21世纪高等院校教材

# 微积分

## （经管类）

西北工业大学微积分教材编写组　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

# 微 积 分

（经管类）

西北工业大学微积分教材编写组 编

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的最新“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，并结合作者长期在教学一线积累的丰富教学经验编写而成. 全书共 9 章，内容包括函数、极限、连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，多元函数微积分学，无穷级数，微分方程与差分方程.

本书具有结构严谨、内容精炼、推理简明、联系实际等特点，可作为高等院校经济管理类专业本科生教材，也可作为相关专业教师、学生和经济工作者的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分. 经管类/西北工业大学微积分教材编写组编. —北京：科学出版社，2009

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-025412-2

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 西…　Ⅲ. 微积分-高等学校-教材　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 151776 号

责任编辑：王　静　房　阳 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 9 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2009 年 9 月第一次印刷　印张：21 1/4
印数：1—3 000　字数：417 000

**定价：34.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

微积分是高等学校经济管理类专业本科生重要的数学基础课程. 随着现代科学技术和数学科学的发展，现代数学的内容更丰富，方法更综合，应用更广泛. 数学教育在培养高素质经济管理人才中的作用越来越重要.

本书参照教育部"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"，集编者多年的教学经验编写而成，反映了新形势下本科数学基础课程教学理念和教学内容的改革趋势. 其内容与教育部颁布的研究生入学考试数学三的考试大纲中的微积分内容相衔接，具有以下特点：

(1) 在保证数学概念的准确性和基本理论的系统性的基础上，适当调整传统教学内容，注重课程内各章内容之间的关系，以及本课程与后续课程的衔接，内容精练，推理简明，不片面追求深与全，而以实用为原则.

(2) 本书注重对学生的应用意识与能力，特别是在经济学方面的应用能力的培养，通过实例分析引入数学概念，再应用数学概念解决实际问题，给出解决问题的方法和步骤，并配置一些应用例题及习题，使读者从中学会用数学的思维方式去分析问题并解决问题. 书中各章内容都讲述了微积分的应用，特别是在经济学方面的应用，这有利于学生学以致用.

(3) 本书强调对微积分的基本概念、基本方法的掌握，结合内容配置丰富的例题，并剖析综合性例题. 按节配置适量习题，每章有总习题，适应不同层次的教学需求.

(4) 根据经济管理类学生的特点，本书注意与初等数学的衔接，给出基本初等函数的主要性质、图形一览表和初等数学的常用公式，并集中给出了高等数学中的方法与公式，便于读者复习和查用.

参加本书编写的有西北工业大学李云珠(第 1～3 章)、陆全(第 4～7 章)、郑红婵(第 8,9 章)，延伟东参加了编校工作. 全书由陆全、李云珠教授统纂定稿.

由于水平所限，书中疏漏和不妥之处恳请同行和读者指正.

编　者

2009 年元月于西北工业大学

# 目　录

前言
第 1 章　函数、极限、连续 …… 1
§1.1　函数 …… 1
§1.2　初等函数 …… 8
§1.3　简单的经济函数 …… 15
§1.4　极限的概念与性质 …… 19
§1.5　极限的运算 …… 30
§1.6　无穷小与无穷大 …… 38
§1.7　函数的连续性 …… 44
总习题一 …… 50
第 2 章　导数与微分 …… 52
§2.1　导数概念 …… 52
§2.2　函数的求导法则 …… 58
§2.3　隐函数的导数、高阶导数 …… 66
§2.4　微分 …… 71
§2.5　导数概念在经济学中的应用 …… 77
总习题二 …… 83
第 3 章　中值定理与导数的应用 …… 86
§3.1　中值定理 …… 86
§3.2　洛必达法则 …… 92
§3.3　函数的单调性、极值与最值 …… 99
§3.4　曲线的凹凸性与拐点、函数作图 …… 106
§3.5　经济最值问题 …… 112
总习题三 …… 119
第 4 章　不定积分 …… 121
§4.1　不定积分的概念与性质 …… 121

