陆传赉 编著

PAIDUILUN

排队论（第2版）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

排　队　论

（第2版）

陆传赉　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是一本介绍排队论的初等理论和方法的教科书，全书共分8章，前两章为预备知识，第3章为 $M/M/1$ 排队模型，第4章为 $M/M/n$ 排队模型，第5章为非马尔可夫排队模型，第6章为离散时间排队模型，第7、8章为特殊排队模型及优化模型。本书叙述简练并附有大量例题，给出习题解答或提示便于读者自学。

本书可作为信息与通信工程，计算机及其应用。管理与运筹工程、铁路（交通）运输等专业本科生的教材或研究生的参考教材，也可作为相关的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

排队论/陆传赉编著. —2版. —北京：北京邮电大学出版社，2009.10
ISBN 978-7-5635-2075-6

Ⅰ.排… Ⅱ.陆… Ⅲ.排队论 Ⅳ.O226

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第123329号

书　　名：排队论（第2版）
作　　者：陆传赉
责任编辑：李欣一
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号（邮编：100876）
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京忠信诚胶印厂
开　　本：720 mm×1 000 mm　1/16
印　　张：15
字　　数：291千字
印　　数：1—3 000册
版　　次：1994年5月第1版　2009年10月第2版　2009年10月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2075-6　　　　定　价：25.00元

· **如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系** ·

再版前言

本书是在1994年出版的第1版的基础上修订的，可作为高等学校计算机、管理与运筹、铁路(交通)运输等专业的教材，也可供有关的工程技术人员参考。

本书自1994年出版以来已重印多次，深受广大读者的欢迎与厚爱，由于第1版中的一些基础章节缺乏例子支撑，于是本次再版中增加了若干例子，以便读者能更深入地理解并掌握所学内容。再版中除改进第1版中某些不当之处和笔误外，在数值计算中均统一取小数点后四位小数；对书后各章习题除个别外均给出较详细的解答或提示。其中，刘咏彬给出第2、3章习题的解答，方莉给出第4章习题的解答，周素华博士给出其他各章习题的解答。本人在他们给出解答的基础上作了一些补充与订正，并给出某些疑难习题的提示。相信再版后的书定能使读者阅读起来更加方便。

书中的一部分内容能直接应用于解决实际课题，另一部分内容为读者今后进一步学习有关课程或在实际应用方面提供一定的理论基础。

书中不足或欠妥之处，恳请广大读者提出宝贵的意见和建议。

作　者

目　　录

第1章　预备知识

1.1　排队问题的基本概念

1.1.1　概述

众所周知，某些资源、设备或空间（场地）的有限性及社会各部门对它们的需求是存在排队现象的主要因素，而诸如服务机构的管理水平低劣，服务窗（员）的素质差，效率不高，或顾客的无计划性以及其他原因也往往使不该有的排队现象出现。

我们所要讨论的排队论是人们研究大量服务过程的一门数学理论。在社会生活中碰到的排队现象，诸如到商场购物，去图书馆借阅书刊、资料，汽车到加油站加油，船舶停靠码头，在公共电话亭打电话，将有毛病的电器送维修部门进行维修，病人去医院挂号看病，将有关数据输入计算机进行存储等，均可归结为顾客与服务窗之间的一种服务关系，并可用框图表示这类排队过程，如图 1.1.1 和表 1.1.1 所示。

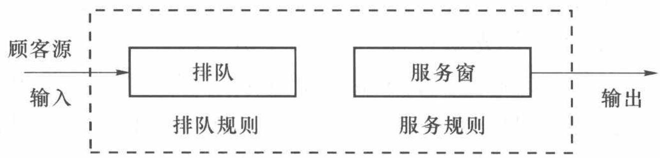

图 1.1.1　排队模型框图

表 1.1.1　顾客与服务窗之间的服务关系

顾　　客	要求服务项目	服　务　窗
待修机（仪）器	修理	维修人员
汽车	加油	加油站
病人	看病	大夫
电话呼唤	通话	交换台
飞机（船舶）	进航空港（港口）	跑道（码头）
球队	比赛	场地
信号（或图像）	传送	信道
数据	存储	计算机
⋮	⋮	⋮

