

# 初 等 数 学

(试用教材)

广东农林学院农机系  
数力教研组编

一九七七年八月

## 毛主席语录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

学制要缩短。课程设置要精简。教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

415053

# 初等数学

## 目 录

### 第一章 分数和比例

|    |           |    |
|----|-----------|----|
| §1 | 分数        | 1  |
| §2 | 分数的加减法    | 5  |
| §3 | 分数的乘除法    | 8  |
| §4 | 分数的四则混合运算 | 14 |
| §5 | 百分数       | 16 |
| §6 | 比和比例      | 19 |

### 第二章 有理数

|    |          |    |
|----|----------|----|
| §1 | 正数和负数    | 26 |
| §2 | 数轴、绝对值   | 27 |
| §3 | 有理数的运算   | 31 |
| §4 | 乘方       | 43 |
| §5 | 平方表和立方表  | 47 |
| §6 | 有理数的混合运算 | 49 |

### 第三章 代数式的运算

|    |          |    |
|----|----------|----|
| §1 | 代数式      | 54 |
| §2 | 整式及其加减法  | 55 |
| §3 | 整式的乘法    | 59 |
| §4 | 多项式的因式分解 | 63 |
| §5 | 分式的运算    | 69 |

## 第四章 一次方程

|    |           |    |
|----|-----------|----|
| §1 | 一元一次方程的概念 | 76 |
| §2 | 方程的基本性质   | 77 |
| §3 | 一元一次方程的解法 | 79 |
| §4 | 一元一次方程的应用 | 82 |
| §5 | 一次方程组的概念  | 84 |
| §6 | 一次方程组的解法  | 84 |
| §7 | 一次方程组的应用  | 92 |
| §8 | 一次不等式     | 94 |

## 第五章 方根、根式、一元二次方程

|    |            |     |
|----|------------|-----|
| §1 | 平方根 开平方    | 99  |
| §2 | 立方根        | 100 |
| §3 | 根式及其运算     | 107 |
| §4 | 一元二次方程及其解法 | 117 |
| §5 | 一元二次方程的应用  | 124 |

## 第六章 指数与对数

|    |             |  |
|----|-------------|--|
| §1 | 指数概念及指数运算   |  |
| §2 | 对数的概念       |  |
| §3 | 积、商、幂、方根的对数 |  |
| §4 | 常用对数        |  |
| §5 | 常用对数表与反对数表  |  |
| §6 | 对数在计算上的应用   |  |
| §7 | 自然对数与换底公式   |  |

## 第七章 直线形

|    |        |  |
|----|--------|--|
| §1 | 角和角的度量 |  |
|----|--------|--|

|    |              |
|----|--------------|
| §2 | 垂线和平行线 ..... |
| §3 | 三角形 .....    |
| §4 | 四边形 .....    |
| §5 | 相似三角形 .....  |
| §6 | 勾股定理 .....   |

## 第八章 圆

|    |                      |
|----|----------------------|
| §1 | 圆的基本性质 .....         |
| §2 | 等分圆周 .....           |
| §3 | 直线与圆相切 .....         |
| §4 | 圆与圆相切 .....          |
| §5 | 弧长、扇形面积 .....        |
| §6 | 简单图形的面积和体积计其举例 ..... |

## 第九章 平面三角

|     |                        |
|-----|------------------------|
| §1  | 锐角三角函数 .....           |
| §2  | 特殊角的三角函数值、三角函数表 .....  |
| §3  | 余角的三角函数 .....          |
| §4  | 同角的三角函数关系 .....        |
| §5  | 解直角三角形及其应用 .....       |
| §6  | 任意角的三角函数 .....         |
| §7  | 用单位圆中的线段表示三角函数 .....   |
| §8  | 任意角的三角函数化为锐角三角函数 ..... |
| §9  | 正弦定理和余弦定理 .....        |
| §10 | 解任意三角形及其应用 .....       |
| §11 | 加法定理及其推论 .....         |

