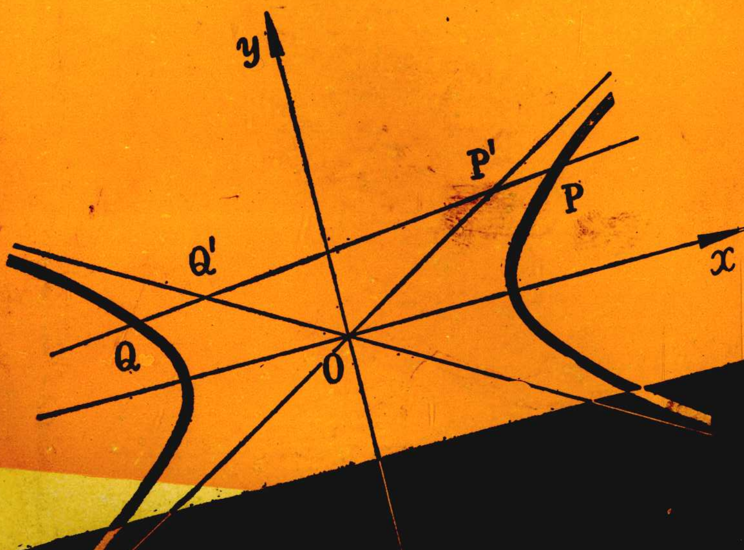
139

根与系数的关系及其应用

GEN YU XISHU DE GUANXI JIQI YINGYONG



上海教育出版社

根与系数的关系及其应用

中学生文库

根与系数的关系及其应用

毛鸿翔

上海教育出版社

内容提要

在一元二次方程中，一个重要方面是讨论根与系数的关系，其中包括根的判别式和韦达定理两个内容。本书阐述了判别式和韦达定理的基本知识；并且着重介绍根的判别式和韦达定理在讨论二次三项式的符号、解一元二次不等式、研究根的对称函数、解对称方程组、求函数的极值以及判定二次曲线和直线的相关位置等方面的应用；在此基础上还介绍了一元 n 次方程的根与系数的关系及其简单的应用。本书每一节都列举了一些典型例题的解法，并编选了一定数量的练习题，可供中学生在学习时选用。

中学生文库 根与系数的关系及其应用

毛鸿翔　　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

江苏溧阳印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本787×1092　1/32　印张 4　字数82,000

1981年10月第1版　1986年7月第4次印刷

印数81,100—121,100本

统一书号：7150·2607　　定价：0.49

前　言

“螺丝虽小，用处很大”。用这句话来比喻一元二次方程根的判别式和韦达定理是很确切的．初次接触二次方程根的判别式和韦达定理的同学，总认为它们仅仅是反映了二次方程根与系数的关系罢了，作用不大．但是，随着学习的不断深入，知识的不断加深，就会体会到：“过去小看了这两个定理，它们的用处竟如此之广！”

二次方程根的判别式反映了根的性质和系数之间的关系；韦达定理反映了根的数值和系数之间的关系．数学上的问题，凡最后归结到二次方程根的性质的研究，常通过根的判别式去解决；归结为二次方程根的数值的讨论，常通过韦达定理去解决；如果既涉及根的性质，又涉及根的数值，那末需要判别式与韦达定理配合应用去解决．

本书将较为系统地介绍二次方程根的判别式和韦达定理在初等数学中的应用．

目录 ZHONG XUE SHENG WENKU

一、二次方程根的判别式的应用

1. 二次方程根的判别式

我们知道，对于一般二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，可以用配方法，求得它的根，就是

将方程两边同除以二次项系数，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

方程两边同加上一次项系数的一半的平方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，根据平方根的意义，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac>0$，方程有两个不等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac=0$，方程有两个相等的实数根

$$x_1=\frac{-b}{2a},\quad x_2=\frac{-b}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac<0$，那末，不论 x 是任何实数都不适合这个方程，因为任何实数，它的平方不等于负数．这时方程没有实数根．

