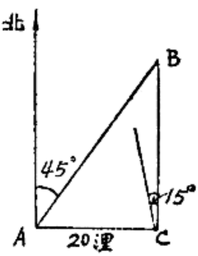
解 得 $x_1=1$，$x_2=5$，

∴ 图象与x轴的交点坐标是（1，0）和（5，0）。

令 $x=0$，得 $y=5$，

∴ 图象与y轴的交点坐标是（0.5）。

八、一只船以20浬/小时的速度向正东航行，起初船在A处看见一灯塔B在船的北45°东(即北偏东45°)方向，一小时后，船在C处看见这个灯塔在船的北15°东（即北偏东15°）方向，求这时船和灯塔的距离CB。（12分）



解 如图$\angle BAC=90°-45°=45°$，

$\angle BCA=90°+15°=105°$，

则 $\angle B=180°-(45°+105°)$

$=30°$

又 $AC=20$（浬）由正弦定理得

$$\frac{BC}{\sin 45°}=\frac{20}{\sin 30°}$$

$$\therefore\quad BC=20\times\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{1}{2}=20\sqrt{2}\qquad\text{(浬)}$$

答：船在C处看见灯塔时，和灯塔的距离CB为$20\sqrt{2}$浬，约等于28.28浬。

九、有一个圆内接三角形ABC，$\angle A$的平分线交BC于D，交外接圆于E，求证$AD\cdot AE=AC\cdot AB$。

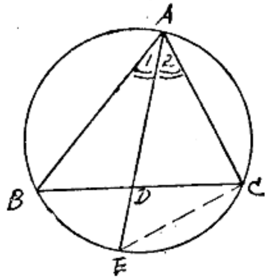
证明 连结EC，在$\triangle ABD$与$\triangle AEC$中，

∵ $\angle 1=\angle 2$，$\angle B=\angle E$，

$\therefore\quad \triangle ABD \backsim \triangle AEC,$

$\therefore \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$

$\therefore\quad AD \cdot AE = AC \cdot AB.$



十、当m取哪些值时，直线 $y = x + m$与椭圆$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$有一个交点？有两个交点？没有交点？当它们有一个交点时，画出它们的图形。

解 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 & (1) \\ y = x + m & (2) \end{cases}$

(2)代入(1)得$9x^2 + 16(x + m)^2 = 144$

整理，得$25x^2 + 32mx + 16m^2 - 144 = 0$

这个方程的根的判别式为：

$\Delta = (32m)^2 - 4 \times 25 \times (16m^2 - 144)$

$= 64(16m^2 - 25m^2 + 225) = 576(-m^2 + 25)$

(1) 当 $\Delta = 0$ 时，二次方程有两个相等的实数根，

即 $576(-m^2 + 25) = 0$； $-m^2 + 25 = 0$

$\therefore$ $m = \pm 5$，这时，直线与椭圆有一个交点。

(2) 当 $\Delta > 0$ 时，二次方程有两个不相等的实数根，

即 $576(-m^2 + 25) > 0$； $-m^2 + 25 > 0$

$\therefore$ $-5 < m < 5$，这时，直线与椭圆有两个交点。

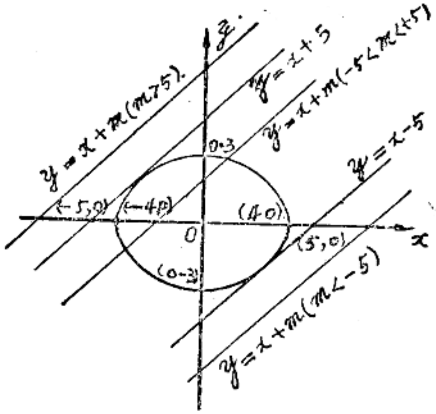
(3) $\Delta < 0$ 时，二次方程没有实数根。

即 $576(-m^2 + 25) < 0$； $-m^2 + 25 < 0$

$\therefore$ $m > 5$ 或 $m < -5$，这时直线与椭圆没有交点。

(4) 画出图形

$-y=x+m$



参考题:

