应用复变函数論

J. W. Dettman 著

蒋增荣　刘德铭　刘森石
梅志强　张道谦　阎岘峰　译

上　册

中国人民解放军国防科学技术大学

一九七八年十二月

译 者 序

本书根据1965年美国纽约MacMillan Company出版的John. W. Dettman所著的“Applied Complex Variables”第一版翻译。作者在序言中说这本书是为工程师和物理学家的需要而写的。它分两部分，第一部分解析函数的基本理论，数学理论讲的还比较严谨，第二部分是应用，所涉及的面还比较广，比较适合工程师与物理学家阅读。这种既注意到数学理论的严密性而应用的面涉及如此之广的应用复变函数论书籍，在国内尚不多见，所以我们在为工科及应用数学的学生准备复变函数课程时，翻译了这本书作为教学参考用书。

1972年孙本旺教授曾对此书写了一个编译稿。这次我们在孙本旺教授编译稿的基础上，重新翻译整理。原书中的一些错误凡被我们发现的，均作了改正。其中第一章和第八章由刘森石同志负责，第二章由闫岘峯同志负责，第三章和第六章由蒋增荣同志负责，第四章由张道谦同志负责，第五章和第七章由梅志强同志负责，第九章和第十章由刘德铭同志负责，各人译完后互相校对。最后前五章由蒋增荣同志、后五章由刘德铭同志统一校阅，以求名词与语言语气的一致。这次分上、下两册出版，上册为基本理论部分，下册为应用部分。由于我们水平有限，错误之处一定不少，希望读者指正！

译 者

一九七八年十二月

序　言

曾经有一个时期，大多数的工程师和物理学家在学过微积分课程以后，只需再学习常微分方程的初等课程，数学工具便已足够了。但是科学和数学都不是伫止不前的。现在，我们常常听到许多建议说，一个好的工程师和物理学家还应当懂得数学中的一些其它课程，如高等微积分，复变函数，常微分方程和偏微分方程，边界值问题，Fourier 变换与 Laplace 变换，积分方程，渐近展开，线性代数，概率论，统计数学，数值分析等等。这些曾在较高深的数学书中讨论过的众多数学分支，现已成为工程师与物理学家应该了解的知识。这本书企图把上述一些课程写成是对复变数的解析函数的研究自然得到的结果，以便易于为广大读者所接受。

大多数学习应用数学的学生希望尽可能快的得到数学的应用。但这是危险的。因为建立在一个薄弱基础上的建筑常常是不稳固的，是有裂缝的，并且在这个基础上也不可能再支撑更大的建筑。另一方面，学生必需从熟练的掌握数学基础知识后能不为一些与问题的实质无关的表面现象所困扰而能达到有效地应用数学理论解决问题的目的中得到启发。基于这种想法，这本书写成了两部分。第一部分的解析函数理论是随后的第二部分，即解析函数理论的应用的基础。第二部分介绍了五方面比较重要的应用，它们彼此之间基本上是互相独立的。换句话说，如果已经掌握了这本书的前半部分，那么他可选择后面五种应用中任何一种进行学习。这样就可以使得本书能在一个学

期內在学完基本理论后，根据时间的许可再学习后半本所讲的一些內容。假如是两学期，那么他便可以扎实地学习全部內容。

虽然我们坚持循序漸进，但我假设学生沒有学习过高等微积分。因此如果一个学生在学过近代分析以后来学习这本书可能是有益的。这样就使本书有可能在工程专业的三年级或高年级作为高等工程数学的课程或作为数学专业的复变函数课程的用书。

复变函数论讨论的主要问题可以一直追溯到十九世纪的Cauchy与Riemann时代。这样一来我们便不可能在这本书里引用原著。但在书末附一个参考文献的目录，相信它对读者是有邦助的。

作者感谢那些邦助完成这本书的人，特别是对New Mexico大学的Bernard Epstein教授，他阅读了手稿的绝大部分并提出许多有益的建议。作者还感谢New York大学的National Science Foundation的同事们对我在写本书时的支持。