1.1.2 排队系统的特征或组成

1. 输入过程

输入过程是对顾客到达系统的一种描述。

(1) 顾客总体可以有限或无限(如流入水库的水)；

(2) 顾客到达系统的方式可以逐个或成批；

(3) 顾客相继到来时间间隔可分为确定型(比如定期航班、定期的课程表等)和随机型(比如看病的病人、候车的旅客、进港口的船舶)；

(4) 顾客到达系统可以是独立的或相关的(独立意即某时刻前到达的顾客对该时刻后到达的顾客无影响)，输入过程可以是平稳、马尔可夫、齐次的等。

2. 排队规则

排队规则是服务窗对顾客允许排队及对排队次序和方式的一种约定。排队规则可分为3种制式。

损失制——顾客到达系统时，如果系统中所有服务窗均被占用，则到达的顾客随即离去，比如打电话时碰到占线，用户即重拨或离去另找地方或过些时间再打；又如旅店客满谢客，挂牌大夫限额挂号，计算机限定的内存等均为此种情形。

等待制——顾客到达系统时，虽然发现服务窗均忙着，但系统设有场地供顾客排队等候之用，于是到达系统之顾客按先后顺序进行排队等候服务。通常的服务规则有先到先服务，后到先服务(比如仓库中同种物品堆垒后的出库过程)，随机服务，优先服务(比如邮政中的快件与特快专递业务，重危病人的急诊，交通中让救火(护)车、警车及迎宾车队优先通过，设立专用车道)等。

混合制——它是损失制与等待制混合组成的排队系统，此系统仅允许有限个顾客等候排队，其余顾客只好离去永不再来；或者顾客中有的见到排队队伍而不愿费时等候，当队伍短时愿排队等候服务；也有排队等候的顾客当等候时间超过某个时间就离队而去均属这种系统。

3. 服务窗(员)

(1) 系统可以无窗口(如自选自付款购物)、一个窗口或多个窗口为顾客进行服务。

(2) 在多个服务窗情形，顾客排队可以平行多队排列，串列或并串同时存在的混合排队。

(3) 一个服务窗可以为单个顾客或成批顾客进行服务。

(4) 各窗口的服务时间可为确定型(如交通路口红绿灯亮的时间、各单位固定的上下班时间)或随机型。服务时间往往假定是平稳的。

4. 排队系统的目标参量(或运行指标)

(1) 绝对通过能力 A，表示单位时间内被服务完顾客的均值。

(2) 相对通过能力 Q，表示单位时间内被服务完顾客数与请求服务顾客数的比值。

(3) 系统排队长度均值 L_s，表示系统内顾客数（排队等候顾客加上正被服务顾客数）的均值。

(4) 排队等候顾客的平均队列长度 L_q，表示系统内排队等候顾客数的均值。

注：如果 L_s（或 L_q）较大，那么说明该系统的工作效率较低。

(5) 顾客在系统内逗留时间的均值 W_s；顾客排队等候服务的时间的均值 W_q；服务时间的均值定义为 $\bar{\tau}$；显然有

$$W_s = W_q + \bar{\tau} \tag{1.1.1}$$

(6) 服务窗连续繁忙的时间长度，即忙期 T_b，它是随机变量。

(7) 对损失制排队模型，系统的损失概率 $P_{损}$，即系统满员概率。

1.1.3　排队模型的分类与记号

记 X 为顾客相继到达系统的间隔时间 T 的概率分布；Y 为服务窗口所耗费的服务时间 τ 的概率分布；Z 为服务系统内服务窗的个数；m 为系统内（最大）排队容量或顾客在系统中排队所允许的（最大）长度（包括正在服务和排队等待的顾客）。

又令 M 为负指数分布；D 为确定型分布；E_k 为 k 阶爱尔兰（Erlang）分布；G 为一般分布；GI 为一般独立的分布。

通常用记号 $X/Y/Z/m$（或∞）来表达排队模型。为方便起见，当系统最大排队容量为∞时，就可略写为 $X/Y/Z$，举例如下。

$M/M/n$ 排队模型表示顾客相继到达系统的间隔时间服从负指数分布，而服务时间也服从负指数分布，系统内设有 n 个服务窗，系统容量为无限（充分大即可）的等待制排队模型。

$M/M/n/m$ 排队模型表示顾客到达的间隔时间和服务时间均为负指数分布，有 n 个服务窗且系统容量为 m 的损失制排队模型。

$G/M/1$ 排队模型表示顾客到达的间隔时间为一般分布，服务时间为负指数分布，只设有一个服务窗且系统容量为无限的等待制排队模型。

$G/GI/1$ 排队模型表示顾客到达的间隔时间为一般分布，服务时间为一般独立分布，只设有一个服务窗且系统容量为无限的等待制排队模型。

$M^k/M/1$ 排队模型表示每批有 k 个顾客到达系统，且批与批到达间隔时间是负指数分布，服务时间为负指数分布，只有一个服务窗，且系统容量为无限的等待制排队模型。

