概率初步

王景泉　编著

人民教育出版社

概 率 初 步

王景泉 编著

人民教育出版社出版

（京）新登字113号

概 率 初 步

王景泉 编著

人民教育出版社出版发行
新华书店总店科技发行所经销
北京市房山区印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张 5.5 字数 109,000
1993年2月第1版 1993年2月第1次印刷
印数 1—1,080
ISBN 7-107-10916-4
G·2657 定价2.60元

前　言

在中学概率实验教学过程中，发现学生学习时存在两个问题．一是对概率概念的接受比较困难，二是形成解题能力的进程相当缓慢．分析其原因，前者是受概率知识本身抽象性的影响，后者则是因为概率问题和复杂的社会现象、生活实际等交织在一起，诸多条件的界限不很清晰，从而使应用公式解题时困难增大．此外，在中学数学教科书中传统的作法是把概率问题做为代数的一小部分，仅列成一章．由于概率知识原本就费解，内容又被大大压缩，这样更加剧了学生学习的困难．为了解决这一矛盾，需要做一些探索性的工作．

概率论这门学科，由古典概率进入高等数学领域时，内容上有一定程度的飞跃．在中学阶段，由于受到中学数学教学目的和课时的限制，概率的教学内容不可能做过多的安排，所以在进入高等数学学习之后，接触到概率时显得基础知识不够，坡度较大，接受起来感觉困难，甚至有的学生竟望而生畏，这样不利于概率学科进一步的发展．

基于上述情况，写书时遵循了两条基本原则：一是尽可能消除或者减弱中学生以及初学者的障碍，帮助他们打下较牢靠的学习基础，以适应进一步学习较高程度概率知识的需要．为此，尽量把抽象的概念具体化，按照辩证唯物主义认识论认

识事物的规律，从大量客观事物的归纳与分析中自然地引出有关概率的若干概念；二是提高初学者解决实际问题的能力以及灵活的解题能力，重点加强了对概率实际问题的素材分析，使初学者能够准确而又较迅速地去应用概率公式.

在实际编写过程中，尽量充实基础知识．全书共编入了近 90 个例题，通过大量的例题，发展读者的概率思维，增强对概率问题的分析能力，掌握解决概率问题的规律.

本书对概率历史的发展还予以初步介绍，以期帮助初学者对概率历史的发展有所认识，并从中汲取学习概率的动力.

本书共分九章．第一章是全书的引言，第二章是预备知识，第三、四、五章是概率的基础知识和基础理论，第六、七、八章是概率知识的综合应用，第九章是历史发展的概述.

本书主要作为中学数学教师进行概率教学和中学生学习概率时的参考书，如果学习较高程度的概率知识，阅读本书的内容也是有益的.

愿本书能够为初学者学习概率减少一些难度，但这仅仅是一种探索，纰漏和谬误之处尚望读者批评斧正，以便改进.

编著者

1991 年 12 月

目 录

第一章
概率论的有关基础知识

概率问题的基本计算，在很多代数教科书中都有所涉及，这是因为概率问题的计算和排列、组合的知识有着极为密切的联系，所以在排列、组合之后，往往安排概率的初步知识. 这样，它们就成为初等代数的组成部分. 因此，中学生在学习中学数学之后，对概率的重要意义已经有了初步的认识，对它的理论价值及在社会生产和生活中的作用有了一定的了解，从而为进一步学习概率知识提供了十分有利的条件.

§1 绪　论

在现实生活中有些事件具有这样的性质：虽然不能对它能否实现作出精确论断，但却能够对该事件可能实现的程度作出论断，并且随着对该事件进行试验次数的增加，论断的可靠程度也随之而增加.