John. W. Dettman
Oakland University
Rochester, Michigan

目　录

第一部分　解析函数论

第一部分　解析函数论

第一章　复数平面

1.1 引　言

大概一个学生首次发现对于实数以外的任何一种数有需要，是他在代数课程中学习二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的时候。已用十分初等的方法证明了这个方程的根必呈形如

$$-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$$

的通常的二次公式。因而可知，如果判别式$b^2-4ac\geqslant0$，那么二次方程的根是实数，否则，它们是复数。这对于仅知道实数以及被告知这个方程中的 a，b，c 和 x 是实数的学生来说是非常奇怪的，他必需面临这个奇怪的新东西——复数。实际上，如果用如下方法叙述问题，困难是可以避免的，即关于那些实数值 x 能使多项式 $P(x)=ax^2+bx+c$取值为零呢？（其中 a，b，c 均为实数，且 $a\neq0$）。由于多项式 $P(x)$可以写作

$$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right],$$

显然，$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ 和 $4a^2$ 都是非负的，所以，如果$b^2-4ac<0$，

$P(x)$ 决不为零，在这种情况下的回答是不存在实数值 x 使 $P(x)=0$. 这时，复数的概念不需要加入讨论。而且，如果学生有一些"函数图形"的概念，则明显的几何形象使得情形十分清楚。不失一般性，我们假设 $a>0$. 显然，当 $x=-b/2a$ 时，$P(x)$ 取得一个极小值 $(4ac-b^2)/4a$. 如果 $b^2-4ac>0$，$P(x)$有两个零点，如果 $b^2-4ac=0$，$P(x)$ 有一个零点，如果 $b^2-4ac<0$，$P(x)$没有零点。见图 1.1.1.

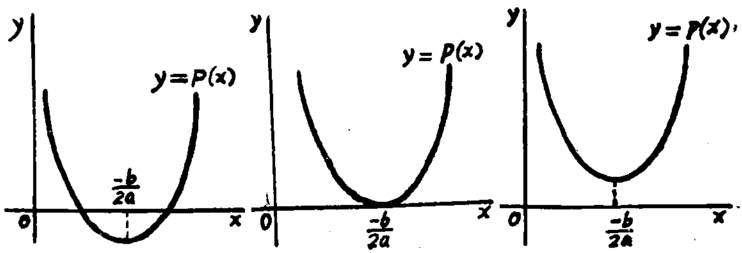

图 1.1.1.

实际上，二次方程复根的讨论全然不需要提出来，除非我们试图回答更为困难的问题：关于那些复数值 z 使多项式 $P(z)=az^2+bz+c$ 取零值呢？这里 a，b，c 可以是复数值。这就使我们进入了我们课程的核心并引出许多重要的问题：什么是复数？什么是一个复变数的函数？一个复变数函数的重要性质是什么？多项式函数有零点吗(代数学基本定理)？等等。在试图回答这些以及以后肯定会提出的其它问题中，我们将揭开一个很丰富的数学分支，这个分支具有非常重要的意义并且在其它科学领域中有许多重要的应用。

复数的第一个概念被发现与解二次方程有关。例如，考虑方程 $z^2+1=0$. 显然，这个方程无实根，因为对任何实数 x，$x^2\geqslant 0$，从而 $x^2+1>0$. 我们记 $z=\pm\sqrt{-1}$，但是不存在这样的实数，它的平方是 -1。如果上述方程有一个解，这个解必

在比实数集更大的某个数系里。这是十七世纪的数学家们所面临的问题，亦即将实数扩充到更大的数系中去，使得在这个数系里，方程 $z^2+1=0$ 有解。在下一节内，我们开始对复数作系统讨论，这些都是实数延伸的结果。

1.2 复 数

考虑全体有序实数对 (x,y) 的集合。这个集合的一个特殊的元素 (x_1,y_1) 我们记作 z_1。若 $z_1=(x_1,y_1)$，$z_2=(x_2,y_2)$，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，我们才称 $z_1=z_2$. 立即可证：

1. 对于一切 z_1，$z_1=z_1$，
2. 若 $z_1=z_2$，则 $z_2=z_1$，
3. 若 $z_1=z_2$，$z_2=z_3$，则 $z_1=z_3$.