$M/M/n/m/m$ 排队模型表示顾客到达的间隔时间与服务时间均为负指数分布，系统内有 n 个服务窗，顾客源为 m 且系统容量也为 m 的闭合式（循环）排队模型。

1.2 排队问题中常见的事件流

我们将同类事件一个(批)个(批)随机地来到服务窗口要求服务的序列称作事件流，如电话局接到的呼唤流、计算机出现的故障流、进站的汽车流、看病的人流、去参加考试的考生流等均是事件流。显然，这些事件流均为随机变量，由于顾客(用户)到达系统的间隔时间与服务时间均为非负，故它们还是非负的随机变量，常用的有下述几个分布。

(1) 二项分布：在 n 次独立试验中，某事件 A 出现 m 次的概率为$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$，其中 p 为事件 A 出现的概率。

(2) 泊松(Poisson)流，又称最简单事件流。它具有如下特点。

① 平稳性。在任何一段长度为 t 的时间区间内，出现任意数量事件的概率只与 t 有关，而与 t 所处的位置(或与起始时刻)无关。记 λ 为平稳流的强度。

② 无后效性(又称无记忆性或马尔可夫性)。在互不相交的两时间区间 T_1、T_2 内所出现的事件数是相互独立的。比如到商店购物的顾客、待修的机器、进站的列车等均具有无后效性。

③ 普通性。在同一个瞬间，多于一个事件出现的概率(或同时到达系统有两个或两个以上顾客的概率)可忽略不计。

如果用数学语言的话，记 $N(t)$为时间区间$[0,t]$内到达的事件(顾客)数；令

$$P_n(t_1,t_2)=P\{N(t_2)-N(t_1)=n\} \qquad (t_2>t_1) \quad n\geqslant 0 \tag{1.2.1}$$

倘若它满足下列条件：

a. 不重叠区间内到达的(顾客)事件是彼此独立的；

b. 在时间区间$[t,t+\Delta t]$内到达一个(顾客)事件的概率为

$$P_1(t,t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \tag{1.2.2}$$

其中，$o(\Delta t)$是 Δt 的高阶无穷小量(当 $\Delta t\to 0$ 时)，λ 是正常数。

c. 在时间区间$[t,t+\Delta t]$内到达两个或两个以上(顾客)事件的概率为

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n(t,t+\Delta t) = o(\Delta t) \tag{1.2.3}$$

那么，就称顾客到来的事件流是一泊松流。简记 $P_n(t)=P_n(0,t)$，容易验证

$$P_0(t,t+\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t) \tag{1.2.4}$$

且

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t)&=P[N(t+\Delta t)-N(0)=n] \\ &=P_n(t)P_0(t,t+\Delta t)+P_{n-1}(t)P_1(t,t+\Delta t)+P_{n-2}(t)P_2(t,t+\Delta t)+\cdots \\ &=P_n(t)(1-\lambda\Delta t)+P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t) \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

由此可得

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+o(1)$$

$$(1.2.6)$$

令 $\Delta t\to 0$,有

$$\begin{cases}P'_n(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)\\P_n(0)=0 \qquad n\geqslant 1\end{cases} \tag{1.2.7}$$

及

$$\begin{cases}P'_0(t)=-\lambda P_0(t)\\P_0(0)=1\end{cases} \tag{1.2.8}$$

由上两式解得

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \quad n=0,1,2,\cdots\ (t>0) \tag{1.2.9}$$

此即为泊松分布。

(3) 负指数分布

当顾客流为泊松流时,用 T 表示两个相继顾客到达系统的时间间隔,记其分布函数为

$$F(t)=P(T\leqslant t)=1-P(T>t)=1-P_0(t) \quad (t>0)$$

由于 $P_0(t)=e^{-\lambda t}(\lambda>0)$,故有

$$F(t)=1-e^{-\lambda t} \quad (t>0) \tag{1.2.10}$$

相应的分布密度为

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \quad (t>0) \tag{1.2.11}$$

这就是负指数分布的密度函数。

易知

$$E(T)=\frac{1}{\lambda} \quad D(T)=\frac{1}{\lambda^2}$$

通常,服务窗为一顾客服务所需的时间 τ 的分布函数与分布密度为

$$F_\tau(t)=1-e^{-\mu t} \quad f_\tau(t)=\mu e^{-\mu t} \quad (t>0) \tag{1.2.12}$$