§4.2 换元积分法 …… 127
§4.3 分部积分法 …… 137
§4.4 有理函数与三角函数有理式的积分举例 …… 141
§4.5 不定积分简单应用举例与简明积分表的使用 …… 147
总习题四 …… 150
**第 5 章 定积分** …… 152
§5.1 定积分的概念与性质 …… 152
§5.2 微积分基本定理 …… 160
§5.3 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 165
§5.4 广义积分 …… 173
总习题五 …… 179
**第 6 章 定积分的应用** …… 181
§6.1 定积分的元素法 …… 181
§6.2 定积分的几何应用 …… 182
§6.3 定积分的经济应用 …… 189
总习题六 …… 192
**第 7 章 多元函数微积分学** …… 193
§7.1 空间解析几何基本知识 …… 193
§7.2 多元函数的基本概念 …… 197
§7.3 偏导数与全微分 …… 203
§7.4 复合函数与隐函数的求导法则 …… 212
§7.5 多元函数的极值 …… 217
§7.6 二重积分 …… 222
总习题七 …… 231
**第 8 章 无穷级数** …… 233
§8.1 常数项级数的概念和性质 …… 233
§8.2 正项级数 …… 237
§8.3 任意项级数 …… 244
§8.4 幂级数 …… 248
§8.5 函数的幂级数展开 …… 255

总习题八……262
**第9章　微分方程与差分方程**……264
§9.1　微分方程的基本概念……264
§9.2　一阶微分方程……266
§9.3　可降阶的高阶微分方程……273
§9.4　高阶常系数线性微分方程……276
§9.5　差分方程……284
§9.6　微分方程、差分方程在经济学中的应用……292
总习题九……296
**参考文献**……299
**部分习题答案与提示**……300
**附录**……322
附录Ⅰ　初等数学的常用公式……322
附录Ⅱ　极坐标系简介……325
附录Ⅲ　简明积分表……326

# 第 1 章　函数、极限、连续

函数是客观世界中变量之间最基本的一种相互依存关系，它是高等数学研究的主要对象. 极限反映变量的特定变化趋势，极限理论为微积分学奠定了坚实的理论基础，是高等数学研究的主要工具，因而，极限思想贯穿了高等数学的整个内容. 本章将介绍函数、极限的基本概念与性质，极限的计算与函数的连续性.

## §1.1　函　　数

### 1.1.1　集合与区间

1. 集合

集合是现代数学中一个重要的基本概念，称具有某种共同特性的事物的总体为集合，构成集合的每一事物为该集合的元素. 例如，某院校一年级的学生、自然数的全体、$xOy$ 平面上圆周 $x^2+y^2=1$ 内的点等，都各自组成一个集合. 如果事物 $a$ 是集合 $A$ 的元素，则记为 $a\in A$（读作 $a$ 属于 $A$），事物 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，则记为 $a\notin A$（读作 $a$ 不属于 $A$）.

集合的表示法一般有两种，一种是列举法，即把集合中的所有元素列举出来，例如，方程 $x^2-6x+8=0$ 的所有根的集合 $A$ 可表示为 $A=\{2,4\}$. 另一种常用方法是描述法，是指将集合中元素的共同特征描述出来，用形式 $A=\{x\mid x$ 所具有的特征$\}$表示. 例如，上述集合 $A$ 也可表示为 $A=\{x\mid x^2-6x+8=0\}$. 又如，$xOy$ 平面上圆周 $x^2+y^2=1$ 内的点的集合 $M$，可记作 $M=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数，$x^2+y^2\leqslant 1\}$. 显然，如果集合由无穷多个元素组成，宜用描述法来表示.

以后用到的集合主要是数集，即元素均为数的集合，在没有特别指明时，数都是实数. 常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集合，$\mathbf{Z}$ 表示整数集合，$\mathbf{R}$ 表示实数集合.

如果集合 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素，就称 $A$ 是 $B$ 的子集，记为 $A\subset B$（读作 $A$ 包含于 $B$）或 $B\supset A$（读作 $B$ 包含 $A$）. 例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$. 例如，若 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,1,5\}$，则 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 例如，$\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2+1=0\}$是空集. 规定空集为任何集合的子集.

2. 区间与邻域

区间是常见的实数集合. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集合, $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$, 则

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b|\}$, 这里 $a,b\notin(a,b)$;

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$, 这里 $a,b\in[a,b]$;

半开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间均称为有限区间, $a,b$ 称为区间的端点, $b-a$ 称为区间的长度, 如图 1.1(a), (b)所示. 还有无限区间, 如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\},$$

如图 1.1(c), (d)所示. 这里引入了符号"$+\infty$"(读作正无穷大)和"$-\infty$"(读作负无穷大).