当一个关系满足这三个性质时，我们称这个关系为相等关系。

其次，我们定义加法。当且仅当 $x_1+x_2=x_3$，$y_1+y_2=y_3$ 时，才有 $z_1+z_2=z_3$. 不难证明如下性质：

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$（交换性），
2. $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$（结合性），
3. 存在一个零，0，使得对每一个 z，有 $z+0=z$，
4. 对于每一个 z，存在一个负数 $-z$，使得 $z+(-z)=0$.

在性质 3 的证明中，我们必须找出集合的某个元素 $0=(x_0,y_0)$，使得 $z+0=z$ 或者 $x+x_0=x$，$y+y_0=y$. 一个显然的解是 $x_0=0$，$y_0=0$. 这个数系的零是唯一的，因为如果 $z+0=z$，$z+0'=z$，则

$$0'=0'+0=0+0'=0.$$

对于每一个 z 有一个负数存在是容易确定的。事实上，$-z=(-x,-y)$，因为

$$z+(-z)=(x,y)+(-x,-y)=(x-x,\ y-y)=(0,0)=0.$$

我们利用负数的加法定义减法，即是

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2),$$

$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1,y_1)+(-x_2,-y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2).$$

再定义乘法。当且仅当$x_3=x_1x_2-y_1y_2, y_3=x_1y_2+x_2y_1$时，才有 $z_1z_2=z_3$. 再则，容易证明如下性质：

1. $z_1z_2=z_2z_1$（交换性），
2. $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$（结合性），
3. 存在一个单位元素 I，使得对于每一个 z，有$Iz=z$,
4. 对于每一个不为零的 z，存在一个逆元z^{-1}，使得

$$zz^{-1}=I.$$

如果单位元素 $I=(a,b)$存在，则 $Iz=(ax-by, ay+bx)=(x,y)$. 所以 $x=ax-by$，$y=ay+bx$. 它的一个解是 $a=1$, $b=0$. 由于单位元素是唯一的，所以这是仅有的解。事实上，如果 $I'z=z$，$Iz=z$，则

$$I'=II'=I'I=I.$$

若设 $z^{-1}=(\xi,\eta)$，对于 z^{-1} 必有

$$z^{-1}z=(\xi,\eta)(x,y)=(\xi x-\eta y,\ \xi y+\eta x)=(1,0),$$

$$\xi x-\eta y=1,$$

$$\xi y+\eta x=0.$$

这方程有解 $\xi=x/(x^2+y^2)$，$\eta=-y/(x^2+y^2)$. 显然，我们必需排除零解，因为当且仅当 $x=0,y=0$ 时，$x^2+y^2=0$，这是上述方程沒有唯一解的仅有情况。利用逆元的乘法我们定义除法，即

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}=(x_1,y_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2},\ -\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

这样就定义了被任一非零元素除的除法。

定义 1.2.1. 复数系统C是全体有序实数对連同如上定义

的相等、加法运算和乘法运算一道构成的集合。

我们立即看出C的代数结构和实数的情形极为相似。例如，加法和乘法的性质 1-4 对于实数系统也成立。实数系统和C两者都是代数域*的例子。容易建立分配律

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3,$$

将它加入上面所列性质。为了证明我们并不是仅仅重复实数的情形，我们至少必需表示出C的一个元素，它不是实数。考虑数 $i=(0,1)$，于是$i^2=(-1,0)=-1$。因此，方程$z^2=-1$在C中至少有一个解 i，我们已经证明这个方程在实数系统是无解的。实际上，$z^2=-1$ 有两个解 $\pm i$.

实数系处于C的真子集的地位。在C中考虑由形如$(x,0)$的全体有序数对组成的子集R，其中 x 是实数。在实数与R的元素间有一一对应的关系，它保持了加法和乘法的运算：

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$$
$$(x_1,0)(x_2,0)=(x_1x_2,0).$$

我们说R和实数系是同构的。换言之，R中的元素恰与实数一样多并且两个系统保持代数相似。以后我们索性把R看作实数系统。

C和R之间有一个非常重要的区别。R是一个有序域，而C则不是。例如，我们知道，对于每一对实数 a 和 b，或者 $a<b$，$a=b$，或者 $a>b$*. 而且，如果$x_1\neq0$，则或者$x_1>0$，或者$-x_1>0$. 现在考虑C中的 i . 如果C像R那样是有序的，那么 i 或者 $-i$ 是正的。但是 $i^2=(-i)^2=-1$，这就表示 -1 是正的。然而 -1 和 1 两者不能都是正的。因此当z_1和z_2是复