以某一个特定的70岁的老年人为例，如果断言“他将活

到 75 岁"，可以看出这种说法是不准确的．但是，假如考虑到几万名，例如 4 万名 70 岁的老年人，则可以说他们将有 67.4% 或者更多一些的人可能活到 75 岁①．当然，这个数字要受他们所生活的环境和时代的限制．

再例如，某省 1986 年普通高校计划招生 24890 人，而 1986年应届高中毕业生是9万人，那么能够考入高校的学生与高中毕业生的比例是 27.66%，一般地说，可以认为高中毕业生上大学的机会是 27.65%．具体到某一个学生，其考试的结果只能是考取或者是考不取，不能说他考上了 27.65%．但在考前对某所中学的高中毕业生或某个地区的高中毕业生整体地看，考取的机会却可以做出这样的估计：如果该省的某一地区教育质量是正常的，考前又没有发生什么足以影响考试成绩的特殊情况，可以预计该地区考取人数与毕业生人数之比接近 27.65%．这样，这个地区对毕业生的安排将处于主动，能够及时制订出合乎实际情况的安排计划．

对诸多的类似问题做出概括，就产生了概率的概念．

为了帮助初学者对概率有较为深入的理解，增强学习的主动性，在学习之初简要地介绍一下其发展进程是必要的．对概率原始概念的研究，国外的著作中多认为是意大利的数学家巴巧利（Luca Pacili，1445—1514）②．事实上我国大约在公元前 2238 年时就曾经普查过男孩的出生率，并得到了男孩的出生率是二分之一的论断③．

---

① 参见 G. Chrystal: Algebra（下册），P596．

② 参见格涅坚科：《概率论教程》，p42，人民教育出版社，1960年版．

③ 见上书p392．

在 16 世纪，伽利略（Galileo, 1564—1642）为解答某些概率问题而萌发了古典概率的思想．到 17 世纪，在费尔马(Fermat, 1601—1665)、帕斯卡(Pascal, 1623—1662)、惠更斯(Huygens, 1629—1695)的著作中得到了较为系统的论述，而由雅各·贝努利（Jacob Bernoulli, 1654—1705）奠定了概率的理论基础．贝努利的著作《猜度术》是概率研究的一项重大成就，他提出了“贝努利定理”，这是“大数定律”的最早形式．在 19 世纪，拉普拉斯(Laplace, 1749—1827）的研究给概率的发展以很大的推动．他在其《概率论哲学探讨》的名著中叙述了男婴、女婴出生率的研究情况．他对伦敦、彼得堡、柏林、法兰西全国的婴儿出生率做了统计研究，几乎完全一致地给出了男婴的出生数与婴儿出生数之比，大约等于$\frac{22}{43}$. 在这里，拉普拉斯做出了概率研究的范例．他的经典著作《分析概率论》则总结了 19 世纪概率论的研究成果．20 世纪 30 年代苏联对概率的研究比其他国家所取得的进展要大，柯尔莫格洛夫(N. Kolmogoloff, 1903— ）给出了概率论的公理体系．近几十年来做为一个独立的数学分支，概率论获得了迅速的发展，特别是由于它和现代化生产有着广泛的联系，它的实际作用也日益显现出来．

§2 概率的有关基本概念

定义 1 试验

为了达到某种预期目的而进行的实际操作或者观测，叫

做试验.

例如,投掷硬币,债券得奖抽签,学生考试成绩的测算,炮火准确度的测试等等,都叫做试验.

定义 2　事件

进行某种试验,其每个可能的结果叫做**事件**.

以前面提过的研究老年人年龄大小为例,可以把询问一个老年人的年龄看作试验.于是“该老年人 73 岁”就是一个事件,当然“该老年人不到 70 岁”、“该老年人超过 75 岁”等等都可能是询问的结果,它们都是事件.

把投掷一枚硬币作为一次试验,那么“出现正面”或者“出现反面”是这试验的可能结果,它们都是这试验的事件.

定义 3　随机事件

在一定条件下可能发生也可能不发生的事件叫做**随机事件**.

像上面所说的任意投掷一枚硬币,根据生活经验可以知道,事件“出现正面”可能发生,也可能不发生,它是随机事件;同样,“出现反面”也是随机事件.