# 第十章 函数及其图象

|    |           |
|----|-----------|
| §1 | 函数的概念     |
| §2 | 一次函数及其图象  |
| §3 | 二次函数及其图象  |
| §4 | 指数函数及其图象  |
| §5 | 对数函数及其图象  |
| §6 | 三角函数的图象   |
| §7 | 反三角函数及其图象 |

## 第一章 分数和比例

## §1 分 数

## 一、分数的意义

在日常生活和生产实践中，经常要用到分数。例如，某班有工农兵学员45人，其中解放军战士6人，那末，解放军战士就占全班学员的四十五分之六。这里的“四十五分之六”就是一个分数，写成 $\frac{6}{45}$ 。又如把1斤化肥分成四等分，那末其中的一份就是四分之一斤，写成 $\frac{1}{4}$ 斤，其中的三份，就是四分之三斤，写成 $\frac{3}{4}$ 斤。可见，把一个整体分成若干等分，表示其中的一份或几份的数，叫做分数。

分数一般可以表示为 $\frac{b}{a}$ 读作“a分之b”。其中a叫做分母，b叫做分子，中间的横线叫做分数线。

除法也可以用分数来表示，例如：

$$1 \div 3 = \frac{1}{3}; \quad 3 \div 4 = \frac{3}{4}; \quad 5 \div 6 = \frac{5}{6}.$$

所以，除法和分数的关系是：除数相当于分母，除数相当于分子，商数相当于分数值，分数线相当于除号。如用式子表示，就是

$$\frac{\text{分子(被除数)}}{\text{分母(除数)}} = \text{分数值(商数)}$$

例如：  $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75; \quad \frac{6}{5} = 6 \div 5 = 1.2;$

$$\frac{7}{7} = 7 \div 7 = 1.$$

比较分数 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{6}{5}$ 、 $\frac{7}{7}$ ，不难看出，第一个分数的分子比分母小，第二个分数的分子比分母大，第三个分数的分子和分母相等。

相等。分子比分母小的分数叫做真分数。如  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{12}{13}$  等都是真分数。分子比分母大或分子和分母相等的分数, 叫做假分数。如  $\frac{6}{5}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{8}{5}$ ,  $\frac{11}{10}$ ,  $\frac{7}{7}$ ,  $\frac{100}{100}$  等都是假分数。

一个<sup>假</sup>分数可以化成整数加一个真分数的形式。如  $\frac{6}{5} = \frac{5+1}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ , 通常还把分数部分挨着整数部分, 如  $1 + \frac{1}{5}$  写成  $1\frac{1}{5}$ , 这叫做带分数。读成“一又五分之一”, 又如  $2 + \frac{4}{5}$  写成  $2\frac{4}{5}$ , 读成“二又五分之四”等等。

## 二、分数的基本性质, 约分和通分

从分数和除法的关系  $b \div a = \frac{b}{a}$  可得: 分数的分子分母都扩大或都缩小同样的倍数, 分数的值不变。用式子表示, 就是:

$$\frac{b}{a} = \frac{b \times m}{a \times m} \quad (m \text{ 不能是零})$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b \div n}{a \div n} \quad (n \text{ 不能是零})$$

当数  $a$  和数  $b$  同时能除以一个或几个数整除时, 这些数都叫做数  $a$  和数  $b$  的公约数。公约数中最大的一个, 叫做最大公约数。例如 12 和 18 同时能被 2、3、6 整除, 所以这些数都是 12 和 18 的公约数, 其中 6 是最大公约数。

把一个数的分子和分母同时除以它们的公约数使其简化, 叫做约分。约分时, 最后要使分数成为最简的形式 (即分数的分子和分母只能同时被 1 整除)。例如, 对分数  $\frac{48}{84}$  来说, 6 是分子和分母的公约数, 所以用 6 除分子和分母, 即得

$$\frac{48}{84} = \frac{8}{14}$$

但 14, 8 还有公约数 2, 所以再用 2 除分子和分母, 得

$$\frac{48}{84} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

而4和7再没有公约数(除1以外)了, 所以  $\frac{4}{7}$  就是最简分数。

把几个分数化成同分母的分数, 叫做通分。为什么要通分?