I (1)求函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{\pi}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

的导数

(2)求椭圆

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕x轴旋转而成的旋转体的体积

解 (1)当$x\neq 0$时

$$f'(x)=(x^2)'\sin\frac{\pi}{x}+x^2\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)'$$

$$=2x\sin\frac{\pi}{x}+x^2\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$$

$$=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}$$

当$x=0$时

$$f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x^2\sin\dfrac{\pi}{x}-0}{x-0}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\frac{\pi}{x}=0$$

(2) $V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$

$$=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

Ⅱ (1)试用ε－δ语言来叙述"函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续"的定义。

(2) 试证明若$f(x)$在点$x=x_0$处连续，且$f(x_0)>0$，则存在一个x_0的邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，在这个邻域内，处处有$f(x)>0$。

证明 (1)定义：若$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，且对于任意给定的$\varepsilon>0$，总可以找到$\delta>0$，使只要$|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则说$f(x)$在点$x=x_0$处连续。

证明 (2)$\because f(x_0)>0$，$\therefore$存在一正数p，使得$f(x_0)>p>0$。又由于$f(x)$在$x=x_0$处连续，故对$\varepsilon=p$总可找到$\delta>0$，使只要$|x-x_0|<\delta$就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。即$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$。

因此，当$|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>f(x_0)-p>0$

证毕。

上 海 市（理科）

一、化简 $\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)+\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$

解 原式$=\dfrac{a\cdot(a+b)-a^2}{(a+b)^2}\div\dfrac{a\cdot(b-b)-a^2}{(a+b)(a-b)}$

$$=\frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{-ab}=\frac{b-a}{a+b}.$$

（2）计算 $\frac{1}{2}Lg25+Lg2-Lg\sqrt{0.1}-Log_2 9\times Log_3{}^2$

解 原式$=Lg\sqrt{25}+Lg2-Lg10^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{Lg9}{Lg2}\times\dfrac{Lg2}{Lg3}$

$=Lg5\div Lg2+\frac{1}{2}-2$

$=1+\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}.$

（3） $\sqrt{-1}$记作i，验算i是不是方程

$2x^4+3x^3-3x^2+3x-5=0$的解。

解 $\because$ $i^{-1}=i$ ，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，

$\therefore$ 将$x=i$ 代入方程左边$=2-3i+3+3i-5=0$，

故 i 是方程$2x^4+3x^3-3x^2+3x-5=0$的解。

（4） 求证 $\dfrac{sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}{sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}+\dfrac{cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}{cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}=\dfrac{2}{cos2\theta}$

证左边$=\dfrac{sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\cdot cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\cdot sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{sin(\frac{\pi}{4}-\theta)\cdot cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$$=\frac{sin(\frac{\pi}{4}+\theta+\frac{\pi}{4}-\theta)}{\frac{1}{2}sin2(\frac{\pi}{4}-\theta)}=\frac{sin\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}\cdot sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)}$$

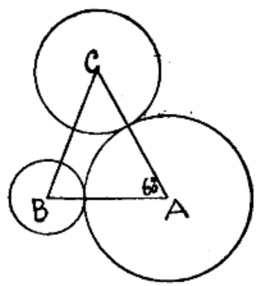
$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}cos2\theta}=\dfrac{2}{cos2\theta}=$右边。

二、题目与文科同，读者参阅文科答案。

三、已知圆A的直径为 $2\sqrt{3}$，圆B的直径为$4-2\sqrt{3}$，圆C的直径为2，圆A与圆B外切，圆A与圆C外切，$\angle A=60°$

求 （1）BC的长

（2）$\angle C$的度数。



解 $AB=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2$，

$AC=\dfrac{2}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$，

$\angle A=60°$。

由余弦定理，得

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times Cos60°$$

$$=4+(4+2\sqrt{3})-2\times 2\cdot(1+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}$$

$$=8+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}=6$$

$\therefore\quad BC=\sqrt{6}$。

由正弦定理，得

$$\sin c=\frac{AB\cdot\sin A}{BC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore\ \angle C_1=45°$，　$\angle C_2=135°$(不适合方程，舍去)。