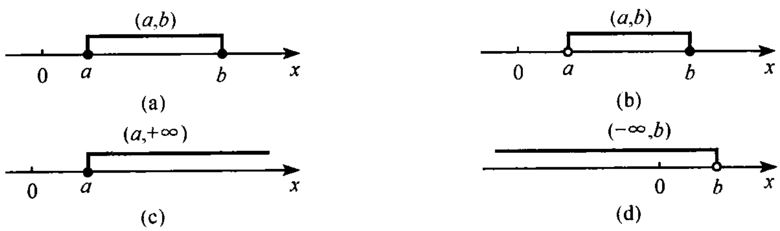



图 1.1

邻域是高等数学中常用的一个概念.

所谓点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域, 是指以 $x_0$ 为中心, 以 $2\delta(\delta>0)$ 为长度的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 如图 1.2(a)所示, 记作 $U(x_0,\delta)$, 即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}\quad 或\quad U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

若在邻域中去掉中心 $x_0$, 所得集合称为点 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域, 如图 1.2(b), 记作 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

其中, $x_0$ 为邻域的中心, $\delta$ 为邻域的半径, 当不需要考虑半径大小时, 以 $x_0$ 为中心的任何开区间称为点 $x_0$ 的邻域, 记作 $U(x_0)$. 邻域是一对称的开区间.


图 1.2

### 1.1.2　函数概念

在观察自然或社会的一些现象过程中，常会遇到两种不同的量，一种量在其过程中始终保持固定的数值，称为常量. 另一种量可取不同的数值，称为变量. 例如，自由落体运动中物体的质量、重力加速度是常量，时间与位移是变量. 但是，变与不变是相对的. 例如，就小范围地区而言，重力加速度被视为常量，而在广大地区来说，重力加速度则是变量. 这就是说，一个量，它属于常量还是变量，应视具体问题而定.

在同一现象中，所涉及的变量往往不止一个，这些变量的变化通常并不是独立的，而是存在着某种相互依赖的关系，为了说明这种关系，先观察两个实例.

**例 1**　圆的面积问题. 设圆的半径为 $r$，圆的面积为 $A$，则这两个变量之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给出，当变量 $r$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一值时，变量 $A$ 就由上式确定一值与其对应.

**例 2**　自由落体运动问题. 设物体下落时间为 $t$，落下的距离为 $s$，从时刻 $t=0$ 开始下落，则变量 $s$ 与 $t$ 的关系如下：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，$g$ 为重力加速度. 假设物体在 $t=T$ 时刻落地，那么当 $t$ 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一值时，变量 $s$ 就由上式确定一值与其对应.

以上两个例子虽然实际含义不同，但本质上都表达了两个变量之间的相依关系，即确定了一种对应规则，当其中一个变量在其变化范围任意取定一值时，另一个变量就按这种对应规则确定一值与其对应，它们之间也就构成了一种函数关系.

**定义**　设 $x$ 和 $y$ 为两个变量，$D$ 为非空数集，如果对于任意一个数 $x\in D$，变量 $y$ 都按照一定的对应规则 $f$ 确定唯一的值与其对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$.

数集 $D$ 称为函数的定义域，$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量.

当 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，与其对应的 $y$ 值称为函数在 $x_0$ 处的函数值，记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 当 $x$ 取 $D$ 内所有的数时，对应的实数集合 $B=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

由定义可知，函数是由对应规则与定义域两个要素所确定，两个要素都相同的函数表示同一函数，如函数 $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$，当 $x,t$ 的变化范围都是非空数集 $D$ 时，它们为同一函数，与自变量和因变量用什么符号表示无关. 对于对应规则不同的函数，可以用不同的英文字母表示，如 $y=f(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$ 等.

函数的定义域 $D$ 是使函数关系式有意义的自变量的取值范围，常用不等式、区间或集合来表示. 而在实际问题中，函数的定义域应依据问题的实际意义确定，如例 1 中，$D=(0,+\infty)$，例 2 中，$D=[0,T]$.

如果自变量 $x$ 给定一个值，有多个函数值与之对应，这种函数称为多值函数，相对而言，符合定义的函数为单值函数. 在教材中，若没有特别指明时，所讨论的函数均指单值函数. 例如，反三角函数 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 是多值函数，这里只讨论单值函数 $y=\arcsin x$.