例如, 比较  $\frac{2}{5}$  与  $\frac{3}{5}$  的大小, 显然  $\frac{3}{5}$  大于  $\frac{2}{5}$ , 因为把一个

量分为5等分, 自然3份比2份大。但比较  $\frac{3}{4}$  与  $\frac{6}{7}$  谁大谁小

就不容易判断了。然而, 如果化成同分母的分数(即通分)后, 就好比较了。例如:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28},$$

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 4}{7 \times 4} = \frac{24}{28}.$$

显而易见,  $\frac{24}{28}$  大于  $\frac{21}{28}$ , 即  $\frac{6}{7}$  大于  $\frac{3}{4}$ 。

通分后的新分母, 显然是原来各个分母公共的倍数。因此, 我这个新分母最直接的方法是: 把各分数的分母相乘。但有时这

样求得的新分母太大, 例如, 将  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{4}{9}$  通分, 得

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 8 \times 9}{2 \times 8 \times 9} = \frac{72}{144}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 2 \times 9}{8 \times 2 \times 9} = \frac{54}{144}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \times 2 \times 8}{9 \times 2 \times 8} = \frac{64}{144}$$

这里, 144是2、8、9的公共倍数, 但72也是2、8、9

的公共倍数, 因此, 又可将  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{4}{9}$  通分成

$$\frac{1}{2} = \frac{36}{72}, \quad \frac{3}{8} = \frac{27}{72}, \quad \frac{4}{9} = \frac{32}{72}.$$

几个数的公倍数不只一个，不过，总有一个最小的，这个最小的公倍数便称为这几个数的最小公倍数。所以，把几个分数通分时，最好是取各分母的最小公倍数做新分母。以下介绍几个数的最小公倍数的方法。

例1. 求18和30的最小公倍数。

$$\begin{array}{r|rr}
 2 & 18 & 30 \\
 \hline
 3 & 9 & 15 \\
 \hline
 & 3 & 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{各数都被2整除，把公约数2提出来，并} \\ \text{把所得的商9、15写下来} \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{各数都能被3整除，把公约数3提出来，} \\ \text{并把所得的商3、5写下来} \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{(3和5只能被1整除，此外再没有公约数)} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

把所有的公约数与最后一行各个数连乘起来所得的积

$$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$$

就是18和30的最小公倍数。

例2. 求0、12、14的最小公倍数。

$$\begin{array}{r|rrr}
 2 & 0 & 12 & 14 \\
 \hline
 3 & 3 & 0 & 7 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 7
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{各数都能被2整除，把公约数} \\ \text{2提出来，并把所得的商3、} \\ \text{0、7写下来} \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{前两数能被3整除，把公约数} \\ \text{3提出来，并把所得的商1、2} \\ \text{写下来，同时把不能被3整除} \\ \text{的7也照写下} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

1、2、7任何两个再也没有公约数(除1外)了。因此，0、12、14的最小公倍数为

$$2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 7 = 84$$

从以上两例可以看出，求几个数的最小公倍数的步骤为：

- (1) 把能整除各数的约数提出来，并将所得的商写在下边。
- (2) 若没有能整除所有各数的约数时，则把能整除其中某几个数的约数提出来，并把这几个数的商写下来，也把其它的数照写下来。

(3) 将上述过程不断进行，直到写下来的数中任何两个都没有公约数(除1外)时为止。

(4) 把提出的所有公约数以及最后写下来的一行数连乘起来，即得所求几个数的最小公倍数。

## 练 习

1. 找下列各组数的最小公倍数。

(1) 2, 3;

(2) 8, 12;

(3) 28, 70;

(4) 42, 70, 105

2. 比较下列分数的大小。

(1)  $\frac{5}{6}$  与  $\frac{4}{5}$ ;

