应用数学模型

李　云

华中理工大学出版社

应用数学模型

李 云

华中理工大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科和其他非数学专业高年级学生和研究生编写的选修课教材，共分六章，前两章简要地介绍数学构模的一般概念和方法；后四章分别讨论了交通流模型、最优控制模型、优化模型和决策对策模型，每一章都选配有一定数量的习题，便于读者练习和参考.

本书密切结合工科和其他非数学专业的需要，取材适当；内容安排由浅入深，循序渐近；文字叙述条理清楚，通俗易懂，便于教学. 本书也可供工程技术人员和其他科技人员阅读参考，同时对理科高年级大学生也是一本合适的参考书.

应用数学模型

李 云

责任编辑 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：9 字数：224 000

1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷

印数：1-1 500

ISBN 7-5609-0766-0/O・104

定价：2.35元

（鄂）新登字第10号

前　言

随着工农业生产的迅猛发展，高新科技的大量涌现以及计算机的不断进步和普及，数学的应用范围日益扩大，几乎渗透到自然科学、工程技术科学、社会科学和人文科学等各个领域，它对于发展生产力、提高综合国力和促进科学技术进步的重要性，日益为人们所共识. 利用数学的丰富成果去解决各类实际问题是时代的要求、是科技发展的必然，要做到这点，必须建立起各类实际问题的数学模型，这是关键的一步.

建立应用数学模型就是对给出的实际问题，经过数学抽象化的处理，使之抓住问题的本质和特征，从而构造出对象相应的数学模型，然后应用数学的理论和方法进行逻辑推理和论证，作出定性和定量的分析，再根据实践对模型作出评价和修正. 通过这一完整的过程，培养学生深刻的洞察力和丰富的想象力，显然，这种模型化的思维方法对工科和其他非数学专业的教学是十分重要的，因为只有这样才能使得新一代的各类技术人员能够迅速适应高科技发展的形势和学科数学化的特点. 本书就是为适应这一形势，使工科和其他非数学专业学生尽早接触应用数学模型的概念和方法所作的一次尝试的产物.

本书特别注意选择与工科和其他非数学专业有关的模型作为素材，着重于构模能力的培养和基本技能的训练. 第一章扼要地介绍了应用数学模型的基本概念以及构模的一般方法；第二章选择几个有代表性的模型，进行综合分析，借以培养学生的构模能力；第三章至第六章分别系统地阐述了几个重点应用数学模型，它们对于学生今后从事科学技术工作具有重要意义，这部分内容是属于基本方法的训练，同时在内容的安排上也体现了方法的灵活运用. 全书需讲授 50 课时左右，只要具有高等数学、线性代数和微分方程基本知识的读者，可以读懂全书的绝大部分内容. 由于本书各

章自成单元，教学时可根据不同对象和教学时数，灵活地选择讲授内容，而不会影响学生的承受能力. 每章后都附有习题，以帮助读者进一步理解内容.

本书是在武汉水运工程学院《应用数学模型》讲义的基础上，经过多次教学实践编写成的，这一工作始终得到院科研处教务处的热情鼓励和大力支持. 武汉大学周焕文教授认真、仔细地审阅了书稿的全文，对本书材料的选择、内容的取舍、整体框架以及写作方式提出了许多具体而中肯的修改意见；武汉工业大学何猛省教授多次与作者讨论编写《应用数学模型》应注意的有关问题，使作者深受启发和教益；武汉水运工程学院朱樵教授、邓旅臣副教授、黄承绪副教授以及陈先彬、金升平和肖新平等三位老师对本书的写作也给予了有力的支持和帮助；本书还从国内外许多学者的著作中选用了一些材料，编者在此向他们表示衷心的感谢.

由于《应用数学模型》目前还是一门新课，又由于作者学识浅薄和教学经验不足，书中肯定有不少缺点和问题，恳请广大教师和读者批评、指正.

编　者

1992 年 8 月 18 日

目　录

第1章　应用数学模型概述

数学，这门学科，现已发展成为分支众多的复杂系统. 近几十年来，随着科学技术的迅速发展，特别是计算机科学的不断进步和普及，数学不仅在自然科学、工程技术科学，而且在社会科学和人文科学等领域均得到了广泛的应用，数学是认识自然和改造自然的有力工具. 现代应用数学之所以具有解决实际问题的功能，主要是通过提供数学模型以及处理模型的数学方法而显示出来的. 本章首先阐明数学模型的意义及其与工程技术的关系，其次，通过分析两个典型实例，从而概括出建立应用数学模型的一般过程及其分类，最后简要地介绍量纲分析法的基本内容.