**例 3**　确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-1}$；　(2) $y=\dfrac{1}{x}$；　(3) $y=\sqrt{x}+\ln(x^2-4x+3)$.

**解**　(1) 定义域 $D=[1,+\infty)$ 或 $D=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$.

(2) 定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 或 $D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$.

(3) 定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$$

的 $x$ 的全体，解不等式组得 $0\leqslant x<1$ 或 $x>3$，故定义域为 $D=[0,1)\cup(3,+\infty)$ 或 $D=\{x\,|\,0\leqslant x<1$ 和 $x>3\}$.

**例 4**　下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$；

(2) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}, g(x)=\sin x$.

**解**　(1) 不同. 因为 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$，它们不相同.

(2) 相同. 因为它们的对应规则与定义域均相同.

(3) 不同. 因为对应规则不同，$f(x)=|\sin x|$.

函数对应规则的表现形式是多样的，下面所给的三种函数也是常见的函数形式：

(1) 常量函数. 设 $C$ 为常数，则 $y=C$ 也是函数，称为常量函数，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，对应规则是 $y=C$，其实写为 $y=C(\sin^2 x+\cos^2 x)=C$ 就看得更为清楚.

(2) 分段函数. 若函数在其定义域的不同部分，对应规则由不同的关系式给出，它仍表示一个函数，称为分段函数.

**例 5**　符号函数

$$f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

为分段函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，如图 1.3 所示.

**例 6** 分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ 1-x, & x>0\end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,如图 1.4 所示.

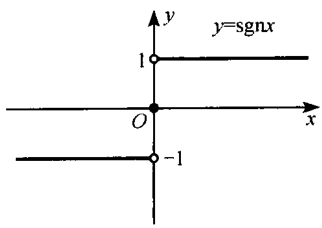



图 1.3

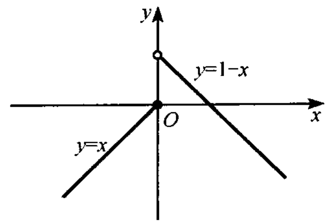



图 1.4

(3) 语句所表达的函数,即函数的对应规则由语言来描述.

**例 7** 取整函数 $y=[x]$表示"变量 $y$ 是 $x$ 的最大整数部分". 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,对应规则是 $y$ 取不超过 $x$ 的最大整数,记为$[x]$,如$[-3.5]=-4$,$[-0.5]=-1$,$[0]=0$,$[0.5]=0$,$[1]=1$,$[3.5]=3$,它的图形为阶梯形,如图 1.5 所示.

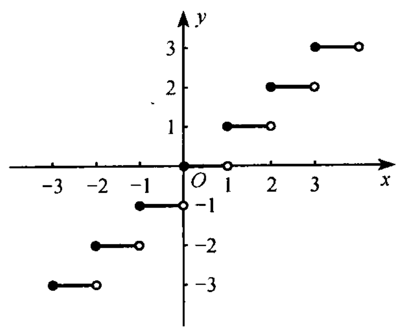



图 1.5

### 1.1.3 函数的表示法

函数常用公式法(或称解析法)、图像法和表格法表示.

(1) 公式法. 用数学式子表示函数的方法叫公式法,以上例中函数都是用公式法表示的,公式法的优点是简明准确,便于运算和推理;

(2) 图像法. 以图形表示函数的方法叫图像法,其优点是鲜明直观,便于研究函数的几何性质. 在水利、气象等工程技术上应用广泛;

(3) 表格法. 将自变量的取值与对应的函数值列成表格,以表示函数关系的方法叫表格法,其优点是简单明了,便于查得函数值,如三角函数表、对数表、商品销售表等,常以表格法表示函数.

### 1.1.4 函数的基本特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$在区间$(a,b)$内有定义,若存在一个正数 $M$,使得对于一切 $x\in(a,b)$都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内有界；否则，称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内无界.

**例 8** 函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 因为对于一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$.

**例 9** 函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，因为在开区间 $(0,+\infty)$ 内不存在一个正数 $M$，使得 $|\ln x|\leqslant M$ 总成立.

但是，如果在区间 $(1,2)$ 内，取 $M=\ln 2$，那么对于该区间的一切 $x$ 都有

$$|\ln x| \leqslant \ln 2$$

成立. 因此，函数 $\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的.