---

* 域是一个集合，这个集合是由元素连同满足上述性质的两种运算："加法"和"乘法"并加上分配律一道构成的。例如，全体有理数形成一个域。

* 我们假设读者对于实数的性质是熟悉的。不然的话，可查阅微积分学如 T.M.Apostol 著的微积分学 I，纽约，Blaisdell 出版公司，1961，PP.12-37.

数时，$z_1<z_2$是没有意义的，除非z_1和z_2均在R中。

根据定义，在有序数对中，我们区分这两个数，其中第一个数称作实部，第二个数称作虚部，亦即，若$z=(x, y)$，则$x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$. 必须注意$\mathrm{Im}(y)$是一个实数。

在C中也有一个被实数相乘的概念。设a为实数，则

$$az=(a,0)(x,y)=(ax,ay).$$

我们看出，乘一个实数，结果是实部与虚部都乘以这个实数。易于证明：

1. $(a+b)z=az+bz$,
2. $a(z_1+z_2)=az_1+az_2$,
3. $a(bz)=(ab)z$,
4. $1z=z$.

这些性质加上加法的性质 1-4，就表明C是实数域上的一个线性向量空间。

设a和b是实数，则

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a1+bi=a+bi.$$

因此，以后我们将简写$z=x+iy$，这是很熟悉的复数符号。

复数z的模$|z|$定义为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然，模是一个非负的实数，并且当且仅当$z=0$时，$|z|=0$.

改变复数$z=x+iy$的虚部的符号就得到z的共轭复数$\bar{z}$，即

$$\bar{z}=x-iy.$$

复数z，共轭复数$\bar{z}$与模之间有如下明显的关系：

$$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$$

习 题 1.2

1. 计算 (a) $(3+5i)+(2-i)$; (b) $(1+i)(7-3i)$;

(c) $(3+i)/(4+2i)$.

答：(a) $5+4i$；(b) $10+4i$；(c) $\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i$.

2. 证明复数加法的结合律和交换律。

3. 证明复数乘法的结合律和交换律。

4. 证明对于一个给定的复数有一个唯一的负复数。

5. (a) 设 $z_2 \neq 0$，证明 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

(b) 利用(a)，计算 $\frac{2+3i}{1-i}$.

答：$\frac{-1+5i}{2}$.

6. 证明分配律。

7. 证明加法消去律，即如果 $z_1+z_2=z_1+z_3$，则 $z_2=z_3$.

8. 证明乘法消去律，即如果 $z_1z_2=z_1z_3$，并且 $z_1\neq 0$，则 $z_2=z_3$.

9. 证明：(a) $|\bar{z}|=|z|$；(b) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$；

(c) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；　(d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$，$z_2\neq 0$.

10. 证明当且仅当 $\mathrm{Im}(z)=0$ 时，$\bar{z}=z$.

11. 证明：(a) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$；(b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，$z_2\neq 0$.

12. 证明 $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

1.3 复 平 面

在1.2节我们提到C是实数域上的线性向量空间。这提供了复数的几何解释的可能。事实上，我们用有序实数对表征复数恰和平面解析几何中用有序实数对表征一个点一样。我们立即可以看出，在复数和二維笛卡尔坐标系中的点间能够建立一一对应的关系（见图1.3.1）。我们称x轴为实轴，y轴为虚

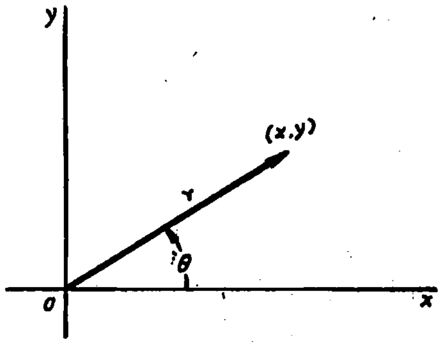

图 1.3.1.