§1.1　应用数学模型的意义及其与工程技术的关系

数学模型的含义很广，提法也不一，一般来说，按照广义的解释，凡是一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式（代数方程、函数方程、微分方程、差分方程、积分方程等）以及由公式系列构成的算法系统等都被称为**数学模型**，这是因为数学来源于实践；按照狭义的解释，凡是将具体现象（事物）的特征和性质给以数学表达的**数学结构**，如各种等式、不等式、图表或框图等，也叫做**数学模型**. 在应用数学中，数学模型一词作狭义的理解，因而它被称为应用数学模型. 例如在力学中描述力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律 $F=ma$；在电学中描述电压、电流和电阻之间关系的欧姆定律 $V=RI$；在经济学中描述单价、销售金额和销售量之间的关系 $C=pq$ 等，它们都具有相同的数学模型

$$y=kx.$$

数学模型来源于现实(反映现实),又高于现实,但是能用数学表示的事物是有限的,所以,在许多情况下,与现象完全吻合的数学表述是不可能的.因而,在数学化之前,须对现象做出一些必要的简化和假设.正是由于这种原因,可以说应用数学模型是用数学关系式描述的一种假定情况.

对具体事物(现象)建立数学模型的这种模型化的思维方法,可以追溯到古代的Galileo,他认为支配宇宙的原理是数理,不久,Newton 在实践的基础上,建立了运动三大定律和万有引力定律,并且和 Leibniz 同时独立地发明了微积分,后来,许多物理学家、数学家和天文学家把这个力学法则和微积分方法结合起来,通过计算,能够确定出海上的潮汐涨落,摆的周期,直到天体中行星的运行.例如,太阳系最远的行星之一的海王星是在 1846 年在数学计算的基础上被发现的.天文学家 Adams 和 Le Verrier 分析了天王星运动的不规律性,得出结论说,这种不规律性是由其他行星的引力而发生的,Le Verrier 根据力学定律和引力法则,利用微积分方法,计算出这颗行星应该在何处,他把这个结论告诉了观察员,而观察员从望远镜中在 Le Verrier 所给出的位置上看到了这颗行星——海王星.这个发现,不仅是力学和天文学特别是 Copernicus 体系的胜利,而且也是数学模型和数学计算的胜利.

19 世纪 60 年代, Maxwell 在前人实践的基础上,以 Coulomb 定律,Ampere—Biot—Savart 定律和 Faraday 电磁感应定律为前提,分析了存在的矛盾,并根据电荷守恒定律,大胆地引入位移电流的概念,从而导出 Maxwell 偏微分方程组,即描述电磁场运动的数学模型.他用纯粹数学的方法,从这些方程组推导的结果中,预见到可能存在着电磁波,并且指出这种波以光速传播着.Maxwell 的结论推动人们去寻找电磁波,1888 年这种波果然被 Hertz 所发现,同时他还测得电磁波的波长并计算得出波速等于光速.不久,1894 年俄国科学家 Попов 和意大利科学家 Marconi 就找到电磁振

荡的激发、发送和接收的办法，并把这些办法带到许多应用部门，从而为全部无线电技术奠定了基础. 在已成为公共财富的无线电的发现中，从 Maxwell 偏微分方程组中推导的结果起了巨大的作用.

20 世纪特别是近几十年来，随着科学技术尤其是计算机科学的不断进步，数学的应用不仅在它的传统领域（力学、电学等学科以及机电、土木、化工等工程技术中）取得了许多重要的发现，而且迅速地进入了一些新的领域（经济、交通、生态、医学、人口、社会等）. 现在，数学在提高技术、发展生产，搞好经济管理，以及发展各门自然科学甚至某些社会科学中的重要性，已经日益被人们所认识，在现代工程技术领域内，应用数学模型的作用，尤为明显.

第一　在进行工程设计时，选择材料或确定尺寸大小，只靠定性的判断并不够，还要建立对象的数量关系，才能定量地预测其状态和性质. 如果不采用这种方法，在水利综合利用大型水电站的设计方面，就不能决定坝址的选择和结构规模，以及电站的装机容量和安全性能等；在机械加工方面，就不能决定产品的性能，尺寸和切削加工方法. 因此，近代技术如果离开数学计算，也许任何一点技术的革新和进步都是不可能的.