由此可见，在讨论函数的有界性时，必须指明 $x$ 所在的区间. 一个函数可能在它的整个定义域内有界，也可能仅在定义域的一部分内有界.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，如果对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形对称于 $y$ 轴，奇函数的图形对称于原点.

**例 10** 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4-2x^2$； (2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$； (3) $f(x)=\sin x+1$.

**解** (1) 因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^4-2x^2$ 为偶函数，如图 1.6 所示.

(2) 因为 $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-f(x)$，因此，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，如图 1.7 所示.

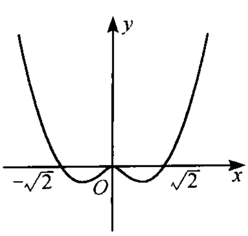



图 1.6

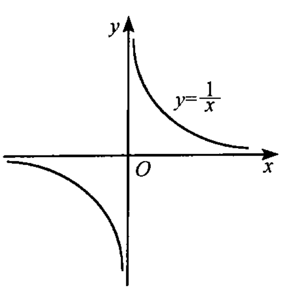



图 1.7

(3) $f(-x)=\sin(-x)+1=-\sin x+1$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ 既无 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，又无 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(x)=\sin x+1$ 既非偶函数又

非奇函数，通常叫非奇非偶函数，如图 1.8 所示.

可以证明：两个偶函数之和是偶函数，两个奇函数之和是奇函数；两个偶函数之积是偶函数，两个奇函数之积亦是偶函数，而偶函数与奇函数之积是奇函数.

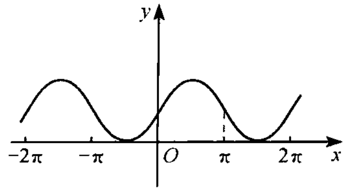



图 1.8

3. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内随着 $x$ 增大而增大，即对于任意两点 $x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内单调增加；如果 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内随着 $x$ 增大而减小，即对于任意两点 $x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内单调减少.

函数单调增加或单调减少统称函数是单调的.

有些函数在整个定义域内是单调的，而有些函数在定义域的一部分内单调增加，在另一部分内单调减少. 例如，函数 $y=e^x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，函数 $y=e^{-x}$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少，而函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内单调减少，在区间 $[0,+\infty)$ 内单调增加. 因而，讨论函数的单调性时，也必须指明函数是在哪个区间上单调.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在正数 $T$，使得对于任意 $x \in D$，$x+T \in D$ 都有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是周期函数，$T$ 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的函数的周期是指函数的最小周期. 例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 的周期为 $2\pi$，函数 $\tan x$，$\cot x$ 的周期为 $\pi$，函数 $\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$.

## 习题 1.1

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2+6x+8=0$ 的根的集合；

(2) 抛物线 $y^2=x$ 与 $x=1$ 的交点的集合.

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 不小于 8 的所有实数的集合；

(2) 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$内部(不含边界)的一切点的集合;

(3) 点 1 的去心$\frac{1}{2}$邻域.

3. 判断下列各组函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=\frac{x}{x(x-1)}, g(x)=\frac{1}{x-1}$;　(2) $f(x)=x, g(x)=e^{\ln x}$;

(3) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg|x|$.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\cos\sqrt{x^2-1}$;　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;　(3) $y=\sqrt{16-x^2}+\frac{x-1}{\ln x}$.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x<0, \end{cases}$ 求 $f(2), f(-3), f(-x)$.

6. 判别下列函数的有界性:

(1) $y=\sec x$;　(2) $y=\lg x$;　(3) $y=\operatorname{arccot} x$.

7. 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x\cos x$;　(2) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;　(3) $f(x)=\ln(x^2+1)$.

8. 判别下列函数的单调性:

(1) $y=3x-1$;　(2) $y=1+2x^2$;　(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

9. 下列函数中哪些是周期函数? 对周期函数,求出其周期.

(1) $y=\sin 5x$;　(2) $y=\sin 3x+\tan\frac{x}{2}$;　(3) $y=x\sin x$.

10. 设 $f(x)$是定义在$(-a,a)$内的任意函数,证明:

(1) $f(x)+f(-x)$是偶函数;　(2) $f(x)-f(-x)$是奇函数;

(3) $f(x)$总可以表示为偶函数与奇函数之和.