其中,参数 μ 为单位时间内服务窗所完成服务的顾客均值数,且有

$$\bar{\tau}=E(\tau)=\frac{1}{\mu} \tag{1.2.13}$$

(4) 爱尔兰分布

考察最简单的事件流,记各事件到达系统的时间间隔序列为 $T_1,T_2,\cdots,T_i,\cdots$,且它们是同负指数分布的随机变量序列,如图 1.2.1 所示。

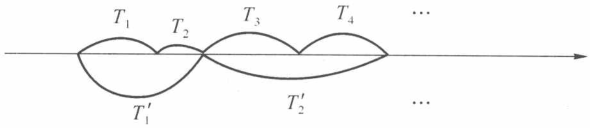

图 1.2.1 爱尔兰随机流

置

$$T'_1=T_1+T_2, T'_2=T_3+T_4, T'_3=T_5+T_6, \cdots, T'_n=T_{2n-1}+T_{2n}, \cdots$$

那么，称 $T'_1, T'_2, \cdots, T'_n, \cdots$ 是二阶爱尔兰流。

如令

$$T'_1=\sum_{i=1}^{k} T_i, T'_2=\sum_{i=1}^{k} T_{k+i}, \cdots$$

则称 $T'_1, T'_2, \cdots, T'_n, \cdots$ 是 k 阶爱尔兰流。由于各个 T_i 是相互独立且服从相同参数 λ 的负指数分布，为求 k 阶爱尔兰流的分布，可记 $T=\sum_{i=1}^{k} T_i$，注意 $f_{T_1}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\ (t>0)$，故由 $f_{T_1}(t)$ 的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[f_{T_1}(t)]=\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{-st} dt=\frac{\lambda}{s+\lambda}$$

及拉普拉斯变换的性质得到

$$\mathscr{L}[f_T(t)]=\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^k}$$

再查反拉普拉斯变换表知

$$f_T(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \qquad (t>0, \lambda>0) \tag{1.2.14}$$

并且

$$E(T)=\sum_{i=1}^{k} E(T_i)=\frac{k}{\lambda}$$

$$D(T)=\sum_{i=1}^{k} D(T_i)=\frac{k}{\lambda^2}$$

（5）广义爱尔兰分布

设 $\{T_i, i=1,2,\cdots\}$ 如上段所述为独立且有分布密度

$$f_{T_i}(t)=\lambda_i e^{-\lambda_i t} \qquad (\lambda_i \text{ 各不相同且 } t>0)$$

的各事件到达的时间间隔序列，那么，$T=\sum_{i=1}^{k} T_i$ 的广义爱尔兰分布密度为

$$f_T(t)=\prod_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{j \neq i}^{k} (\lambda_j-\lambda_i)}, (t>0) \tag{1.2.15}$$

实用上，常取 $k=2$，那么有

$$f_T(t)=\lambda_1\lambda_2\ \frac{e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1},(t>0)$$

因为

$$E(T)=\int_0^{\infty} t f_T(t)\mathrm{d}t=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}$$

这时的广义爱尔兰流的强度为

$$\lambda=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(6) 超指数分布(记作 $\mathrm{H_k}$)

设随机变量 T 的分布密度为

$$f(t)=\sum_{i=1}^{k}\theta_i\mu_i e^{-\mu_i t}\quad (t\geqslant 0)\tag{1.2.16}$$

其中，$\theta_i>0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}\theta_i=1$，$\mu_i>0(1\leqslant i\leqslant k)$，则称 T 是服从 k 阶超指数分布的随机变量；其分布函数为

$$F(t)=1-\sum_{i=1}^{k}\theta_i e^{-\mu_i t}\qquad (t\geqslant 0)$$

且

$$E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i}{\mu_i}$$

$$D(T)=2\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i}{\mu_i^2}-\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i}{\mu_i}\right)^2$$

比如某系统中设有 k 个服务窗，每一窗口服务时间均为负指数分布，且第 i 个服务窗平均为顾客服务的时间是 $1/\mu_i$；到达系统的顾客选择第 i 个窗口接受服务的概率为 θ_i，那么，可以证明这 k 个服务窗组成的并列服务系统的服务时间遵从 k 阶超指数分布。