第二　近代科学技术考察系统的性能要求越来越高，且规模越来越庞大而复杂，如人体动态生理、生态系统、天体运动、航天技术、全球气象预报等，根本无法仅仅依靠实验方法进行研究，因为单纯实验已难以使它们的状况重现出来. 例如，美国阿波罗卫星返回地球时，在高 120 公里左右的大气层上端达到每秒 11 公里的速度，仅用大约 30 分钟就回到地面. 即使想用风洞的实验重现这样的状态，由于必须要有极大规模的设备而终究不能实现. 诸如对这类问题的研究只有借助于应用数学模型、计算方法和电子计算机才能进行.

第三　某些种类仪表、设备和装置，只有使用应用数学模型

方能明了其运行状况．最近生产的电子仪器或机器部件性能稳定而且可靠性都非常高．即便如此，而人造卫星是由 500 万个以上零部件构成的，还是有出现故障的可能．由于故障的出现是极少有的现象，因而难以依照多次实验的统计结果来确定复杂系统的可靠性，因此，解决这种问题的有效途径就是建立起复杂系统故障与可靠性的应用数学模型，然后进行数学计算与分析，并作出科学预测．

第四　电子计算机的性能日益提高，新产品不断开发出来，而且应用范围从国际尖端部门扩大到科学技术和国民经济建设的各个领域，给人类社会带来一场深刻的技术革命．如果说普通的机器扩大了人的体力，那么计算机则提高了人的智商．在实际问题中应用计算机进行模拟与计算，其步骤可以概括为：实际问题——建立适当的应用数学模型——采用确定的数学方法（通过计算机）来解决问题．因此，数学模型是应用电子计算机研究和解决实际问题不可缺少的桥梁．特别值得指出，现在的工程技术已经非常发达，在不少情况下，出现了所谓的非线性效应问题，因此，单纯模仿是不够的，因为单纯把尺寸加 1 倍，性能则不一定变为 2 倍，遇到这种困难，必须面对现实，以自然科学研究工作者的态度去探讨．

应用数学模型与现实密切相关，它是在对实际问题的性质深入了解的基础上，经过高度的归纳、概括、抽象化而建立起来的．然而，一旦有了描述现象的数学模型，就能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制．

§1.2　两个例子

一、人的体重

健康的身体是人们从事各种活动的物质基础，而体重是衡量

一个人身体状况好坏的标志之一.讨论体重随时间变化的规律是一个极其复杂的问题,下面只根据简单的假设,建立体重随时间变化的数学模型,并对此作一粗略的分析.

假设

(Ⅰ)设某人每天从食物中摄取的热量是 a 焦耳,其中 b 焦耳用于新陈代谢(即自动消耗),而从事工作、生活每天每千克体重必须消耗 α 焦耳,从事体育锻炼消耗 β 焦耳.

(Ⅱ)某人以脂肪的形式贮藏的热量是百分之百地有效,而1千克脂肪含热量是42 000焦耳.

(Ⅲ)设体重(记为 w)是时间(记为 t)的连续可微函数 $w=w(t)$.

数学推导

每天:体重的变化=输入-输出

输入是指扣除了新陈代谢之外的净吸收量,输出就是进行工作、生活以及体育锻炼的总消耗,于是

每天净吸收量 $=\dfrac{a-b}{42\ 000}$,

每天净输出量 $=\dfrac{\alpha+\beta}{42\ 000}w$,

所以,描述体重 w 与时间 t 变化关系的数学模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\dfrac{(a-b)-(\alpha+\beta)w}{42\ 000};\\ w|_{t=0}=w_0.\end{cases}\tag{1}$$

应用分离变量法,解微分方程式(1),得

$$\frac{\mathrm{d}w}{(a-b)-(\alpha+\beta)w}=\frac{\mathrm{d}t}{42\ 000},$$

$$-\frac{1}{\alpha+\beta}\ln|(a-b)-(\alpha+\beta)w|=\frac{t}{42\ 000}+c,$$

利用所给初始条件,算出常数

$$c=-\frac{1}{\alpha+\beta}\ln|a-b-(\alpha+\beta)w_0|,$$

从而得

$$|a-b-(\alpha+\beta)w|=|a-b-(\alpha+\beta)w_0|\exp(-(\alpha+\beta)t/42\ 000), \tag{2}$$

因为指数因式是正的，因此$(a-b-(\alpha+\beta)w)$与$(a-b-(\alpha+\beta)w_0)$同号，故可以把式(2)的绝对值去掉，于是

$$a-b-(\alpha+\beta)w=(a-b-(\alpha+\beta)w_0)\exp(-(\alpha+\beta)t/42\ 000),$$

$$w=\frac{a-b}{\alpha+\beta}-\frac{a-b-(\alpha+\beta)w_0}{\alpha+\beta}\exp(-(\alpha+\beta)t/42\ 000), \tag{3}$$

对式(3)求导，得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{(a-b)-(\alpha+\beta)w_0}{42\ 000}\exp\left[-\frac{(\alpha+\beta)t}{42\ 000}\right], \tag{4}$$

根据式(1)、(3)和(4)可以进行一些粗浅的分析：

1. 如果$(a-b)>(\alpha+\beta)w_0$，即净吸收量大于总消耗量，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}>0$，那么体重增加.