(2)  $\frac{10}{12}$  与  $\frac{8}{10}$

(3)  $\frac{75}{99}$  与  $\frac{150}{198}$ ;

(4) 15 与  $\frac{625}{5}$

## §2 分数的加减法

分数加减法的意义和整数加、减法的意义一样，加法是求两个数的和的运算，减法是已知两个数的和与其中的一个加数，求另一个加数的运算。加法与减法互为逆运算。

## 一、同分母分数的加减法

例1.  $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = ?$

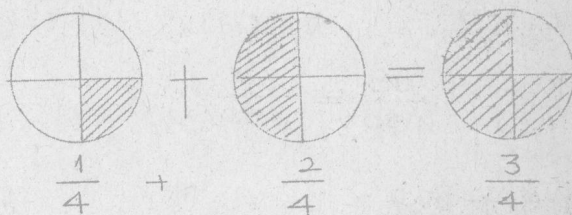


图 1—1

从图1—1可以看出

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$$

例2.  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = ?$

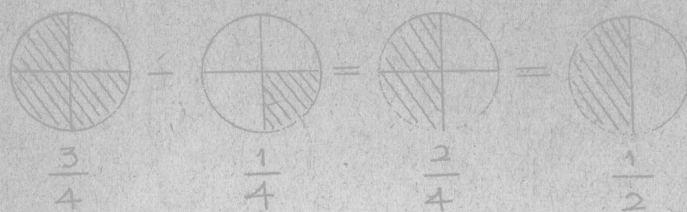


图 1-2

从图 1-2 可以看出。

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

从这里我们得到同分母分数相加、减的规律是：分子相加、减，分母不变。用公式表示就是：

$$\frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}$$

例 3. 某工厂广大革命职工在毛主席“抓革命、促生产”的战略方针指引下，第一季度就完成了全年生产任务的  $\frac{26}{100}$ ，接着第二季度又完成了全年生产任务的  $\frac{42}{100}$ 。问上半年共完成全年生产任务的百分之几？还剩下百分之几？

解：上半年共完成全年生产任务的

$$\frac{26}{100} + \frac{42}{100} = \frac{68}{100}$$

还剩下的任务数为

$$\frac{100}{100} - \frac{68}{100} = \frac{32}{100}$$

## 二. 异分母分数的加减法

例 4.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$

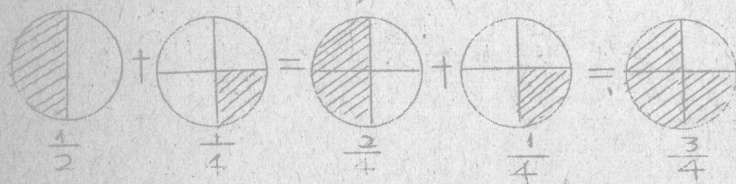


图 1-3

从图 1-3 可以看出，先把这些分数通分，然后再按同分母分数的加法进行演算。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}.$$

例 5.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = ?$

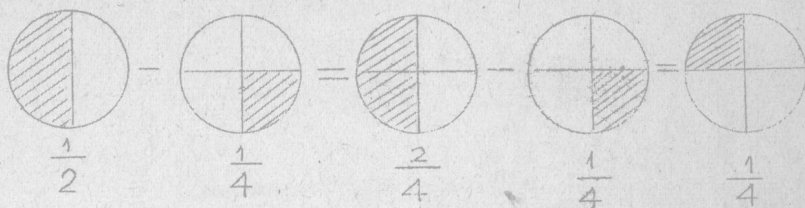


图 1-4

从图 1-4 可以看出：先要进行通分，然后按照上面的方法演算。

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

从这里我们得到异分母分数相加、减的规律是：先通分，然后再按照同分母分数的加、减法的规律相加、减。

例 6.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$

解：  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

例 7. 计算下列各题：

(1)  $3\frac{1}{5} + 1\frac{2}{3} - \frac{7}{10}$ ; (2)  $2 + 2\frac{1}{3} - 4\frac{1}{5}$