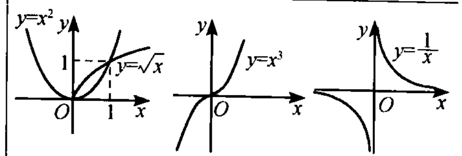
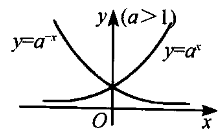
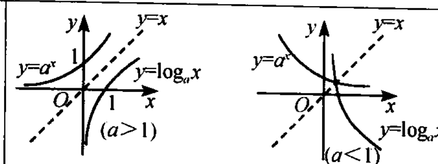
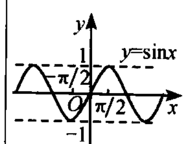
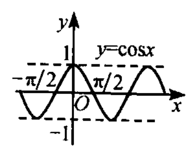
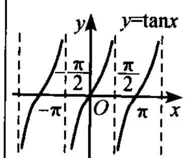
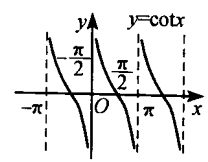
## §1.2 初等函数

### 1.2.1 基本初等函数

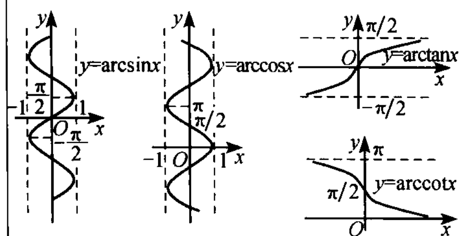
幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称基本初等函数,这 5 种函数和常数是构成初等函数的元素,它们在高等数学中的作用好比建筑中的砖瓦.学习高等数学,首先要熟练掌握基本初等函数的表达式、定义域、值域、主要性质及其图形等.

为了便于记忆,本教材给出"基本初等函数的定义域、值域、主要性质及其图形一览表",如表 1.1 所示.

**表 1.1 基本初等函数的定义域、值域、主要性质及其图形一览表**

| | | 表达式 | 定义域 | 值 域 | 有界性 | 奇偶性 | 单调性 | 周期性 | 常见图形 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 幂函数 | | $y=x^{\mu}$ | 随 $\mu$ 而变化，但总在 $(0,\infty)$ 内有定义 | 随 $\mu$ 而异 | 无界 | | 随 $\mu$ 而异 | |  |
| 指数函数 | | $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(0,+\infty)$ | 无界 | | $y=e^x\nearrow$ <br> $y=e^{-x}\searrow$ | |  |
| 对数函数 | | $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$ | $(0,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ | 无界 | 与指数函数关于 $y=x$ 对称 | $a>1$ 时$\nearrow$ <br> $a<1$ 时$\searrow$ | |  |
| 三角函数 | 正弦 | $y=\sin x$ | $(-\infty,+\infty)$ | $[-1,1]$ | $\lvert\sin x\rvert\leqslant1$ | 奇函数 | | $T=2\pi$ |  |
| | 余弦 | $y=\cos x$ | $(-\infty,+\infty)$ | $[-1,1]$ | $\lvert\cos x\rvert\leqslant1$ | 偶函数 | | $T=2\pi$ |  |
| | 正切 | $y=\tan x$ | $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ | $(-\infty,+\infty)$ | 无界 | 奇函数 | $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\nearrow$ | $T=\pi$ |  |
| | 余切 | $y=\cot x$ | $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$ | $(-\infty,+\infty)$ | 无界 | 奇函数 | $x\in(0,\pi)\searrow$ | $T=\pi$ |  |
| | 正割 <br> 余割 | $y=\sec x$ <br> $y=\csc x$ | $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ | $(-\infty,+\infty)$ | 无界 | 偶函数 <br> 奇函数 | | $T=2\pi$ | |

续表

| | | 表达式 | 定义域 | 值　域 | 有界性 | 奇偶性 | 单调性 | 周期性 | 常见图形 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 反三角函数 | 反正弦 | $y=\arcsin x$ | $[-1,1]$ | $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ | $\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$ | | ↗ | |  |
| | 反余弦 | $t=\arccos x$ | $[-1,1]$ | $[0,\pi]$ | $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ | | ↘ | | |
| | 反正切 | $y=\arctan x$ | $(-\infty,+\infty)$ | $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ | $\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$ | | ↗ | | |
| | 反余切 | $y=\operatorname{arccot} x$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(0,\pi)$ | $0<\operatorname{arccot} x<\pi$ | | ↘ | | |