轴，并且把复数$z=x+iy$和从原点到坐标为(x,y)的点所画的向量等同起来。模$|z|$等于$r=\sqrt{x^2+y^2}$，这里r和θ是点(x,y)的通常的极坐标，即$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$. 以弧度计量的从正实轴量起的角θ称为z的幅角。事实上，由于余弦函数和正弦函数的周期性，$\theta\pm2n\pi$（这里n是正整数）可作为同一复数的幅角。立即可知，若$z\neq0+0i$，则

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$r=|z|,\quad \theta=\arg z=\tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

这就是复数的极形式。零的幅角是不定的。

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 是两个复数，则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

考虑它的几何解释，见图 1.3.2. 可以看出，z_1+z_2 是对应于 z_1 和 z_2 的向量的向量和。

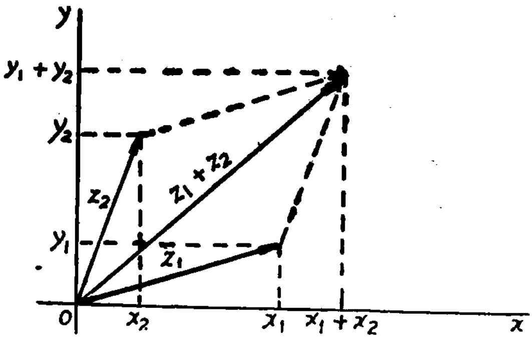

图 1.3.2.

复数 z 的负、差和共轭也都有明显的几何解释（见图 1.3.3）。$-z$ 对应的向量和 z 对应的向量大小相等方向相反。共轭 $\bar{z}$ 对应的向量和 z 对应的向量大小相等，但对称于实轴。于是，显然有

$$|z|=|-z|=|\bar{z}|,\ \arg z=-\arg\bar{z},\ \arg(-z)=\pi+\arg z$$

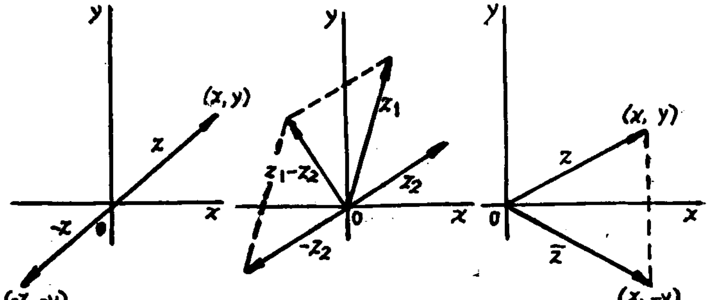

图 1.3.3.

让我们定义*

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

显然，

$$e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta=\overline{e^{i\theta}}$$

$$|e^{i\theta}|=|e^{-i\theta}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}&=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2\\&\qquad+\sin\theta_1\cos\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\\&=e^{i(\theta_1+\theta_2)}\end{aligned}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\cdot e^{-i\theta_2}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

由此设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则*

$$z_1z_2=(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

或

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1|\,|z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2.$$

最后，推导一些重要不等式结束这一节。显然，

(*) 这个定义和第二章的指数函数 e^z 的定义完全一致。

(*) 在 z_1/z_2 中假定 $r_2\neq0$。

$$\mathrm{Re}(z)\leqslant|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}=|z|,$$
$$\mathrm{Im}(z)\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}=|z|.$$

现在，考虑$|z_1+z_2|$，有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\\&\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\\&\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

取两端的正方根，得到三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

应用数学归纳法，上式可推广到任意有限多项，即

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

最后有

$$|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|,$$
$$|z_2|=|z_2-z_1+z_1|\leqslant|z_1-z_2|+|z_1|$$

或

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

习 题 1.3

1. 若 $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$，求$|z|$，$\arg z$，$\arg(-z)$，$\arg\bar{z}$。

答：$|z|=1$，$\arg z=\dfrac{5}{3}\pi\pm2n\pi$，$\arg(-z)$

$=\dfrac{2}{3}\pi\pm2n\pi$，$\arg\bar{z}=\dfrac{\pi}{3}\pm2n\pi$.