解：(1)  $3\frac{1}{5} + 1\frac{2}{3} - \frac{7}{10} = (3+1) + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{7}{10}$

$$= 4 + \frac{6+20-21}{30} = 4 + \frac{5}{30} = 4 + \frac{1}{6} = 4\frac{1}{6}$$

(2)  $2 + 2\frac{1}{3} - 4\frac{1}{5} = (2+2-4) + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

$$= \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

## 练习

1. 计算下列各式:

(1)  $\frac{1}{2} + \frac{7}{12} = ?$

(2)  $\frac{5}{18} - \frac{1}{12} = ?$

(3)  $20 + \frac{1}{9} = ?$

(4)  $11 - \frac{1}{9} = ?$

(5)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = ?$

(6)  $2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4} - 3\frac{2}{5} = ?$

(7)  $9\frac{7}{18} - 3\frac{7}{12} - 4 = ?$

(8)  $2 - \frac{5}{7} = ?$

2. 某车间5月份的上、中、下旬,各完成全月生产任务的 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{3}{7}$ ,问此车间全月完成任务多少?超额多少?(用分母为100的分数表示)。

3. 某翻砂车间铸出1200件零件中,有63件废品,问正品合格率是多少?(用分母为100的分数表示)。

## §3 分数的乘除法

## 一、分数的乘法

例1,  $\frac{4}{9} \times 6 = ?$

解:  $\frac{4}{9} \times 6$  就是求6个 $\frac{4}{9}$ 的和,所以

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} \times 6 &= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \\ &= \frac{4+4+4+4+4+4}{9} = \frac{4 \times 6}{9} \\ &= \frac{24}{9} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

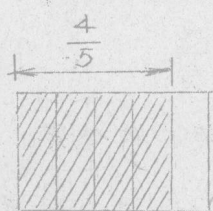
由此得出：整数乘分数，等于整数乘到分子上去，分母不变。  
用公式表示，就是

$$\frac{b}{a} \times c = \frac{b \times c}{a}$$

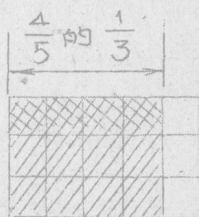
从例1还看到，分数的倍数是用分数和整数相乘来表示的，  
也就是说， $\frac{4}{5}$  的3倍就是  $\frac{4}{5}$  乘以3。我们可以推想， $\frac{4}{5}$  的  $\frac{2}{3}$  倍  
也应当用  $\frac{4}{5}$  和  $\frac{2}{3}$  的乘积  $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$  来表示。

以下介绍  $\frac{4}{5}$  和  $\frac{2}{3}$  相乘的方法。

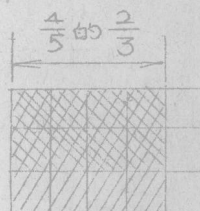
例2. 用含铁量占  $\frac{2}{3}$  的铁矿石  $\frac{4}{5}$  吨炼铁，如不计损耗，  
能炼出多少吨铁？



(a)



(b)



(c)

图 1-5

从图 1-5 (a)，先把一吨铁矿石分成五份，取其4份，表  
示  $\frac{4}{5}$  吨铁矿石。因铁只占铁矿石中的  $\frac{2}{3}$ ，所以把  $\frac{4}{5}$  吨再分  
成3份，取其2份就是铁的含量（如图 1-5 (c) 中交叉线所示）。  
也就是  $\frac{4}{5}$  吨的  $\frac{2}{3}$ ，由图看出，铁的含量是  $\frac{8}{15}$  吨。在  $\frac{8}{15}$  中  
的分子8是  $\frac{4}{5}$  和  $\frac{2}{3}$  中分子的乘积（ $8=4 \times 2$ ）分母15是  
 $\frac{4}{5}$  和  $\frac{2}{3}$  中分母的乘积（ $15=5 \times 3$ ），因此有：