从以上对方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根过程中可以得到如下定理．

定理 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$，

(1) 如果 $b^2-4ac>0$，那末方程有两个不等的实数根；

(2) 如果 $b^2-4ac=0$，那末方程有两个相等的实数根；

(3) 如果 $b^2-4ac<0$，那末方程没有实数根．

这个定理的逆命题也是正确的．

逆定理 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$，

(1) 如果有两个不等的实数根，那末 $b^2-4ac>0$；

(2) 如果有两个相等的实数根，那末 $b^2-4ac=0$；

(3) 如果没有实数根，那末 $b^2-4ac<0$．

证明 (1) 如果方程有两个不等的实数根，证明 $b^2-4ac>0$．用反证法证明．假设 $b^2-4ac=0$，由原定理得方程有两个相等的实数根，这与题设相矛盾．假设 $b^2-4ac<0$，由原定理得方程没有实数根，这也与题设相矛盾．所以 $b^2-4ac>0$ 成立．

同理可证，如果方程有两个相等的实数根，则 $b^2-4ac=$

0; 如果方程没有实数根，则 $b^2-4ac<0$.

由原、逆两定理，我们得到，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac>0$；有两个相等的实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac=0$；没有实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac<0$.

由于根据 b^2-4ac 的值可以判定二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性质，因此我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**根的判别式**，并记为 $\Delta=b^2-4ac$.

在解一元二次方程时，一般先用根的判别式去鉴别一下方程的根的情况，然后求根. 若求出判别式 $\Delta<0$，那末这个方程无实数根，就不必去解方程了.

下面我们侧重谈谈怎样用二次方程的根的判别式来判定根的性质以及根据二次方程的根的性质来确定方程中的参数的值.

(1) 判别二次方程根的性质

[例 1] 不解方程，判别它们的根的性质：

(1) $3x^2+4x-4=0$;

(2) $9x^2-12x+4=0$;

(3) $5y^2-7y+10=0$.

解 (1) $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot3(-4)=16+48>0$,

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实数根.

(2) $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$,

$\therefore$ 这个方程有两个相等的实数根.

(3) $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot5\cdot10=49-200<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根.

[例 2] 不解方程，判别下列方程的根的性质：

(1) $(n^2+1)x^2-2nx+(n^2+4)=0$;　(n 为实数)

(2) $x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$.　(a、b、c 为实数)

解　(1) $\Delta=(-2n)^2-4(n^2+1)(n^2+4)$

$$=4n^2-4n^4-20n^2-16$$

$$=-4(n^4+4n^2+4)=-4(n^2+2)^2.$$

不论 n 是什么实数，$(n^2+2)^2$ 都是正数，所以 $-4(n^2+2)^2$ 是负数，$\Delta<0$，所以方程没有实数根.

(2) $\Delta=(a+b)^2-4(ab-c^2)=(a-b)^2+4c^2\geqslant 0$.

所以方程有两个实数根.

当 $a=b$, $c=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $a\neq b$, $c\neq 0$ 时，方程有两个不相等的实数根.

[例 3]　a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，讨论方程

$$x^2+2ax+b^2+c^2=0$$

的根的情况.

解　$\Delta=4a^2-4(b^2+c^2)$.　　(1)

$\because$ a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，由余弦定理得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

代入(1)式，得

$$\Delta=4(b^2+c^2-2bc\cos A)-4(b^2+c^2)$$

$$=-8bc\cos A.$$

$\because$ a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，$\therefore$ $a>0$, $b>0$, $c>0$.

当 $\angle A$ 为锐角时，$\cos A>0$,

$\therefore$ $\Delta<0$，方程没有实数根；

当 $\angle A=90^\circ$ 时，$\cos A=0$,

$\therefore$ $\Delta=0$，方程有两个相等的实数根；

当 $\angle A$ 为钝角时，$\cos A<0$,

$\therefore\ \Delta>0$，方程有两个不等的实数根。

［例 4］　若 a、b、c 为不相等的实数，证明以下三个二次方程：

$$ax^2+2bx+c=0,$$
$$bx^2+2cx+a=0,$$
$$cx^2+2ax+b=0$$

不可能都得到等根。

证明　若三个二次方程都得到等根，则

$$4b^2-4ac=0, \tag{1}$$
$$4c^2-4ab=0, \tag{2}$$
$$4a^2-4bc=0. \tag{3}$$

$[(1)+(2)+(3)]\div 2$，得

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ac-2ab-2bc=0,$$

即

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,$$
$$\therefore\quad a=b=c.$$