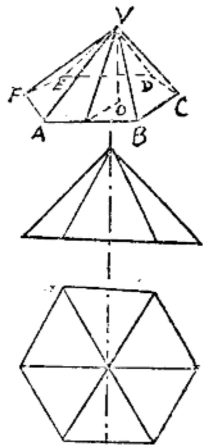
答：BC 的长为 $\sqrt{6}$，　$\angle C=45°$

四、正六棱锥$V—ABCDEF$的高为2cm，底面边长为2cm，

（1） 按 1∶1 画出它的视图。

（2） 求它的侧面积。

（3） 求它的侧棱和底面的夹角。



解　（1） 视图如右(印制时已缩小了比例)

（2）设底面中心为 0，过 0 作 $OH\perp AB$，连VH，

$$\therefore\quad OH=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},$$

$$VH=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{4+3}=\sqrt{7},$$

$\therefore s$ 正六棱锥侧 $=\frac{1}{2}L\cdot P=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot6\times2=6\sqrt{7}\,(cm^2)$。

(3) 在直角三角形VOA中，$VO=AO=2$，

$\therefore\quad\angle VAO=45°$。

五、解不等式组 $\begin{cases}16-x^2\geqslant0,\\ x^2-x-6>0.\end{cases}$

在数轴上把它的解表示出来。

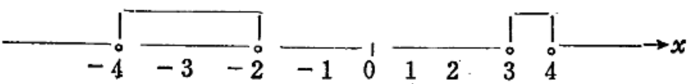
解 由 $\begin{cases} 16-x^2 \geqslant 0, \\ x^2-x-6>0. \end{cases}$

得 $\begin{cases} x^2 \leqslant 16, \\ (x-3)(x+2)>0. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x-3>0, \\ x+2>0. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x-3<0, \\ x+2<o. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x>3, \\ x>-2. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x<3, \\ x<-2. \end{cases}$

故 $3<x \leqslant 4$ 或 $-4 \leqslant x<-2$。



六、已知定点$A(-4, 0)$，$B(4, 0)$，一动点$P(x, y)$与两定点A，B的连线PA，PB的斜率的乘积为$-\frac{1}{4}$，求P点的轨迹方程，并把它化成标准形式，指出这是什么曲线。

解 直线PA的方程为$y-0=k_1(x+4)$，

即 $y=k_1(x+4)$…………………(1)

直线PB的方程为$g-0=k_2(x-4)$，

即 $y=k_2(x-4)$…………………(2)

(1)×(2) $y^2=k_1k_2(x+4)(x-4)$

$\because \quad k_1k_2 = -\frac{1}{4}$

$\therefore \quad P$点的轨迹方程为 $y^2 = -\frac{1}{4}(x^2-16)$，

即 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$(这是椭圆)．

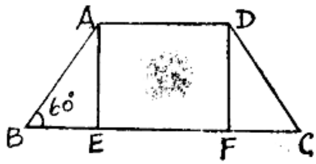
七、等腰梯形的周长为60，底角为60°，问这梯形各边的长为多少时面积最大？

解 作$AE\perp BC$，$DF\perp BC$．

设 $AB=DC=x$，则$AD+BC=60-2x$，

$AE=AB\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$，

由梯形面积公式得：



S梯形 $= \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AE$

$= \frac{1}{2}(60-2x)\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$= 15\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$

$\because \quad a = \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0$

$\therefore \quad s$有最大值

$AB=CD=x=-\frac{b}{2a} = -\frac{15\sqrt{3}}{2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = 15$，

$BE=FC=15\cdot\cos 60° = 15\times\frac{1}{2} = 7.5$，

$$AD=\frac{30-2\times7.5}{2}=7.5$$

$$BC=60-2\times15-7.5=22.5$$

答：这梯形各边长为$AB=CD=15$，$BC=22.5$，$AD=7.5$时，其面积最大。

八、当k为何值时，方程组

$$\begin{cases} x-\sqrt{y-2}=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ kx-y-2k-10=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