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$$

即  $\frac{4}{5}$  吨的铁矿石中含铁  $\frac{8}{15}$  吨。故如不计损耗，可炼出  $\frac{8}{15}$  吨

铁。

由此得出：分数乘以分数，用分子相乘的积做分子，分母相乘的积做分母。用公式表示，就是：

$$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c}$$

在作分数相乘的过程中，还须注意：

(1) 带分数相乘时，必须先将带分数化为假分数，然后才按分数乘法规则进行运算。如

$$2\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{12 \times 2}{5 \times 3} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

$$1\frac{4}{7} \times 1\frac{1}{3} = \frac{11}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{44}{21} = 2\frac{2}{21}$$

(2) 可在运算中间进行约分，以简化计算，如上式中：

$$\frac{12}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

如果两个数的乘积是1，那么这两个数叫做互为倒数。例如  $\frac{4}{5}$  和  $\frac{5}{4}$ ， $\frac{2}{3}$  和  $\frac{3}{2}$  都是互为倒数。特别应该注意的是整数也有它的倒数，如2的倒数是  $\frac{1}{2}$  因为2可以看成分子为1的分数  $\frac{2}{1}$ 。

## 二、分数的除法

例1：一根电线，剪下  $5\frac{1}{3}$  米安装电灯，而剪下的刚好是全长  $\frac{2}{5}$ ，问这根电线的全长是多少米？

解：根据题意：

$$\text{全长} \times \frac{2}{5} = 5\frac{1}{3} \text{ 米，}$$

即：

$$\text{全长} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{3} \text{ 米。}$$

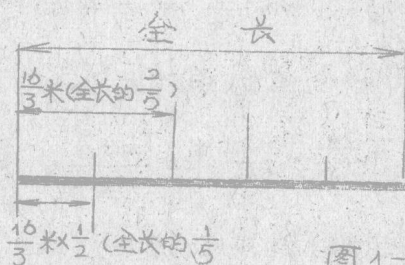


图1-5

由于除法是乘法的逆运算（与整数情形相同），所以

$$\text{全长} = \frac{10}{3} \text{ 米} \div \frac{2}{5} \text{ ----- ①}$$

这里遇到分数的除法，我们还不懂计算。但是，我们可以从另一途径计算出全长。因为已知条件告诉我们， $\frac{10}{3}$  米是全长的  $\frac{2}{5}$ （如图 1-6 所示），所以  $\frac{10}{3}$  米的一半是全长的  $\frac{1}{5}$ ，即  $\frac{10}{3}$  米  $\times \frac{1}{2}$  是全长的  $\frac{1}{5}$ ，因而  $\frac{10}{3}$  米  $\times \frac{1}{2}$  的 5 倍就是全长。

$$\text{全长} = \left( \frac{10}{3} \text{ 米} \times \frac{1}{2} \right) \times 5 = \frac{10}{3} \text{ 米} \times \frac{5}{2} \text{ ----- ②}$$

从②式容易算出

$$\text{全长} = \frac{10}{3} \text{ 米} \times \frac{5}{2} = \frac{40}{3} \text{ 米} = 13 \frac{1}{3} \text{ 米}。$$

比较①式和②式，可得

$$\frac{10}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{5}{2} \text{ ----- ③}$$

③式告诉我们：两分数相除，等于被除数乘以除数的倒数。这就是分数除法的规律。用公式表示，就是

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$$

毛主席指出：“矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。”分数的除法与乘法就是一对矛盾。当引进倒数概念后（条件），除法便可转化为乘法。分数除法的规律，正是对立统一法则在数学上的反映。

例 2. 计算：

$$4 \div \frac{4}{5} = ? \quad \frac{2}{7} \div 3 = ? \quad \frac{4}{3} \div \frac{1}{7} = ?$$

解：应用分数除法规律

$$4 \div \frac{4}{5} = \frac{4}{1} \div \frac{4}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{5}{4} = 5,$$