这与假设 a、b、c 为不相等的实数相矛盾，所以三个二次方程不可能都得到等根。

［例 5］　已知方程

$$x^2+px+q=0$$

有两个相等的实数根，求证方程

$$(p^2-2q+2)x^2-2p(1+q)x+p^2+2q^2-2q=0$$

也有两个相等的实数根。

证明　由题设条件

$$\Delta_1=p^2-4q=0,\quad \therefore\quad p^2=4q.$$

将 $p^2=4q$ 代入第二个方程的判别式，得

$$\begin{aligned}\Delta_2&=[2p(1+q)]^2-4(p^2-2q+2)(p^2+2q^2-2q)\\&=4[p^2+2p^2q+p^2q^2\\&\quad-(p^4-4p^2q+2p^2q^2-4q^3+8q^2+2p^2-4q)]\\&=4[p^2+2p^2q+p^2q^2-p^4+4p^2q\\&\quad-2p^2q^2+4q^3-8q^2-2p^2+4q]\\&=4[-p^2+6p^2q-p^2q^2-p^4+4q^3-8q^2+4q]\\&=4[-4q+24q^2-4q^3-16q^2+4q^3-8q^2+4q]\\&=4\cdot 0=0.\end{aligned}$$

所以第二个方程也有两相等的实数根.

(2) 确定二次方程中的参数

应用二次方程根的判别式，由二次方程根的性质，可以确定方程中的参数.

[例 6] 当 a 为何值时，方程 $ax^2-12x+9=0$ 有两个相等的实数根？

解 要使方程有两个相等的实数根，必须 $\Delta=0$，即

$$\Delta=(-12)^2-4\cdot a\cdot 9=0.$$

解这个方程，得 $a=4$.

∴ 当 $a=4$ 时，方程有两个相等的实数根.

[例 7] 当 k 为何值时，方程 $4x^2-8x+k=0$ 有两个不相等的实数根？

解 要使方程有两个不相等的实数根，必须 $\Delta>0$，即

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 4\cdot k>0.$$

解这个不等式，得

$$k<4.$$

∴ 当 $k<4$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

[例 8] 已知方程 $2x^2-4x\cos\theta+3\sin\theta=0$ 的两根相等，

且θ是锐角，求θ和这个方程的两个根.

解 要使方程有两个相等的实数根，必须$\Delta=0$，即

$$\Delta=16\cos^2\theta-24\sin\theta=0.$$

解这个方程，得

$$8(2\cos^2\theta-3\sin\theta)=0,$$

$$2-2\sin^2\theta-3\sin\theta=0,$$

$$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=-2.\quad \text{(不适合，舍去)}$$

$$\because\quad \theta\text{为锐角},\quad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}.$$

将$\sin\theta=\frac{1}{2}$代入原方程，得

$$2x^2-2\sqrt{3}\,x+\frac{3}{2}=0,$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0,$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[例 9] 若整数系数方程

$$2ax^2+2(2a-b-1)x+(2a-2b-1)=0$$

和

$$x^2+(2a+b+3)x+(a^2+ab+6)=0$$

都有两个相等的实数根，求a、b的值.

解 由题意知这两个方程的根的判别式皆等于零，即

$$\begin{cases}4(2a-b-1)^2-8a(2a-2b-1)=0,\\(2a+b+3)^2-4(a^2+ab+6)=0.\end{cases}$$

化简整理，得

$$\begin{cases} b^2-2a+2b+1=0, \\ b^2+12a+6b-15=0. \end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{50}{49}, \\ b=\dfrac{3}{7}. \end{cases}$$

因为原方程为整数系数方程，所以 $a=2$，$b=-3$ 为所求的值.