2. 如果$a-b<(\alpha+\beta)w_0$，净吸收量小于总消耗量，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}<0$，那么体重减少.

3. 如果$a-b=(\alpha+\beta)w_0$，即净吸收量等于总消耗量，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=0$，那么$w_0=\frac{a-b}{\alpha+\beta}$维持不变.

从模型(1)所得的结论，与人们的经验是相符的，但我们建立数学模型的目的不仅在于解释，说明对象已有的性质，或状态，更重要的是科学地预见未来.

二、新技术的推广

在工农业生产中，不断采用和推广新的技术，是增加生产、提高经济效益的重要途径，因而这是一个经济学家、社会学家和企业家很关心的问题. 本节，我们要构造一个描述农村推广新技术的模型，然后根据统计数据，对模型进行修改补充，使之精确化，最后，把这模型推广到其它行业.

模型 I　假设：

（Ⅰ）设在 $t=0$ 时，一项新技术介绍到一个拥有 N 个农户的地区. N 是一个很大的常数.

（Ⅱ）设 $p(t)$ 是 t 的连续可微函数，表示 t 时刻采纳新技术的农户数，且 $p(0)=1$.

（Ⅲ）传递信息的方式是口头讲授，即某一农户由于采纳了新技术而受益，当他把获利的信息告诉另一农户后，而这一农户才开始采纳新技术.

（Ⅳ）在 Δt 内，采纳新技术的农户数 Δp 与在此之前已经采纳新技术的农户数 p 和还不知道新技术的农户数 $N-p$ 的乘积成正比，且同时与 Δt 成正比.

数学推导

根据假设（Ⅱ）（Ⅲ）（Ⅳ），得

$\Delta p=Ap(N-p)\Delta t$，A 为正常数.

当 $\Delta t\to 0$ 时，可得初值问题（Cauchy 问题）

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=Ap(N-p);\\ p(0)=1.\end{cases} \tag{5}$$

应用常数变易法，解得

$$p(t)=\frac{Ne^{ANt}}{N-1+e^{ANt}}. \tag{6}$$

再通过式(5)，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}=A^2(N-2p)p(N-p). \tag{7}$$

通过以上的计算，我们能够从式(5)、(6)和(7)获得什么信息呢？

1. 对于 t 为任意值时，$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}>0$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=N$.

2. 当 $p(t)<\dfrac{N}{2}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}>0$，那么 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ 是递增的；当 $p(t)>\dfrac{N}{2}$ 时，

$\frac{d^2p}{dt^2}<0$，那么$\frac{dp}{dt}$是递减的．

3．当 $p=\frac{N}{2}$时，$\frac{d^2p}{dt^2}=0$，那么 $\max\left(\frac{dp}{dt}\right)=\frac{AN^2}{4}$，且 $t^*=\frac{\ln(N-1)}{AN}$．因此 $p(t)$的图形如图 1.1 所示．

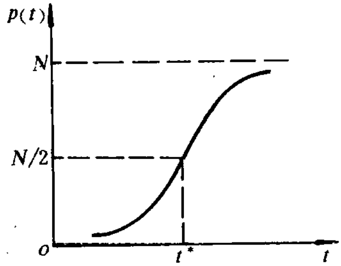

图 1.1　$p(t)$曲线

我们用两个实例来检验这个模型：

1．1944—1955 年间在美国 Iowa 州农场主采用除草喷雾器的情形，如图 1.2 所示．

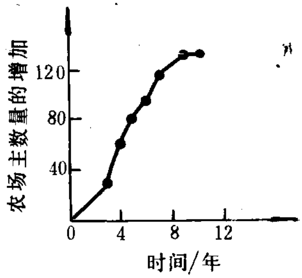

图 1.2　在 Iowa 州采用除草喷雾器的农场主的累加数

2．1934—1958 年间美国 Iowa、Kenlucky、Alabama 三州农场主种植杂交玉米新品种的耕地亩数占种植玉米耕地的情形，如图 1.3 所示．

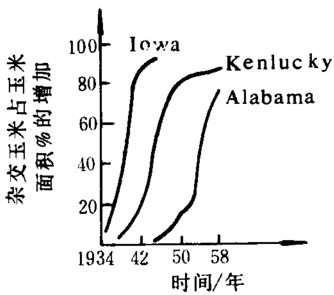

图 1.3　美国三个州的杂交玉米种植面积与整个玉米种植面积的累加百分数

由此可以看出，模型的预测即 $p(t)$的曲线（图 1.1）与本世纪 50 年代两项革新技术的实际曲线图 1.2 和图 1.3 比较起来，形状相似，具有相同的特点，说明模型与实际情况基本相符，但仔细对图形进行分析，发现有两个不一致的地方．