定义 4　必然事件

在一定条件下必定会发生的事件称为**必然事件**.

当我们进行试验时,会发现许多事件在一定条件下必然会发生.例如,做匀速直线运动的物体,如果没有外力的作用,它将继续做匀速直线运动.在一定的条件下,做匀速直线运动的物体,继续做匀速直线运动是必然事件.在标准大气压下,对水加热,其温度达到 100°C 时,水必然会沸腾.在

这样给定的条件下，“水沸腾”也是必然事件.

定义 5　不可能事件

在一定条件下不可能发生的事件，称为**不可能事件**.

还以询问老年人的年龄为例，显然，“他 200 多岁了”是不可能事件；“他不到 10 岁”同样很荒唐，也是不可能事件.

在标准大气压下，把水加热到 100°C，“水不沸腾”就是一个不可能事件.

为了以后叙述方便，我们把必然事件和不可能事件作为随机事件的两个特例，这就是说，以后提到随机事件时，包含了必然事件和不可能事件的意思. 基于同样理由，以后的叙述不再区别随机事件和事件了，一般都称事件，这样书写起来简洁些.

定义 6　对立事件

有两个事件，当做试验时，其中之一必定发生，而另一个必定不发生，则称这两个事件为**对立事件**.

例如，任意掷一枚硬币时，事件“出现正面”和事件“出现反面”是对立事件.

定义 7　等可能

指出现的可能性相同，或者说发生的机会相等.

当我们掷一枚硬币时，如果硬币的质地是均匀的，投掷时又是任意的，那么“出现正面”和“出现反面”的机会均等，它们就是两个等可能的结果. 如果任意投掷一颗游戏的骰子（均匀木料做成的小正方体，它的六个面上分别标有数字 1，2，3，4，5，6），那么“掷出1”、“掷出 2”、……、“掷出 6”这 6 个结

果也是等可能的.

定义 8 古典概率

设一个试验只有 n 个等可能的结果，如果事件 A 包含了 m 个结果，那么事件 A 出现的概率是 $\frac{m}{n}$，记作

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

这里应该注意两点：第一，这 n 个结果必须是相互排斥的，就是说其中任意两个结果都不可能同时发生．拿掷一颗游戏的骰子来说，由于掷出的结果只能是一面朝上，所以"掷出1"、……、"掷出6"这六个结果是互相排斥的．第二，这 n 个结果必须是等可能的．对掷骰子来说，"掷出偶数"、"掷出 1"、"掷出 3"、"掷出 5"这四个结果虽然相互排斥，但不是等可能的，"掷出偶数"比"掷出 1"的机会要大得多.

为了加深对等可能事件的理解，我们举一个例子.

从分别写有 0, 1, 2,…, 9 十个数字的十张卡片中任意抽出一张，记下数字后放回去，再任意抽出一张，又得到一个数字，求这两个数字之和等于 5 的概率.

如果不加思索地把任意抽出的两个数字之和当作试验的结果，即把 0, 1, 2, 3, …, 18 当作等可能的试验结果，共 19 个，再套用古典概率计算公式得到所求事件的概率为 $\frac{1}{19}$，那就错了．因为上述 19 个结果尽管相互排斥，每次试验只出现一个，但它们绝不是等可能的．例如，"和等于 1"只有抽到 0, 1 与 1, 0 两种情形，"和等于 4"却有抽到 0,4； 1,3； 2,2； 3,1； 4,0 五种情形，显然后一事件比前一事件发生的可能性

要大.

正确的解法应该这样：为了保证等可能性，把抽出的两个数字的数对当作试验结果，即共有(0,0),(0,1),(1,0),…,(8,9),(9,8),(9,9)这样共100个结果，它们是相互排斥的，而且每个结果发生的可能性都是百分之一. 我们把事件"抽出的两数之和等于5"记作A,它包含了(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)以及(5,0)这6个结果，所以根据古典概率的计算公式，应该有

$$P(A)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}.$$

定义9 优势和劣势

一个事件实现的概率和失败的概率之比叫做该事件的优势，而反过来的比则叫做该事件的劣势.