[例 10]　若实数 a、b、c、d 都不等于零，且满足

$$(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0,$$

求证 a、b、c 成等比数列，且公比为 d.

证明　把 $(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0$ 看作未知数为 d 的二次方程，因为 a、b、c、d 是实数，所以 d 的二次方程的根的判别式 Δ 不小于 0，即

$$[-2b(a+c)]^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqslant 0.$$

化简，得
$$-4(b^2-ac)^2\geqslant 0,$$
即
$$(b^2-ac)^2\leqslant 0.$$

$\because$ a、b、c 都为实数，$\therefore$ $(b^2-ac)^2\geqslant 0$.

既要使 $(b^2-ac)^2\leqslant 0$，必须 $b^2-ac=0$，即 $\Delta=0$.

$$\therefore\quad b^2=ac,\ a、b、c\ 成等比数列.$$

又
$$\because\quad d=\frac{2b(a+c)\pm\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}=\frac{2b(a+c)}{2(a^2+ac)}=\frac{b}{a},$$

$$(a+c\neq 0)$$

$$\therefore\quad d\ 为公比.$$

2. 二次三项式的值的讨论

实系数二次三项式 ax^2+bx+c 与二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是有一定联系的. 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根就是使二次三项式 ax^2+bx+c 的值为零的 x 的值, 所以二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根也叫做二次三项式的根. 下面我们讨论二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式之间的关系.

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]\\&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].\end{aligned}$$

(1) 若 $b^2-4ac<0$,

$$\because\quad b^2-4ac<0,\ \therefore\quad -\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0,$$

而 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0,\quad \therefore\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0.$$

当 $a>0$ 时, $ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时, $ax^2+bx+c<0$.

因此有, 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时, 二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(2) 若 $b^2-4ac=0$, 则

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

(i) 如果$x=-\dfrac{b}{2a}$,那末$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$, 因此$ax^2+bx+c$的值等于零.

(ii) 如果 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$,那末$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>0$.

当 $a>0$ 时,有 $ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时,有 $ax^2+bx+c<0$.

因此有,当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,若 $x=-\dfrac{b}{2a}$,则 $ax^2+bx+c=0$,若 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$,则二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(3) 若 $b^2-4ac>0$,

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&\quad\cdot\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&\quad\cdot\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).
\end{aligned}
$$

这里 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 和 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 就是二次方程 $ax^2+bx+c=0$,当 $b^2-4ac>0$ 时的两个根,显然

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

用 x_1 表示较小的根，x_2 表示较大的根，则

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

(i) 如果 $x_1<x<x_2$，

则 $x-x_1>0$，$x-x_2<0$. 因此

$$(x-x_1)(x-x_2)<0.$$

当 $a>0$ 时，有 $ax^2+bx+c<0$；

当 $a<0$ 时，有 $ax^2+bx+c>0$.

因此有，若 $b^2-4ac>0$，$x_1<x<x_2$，则二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相反.

(ii) 如果 $x<x_1$，则 $x-x_1<0$，因为 $x_1<x_2$，所以 $x<x_2$，则 $x-x_2<0$，因此 $(x-x_1)(x-x_2)>0$.

当 $a>0$ 时，$ax^2+bx+c>0$；

当 $a<0$ 时，$ax^2+bx+c<0$.

因此有，若 $b^2-4ac>0$，$x<x_1$，则二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(iii) 如果 $x>x_2$，则 $x-x_2>0$，因为 $x_2>x_1$，所以 $x>x_1$，则 $x-x_1>0$，因此 $(x-x_1)(x-x_2)>0$.

当 $a>0$ 时，$ax^2+bx+c>0$；

当 $a<0$ 时，$ax^2+bx+c<0$.

因此有，当 $b^2-4ac>0$，$x>x_2$ 时，二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(iv) 若 $x=x_1$，则 $x-x_1=0$，$ax^2+bx+c=0$；

若 $x=x_2$，则 $x-x_2=0$，$ax^2+bx+c=0$.

因此有，当 $b^2-4ac>0$ 时，$x=x_1$ 或 $x=x_2$ 时，二次三项式 ax^2+bx+c 的值为零.

由以上讨论可以知道：