本节最后介绍著名的 Little 公式。设顾客按泊松流到达系统，平均强度为 λ；而服务窗的服务时间为负指数分布，平均服务率为 μ，那么，Little 公式为

$$L_s=\lambda W_s\tag{1.2.17}$$

$$L_q=\lambda W_q\tag{1.2.18}$$

证明　设在时间段 T 内顾客在系统中逗留的时间分别为 $t_1,t_2,\cdots$，顾客到达数的均值为 λT，那么，在系统中逗留顾客的平均数为

$$L_s = \frac{\sum_i t_i}{T}$$

而顾客在系统中平均逗留时间为

$$W_s = \frac{\sum_i t_i}{\lambda T}$$

由此可得

$$L_s = \lambda W_s$$

同理可得

$$L_q = \lambda W_q$$

第2章　马尔可夫链简介

2.1　随机试验与概率空间

设有某试验 S,它满足条件

(1) 在相同条件下可以重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果多于一个且事先不能预言哪个结果会出现;
则称 S 为随机试验,以 ω 记其可能出现的结果,称 ω 为 S 的一个基本事件,全体基本事件所组成的集合 $\Omega=\{\omega\}$ 称为 S 的基本事件空间。

在随机试验中,称可能出现或不可能出现的事情(件)为随机事件,它可以是基本事件,也可能是由若干个基本事件所组成,即 Ω 的一个子集。记全体由随机事件所组成的事件集为 $\mathscr{F}$,如果它满足下列条件

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则必有 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_n A_n\in\mathscr{F}$。

那么,称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上一 σ 域。又称 Ω 为必然事件,$\varnothing=\overline{\Omega}$ 为不可能事件。由事件运算性质可知

$$\varnothing\in\mathscr{F}, \bigcap_n A_n=\overline{\left(\bigcup_n \overline{A}_n\right)}\in\mathscr{F}$$

及

$$\bigcup_{n=1}^{m} A_n\in\mathscr{F}, \bigcap_{n=1}^{m} A_n\in\mathscr{F} \qquad (m\text{ 是有限个正整数})$$

例如,$\mathscr{F}=\{\varnothing,\Omega\}$ 及 $\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\overline{A},\Omega\}$ 均是 σ 域;如设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,其全体子集组成的集类记为

$$\mathscr{F}=\{\varnothing,\{\omega_1\},\cdots,\{\omega_n\},\{\omega_1,\omega_2\},\cdots,\{\omega_{n-1},\omega_n\},\cdots,\Omega\}$$

则 $\mathscr{F}$ 也是 σ 域,它共含有 2^n 个不同的元素。

通常称二元总体$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间。

令 $P(\cdot)$是定义在 $\mathscr{F}$ 上面取实值的集函数,如果它满足条件:

a. 非负有界性,$\forall A\in\mathscr{F}$,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

b. 归一性,$P(\Omega)=1$;

c. 可列可加性,若 $A_n\in\mathscr{F}, n\geqslant 1$,且 $A_nA_m=\varnothing(n\neq m)$(即事件 A_n 与 A_m 互不

相容），有

$$P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$$

那么，称 P 是 $\mathscr{F}$ 上一个概率测度，简称概率。并称三元总体$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间。

容易验证概率 P 有如下几个性质：

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 若 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，那么

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

此式称概率 P 的有限可加性。

(3) $\forall A_1, A_2\in\mathscr{F}$，有

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$

(4) $\forall A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leqslant \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

(5) 如果 $A,B\in\mathscr{F}$，且 $B\subset A$，即事件 B 出现导致 A 出现，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

(6) 一般加法公式，$\forall A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^n A_i)$$

2.2 离散时间马尔可夫链

2.2.1 定义

设 $X=\{X_n(\omega), n=0,1,2,\cdots\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上，而取值在非负整数 $E=N\cup\{0\}$上的随机变量序列，用“$X_n=i$”表示时刻 n 系统 X 处于状态 i 这一事件。称

$$p_{ij}(n)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$$

为在事件“$X_n=i$”出现的条件下，事件“$X_{n+1}=j$”出现的条件概率，又称它为系统 X 的一步转移概率。如果对任意的非负整数 $i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i,j$ 及一切 $n\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1}=j\mid X_n=i, X_k=i_k, k=1,2,\cdots,n-1) \\ &=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=p_{ij}(n) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

则称 X 是一马尔可夫链(Markov Chain)。当 $p_{ij}(n)$与起始时刻 n 无关时，则称 X 为齐次的马尔可夫链，并将式(2.2.1)称为马尔可夫性（无后效性或无记忆性）。若将“$X_n=i$”看作“现在”，将“$X_{n+1}=j$”看作“将来”，“$X_k=i_k, k=1,2,\cdots,n-1$”看作