第一，采用新技术过程停止加速的地方并非总是在

有半数的农户采用了新技术之时．例如 Alabama 州农户采用杂交玉米新品种的过程，就是在 60%的农户采用了这个新品种以后才停止加速的．

第二，模型在过程的后阶段与实际曲线比前阶段符合得更好些．因此，我们必须把模型进行修改、补充，以期更能反映实际状况．

模型Ⅱ

在模型Ⅰ的基础上，我们需要研究尚未考虑的因素作出补充假设．显然，农户获得新技术的信息不仅来自其他农户的口头传授，而且还可以通过其他渠道掌握新技术的信息和知识，有研究工作表明，电视、广播、报纸、杂志等大众宣传工具在新技术推广的早期阶段起着重要的作用，所以，在模型Ⅱ中，要把这一点考虑进去．因此，在 Δp 中，应增加一项，即通过大众信息交流了解新技术，从而采用的农户数应当与尚未采用新技术的农户数成正比，所以由式(5)，得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=Ap(N-p)+A'(N-p),\\ p(0)=0,\end{cases}\tag{8}$$

式中 A' 是不同于 A 的正常数．式(8)的解为

$$p(t)=\frac{NA'\left[e^{(A'+AN)t}-1\right]}{AN+A'e^{(A'+AN)t}},\tag{9}$$

由式(8)，求得

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}=(Ap+A')(AN-2Ap-A')(N-p).\tag{10}$$

从式(8)、(9)和(10)，可以得出 $p(t)$ 的特点：

1. 对于任意 t，$p(t)>0$，且 $\lim p(t)=N$.

2. 当 $p<\frac{1}{2}\left(N-\frac{A'}{A}\right)$ 时，则 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ 递增；当 $p>\frac{1}{2}\left(N-\frac{A'}{A}\right)$ 时，则 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ 递减.

3. 当 $p=\frac{1}{2}\left(N-\frac{A'}{A}\right)$ 时，则 $\max\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1}{4}A(AN+A')^2$，$t^*=$

$\ln\left(\frac{AN}{A'}\right)\Big/(A'+AN)$. 因此，关于模型Ⅱ的 $p(t)$ 曲线如图1.4所示.

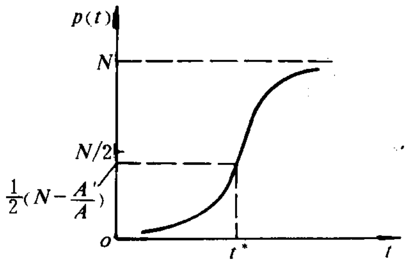

图 1.4 模型Ⅱ的 $p(t)$ 曲线

通过适当选择 A、A'，模型Ⅱ的 $p(t)$ 曲线与两个实例符合得很好，但还是没有解决前面分析的第一个问题. 因为建立模型Ⅰ—Ⅱ时，只考虑农户从获得新技术信息到组织实施，其间没有时间延迟. 如果在新的模型中注意到时滞因素，可以预计上述问题会得到圆满解决. 由于含有时滞的模型在数学处理上很困难，故不再作深入讨论.

模型Ⅲ

从农业新技术推广得到的数学模型，同样也适用于许多工业部门. 一个工业企业采纳某项新技术的快慢程度取决于该技术的效益和所需要的投资，因此，在模型Ⅰ中，比例常数 A 必须修改，它依赖于该技术效益的高低、投资的大小和已采用这项技术之企业数量的多少等因素.

设 N 是某一工业系统企业的总数，$p(t)$ 是时刻 t 已采用该项新技术的企业数，在 Δt 时间间隔内，新增加的采用新技术的企业数是

$$\Delta p = A(N-p)\Delta t,$$

式中系数 $A=A(q,s,p/N)$.

q 表示装备新技术相对于企业的其它投资带来的额外利润，

s 表示装备新技术所需的投资在整个企业总资产中所占的比重，

p/N 表示采用新技术的企业在整个系统中占的百分比.

将 A 作 Taylor 展开，只取到二次项，得