的两组解才相同，并求出这组解。

解 由(1) 得 $y=x^2+2\cdots\cdots\cdots(3)$

将(3)代入(2)得

$kx-x^2-2-2k-10=0$，

$\therefore\quad x^2-kx+2k+12=0$

$\because\quad$ 两组解相同，

$\therefore\quad \Delta=(-k)^2-4\times1\times(2k+12)=0$

即 $k^2-8k-48=0$，

$(k-12)(k+4)=0$，

$\therefore\quad k_1=12,\qquad k_2=-4$。

当$k=12$时，原方程组变为$\begin{cases} x-\sqrt{y-2}=0 & \cdots\cdots(4) \\ 12x-y-34=0 & \cdots\cdots(5) \end{cases}$

解之，得 $\begin{cases} x=6, \\ y=38 \end{cases}$

当$k=-4$时，原方程组变为 $\begin{cases} x-\sqrt{y-2}=0 & \cdots\cdots(6) \\ -4x-y-2=0 & \cdots\cdots(7) \end{cases}$

解之，得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=6. \end{cases}$ （经检验，是增根）

∴ 当$k=12$时，方程组有两组相同的解：$\begin{cases} x=6, \\ y=38 \end{cases}$

附加题：

九、如图所示，半圆O的直径为 2，A为直径延长的一点，而且$OA=2$，B为半圆周上任意一点，以AB为一边作等边ΔABC，问B在什么位置时，四边形$OACB$的面积为最大，并求出这个面积的最大值.

解 设 $\angle BOA=\theta$， ∵ $OB=1$，$OA=2$

$$\therefore \quad S_{\triangle BOA}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot sin\theta$$

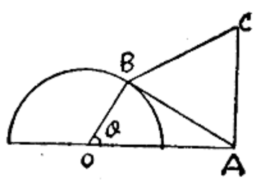
$$=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times sin\theta=sin\theta.$$

在ΔBOA中，

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\times OA\cdot OB\cdot cos\theta$$

$$=2^2+1^2-2\times 2\times 1\times cos\theta$$

$$=5-4cos\theta.$$



∵ ΔACB是等边Δ，

$$\therefore \quad S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot sin\angle BAC$$

$$=\frac{1}{2}(5-4cos\theta)\cdot sin60°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\theta).$$

$$\therefore\quad S_{\text{四边形BOAC}}=\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\theta)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

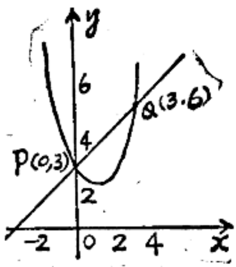
$$=2\cdot(\sin\theta\cos60^\circ-\cos\theta\cdot\sin60^\circ)+\frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

$$=2\cdot\sin(\theta-60^\circ)+\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

当$\theta-60^\circ=90^\circ$时，S有最大值.

即当$\theta=150^\circ$时，$S_{\text{四边形BOAC}}=2+\frac{5\sqrt{3}}{4}$(最大面积).

十、已知曲线$y=x^2-2x+3$与直线$y=x+3$相交于$P(0,3)$，$Q(3,6)$两点.(1)分别求出曲线在各交点的切线斜率.(2)求曲线与直线围成的面积.



解　$y=x^2-2x+3$,

$y'=2x-2$

当$x=0$时，　$y'=-2$,

$\therefore$ 曲线在$(0,3)$点的切线斜率为-2

当$x=3$时，$y'=4$,

$\therefore$ 曲线在$(3,6)$点的切线斜率为4.

(2)　令$y_1=x^2-2x+3$, $y_2=x+3$

$$\therefore\quad S=\int_0^3(y_2-y_1)dx$$

$$=\int_0^3[x+3-(x^2-2x+3)]dx$$

$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$