还以掷一颗游戏的骰子为例，"掷出1"为6个等可能的结果中的1个，其概率为$\frac{1}{6}$,而"没有掷出1"就是掷出了其他5个数，概率为$\frac{5}{6}$. 所以事件"掷出1"的优势为1:5,其劣势为5:1. 对掷一枚硬币来说，由于"出现正面"的概率是$\frac{1}{2}$,"不出现正面"的概率也是$\frac{1}{2}$,所以"出现正面"的优势是1:1，表明其实现与失败的机会均等.

第二章 与概率计算有关的若干代数公式

排列、组合、二项式定理等有关基本公式在中学数学中已有证明，这里不再重复，只列出公式.

§1 排 列

定义 10 排列

从 n 个不同元素中，每次取出 $r(r\leqslant n)$ 个不同的元素，按一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的**排列**，其排列种数记为 P_n^r. 公式 1:

$$\boxed{P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).\quad(r\leqslant n)}$$

若 $r=n$，则有公式 2:

$$\boxed{P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1.}$$

定义 11 全排列、阶乘

把 n 个不同元素按一定顺序排成一列，这种排列称为**全排列**，其排列种数是自然数从 1 到 n 的连续乘积，称为 n 的**阶乘**，记作 $n!$. 公式 3:

$$\boxed{P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1 = n!.}$$

定义 12　环形全排列

把 n 个不同元素按照相对位置关系，不分首尾地围成一圈的排列叫做**环形全排列**.

环形全排列的排列种数是 $(n-1)!$ 或 $\frac{n!}{n}$.

定义 13　项链排列

环形全排列向左或向右翻转后，其排列结果视为相同的排列叫做**项链排列**.

若参与排列的元素是 n 个，则其项链排列种数是

$$\frac{(n-1)!}{2}.$$

定义 14　有重复的选排列

从 n 个不同的元素中每次取出 r 个元素，按一定顺序排列起来，其中的任一个元素允许重复取出，这种排列叫做从 n 个不同的元素中取出 r 个的**有重复的选排列**，其排列种数用 Π_n^r 表示. 公式 4:

$$\boxed{\Pi_n^r = \underbrace{n\cdot n\cdots n}_{r\text{个}} = n^r.}$$

例 1　用 1,2，3 三个数字可以组成多少个三位数，其中的每一个数字都可以重复使用?

解：1,2,3 三个数字中的每个数字都可以放在百位数的位置上，故有三种放法；同理每个数字也都可以放在十位数和个位数的位置上，各有三种不同的放法，所求的排列种数即三位数的个数是

$$\Pi_3^3=3^3=27.$$

例 2 把三封不同的信投放在两个不同的信箱里，有多少种不同的投放方法？

解：每一封信既可以投放在第一个信箱内，又可以投放在第二个信箱内，其投放方法有

$$\Pi_2^3=2\cdot 2\cdot 2=8(\text{种}).$$

定义 15 含有相同元素的全排列

在 n 个元素中，分别有 $p,q,\cdots,r$ 个相同的元素（$p+q+\cdots+r=n$），那么这 n 个元素的全排列叫做**含有相同元素的全排列**. 排列种数表达为公式 5：

$$\boxed{\frac{n!}{p!q!\cdots r!}\quad(\text{其中} n=p+q+\cdots+r).}$$

例 3 某人要登上有八个磴的楼梯，其中有两次每次迈两个磴，其余每次迈一个磴，共有多少种不同的上楼梯法？

解：每次迈一个磴看成是 a，每次迈两个磴看成是 b，这样就有 4 个 a，2 个 b，某人的一种上楼梯法就相当于含有四个 a 类元素、二个 b 类元素的六个元素的一种排列. 于是，他共有

$$\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}$$

$$=15$$