算學小叢書

直尺與圓規

H. P. Hudson 著
林 辰 譯

商務印書館發行

協大圖書館
敬贈
譯者林[illegible]
一九三八

算學小叢書

直尺與圓規

H. P. Hudson 著

林 [illegible] 譯

江苏工业学院图书馆
藏书章

商務印書館發行

66045

中華民國二十六年十月初版

(54777)

算學小叢書 直尺與圓規一冊

Ruler and Compasses

每冊實價國幣五角五分

外埠酌加運費匯費

原著者 H. P. Hudson

譯述者 林辰

福州三牧坊福州中學

發行人 王雲五

上海河南路

印刷所 商務印書館

上海河南路

發行所 商務印書館

上海及各埠

周

版權所有 翻印必究

(本書校對者胡達聰)

譯　例

(一)　本書爲 H. P. Hudson 原著,屬 Longmans 近世數學叢書之一;專論直尺及圓規之作圖,內容兼及初等幾何,近世幾何及解析幾何.

(一)　本書計分八章:第一章爲導言;第二章論直尺及規尺作圖之可能條件;第三章論直尺作圖而引述交比,對合,等晝等近世幾何之基本思想;第四章論規尺作圖,旁及圓錐曲線之性質與近世晝具如平行尺,分線器,三角板等之作用;第五章論作圖題之各種解法,根據性質分離及變換兩原理對軌跡,投影,反形,……諸法作有系統之敍述;第六章論作圖方法之比較,述物質條件受有種種限制(如晝具之鈍劣,紙張之狹小等)時之作圖法及物質條件不受限制時之作圖之最簡方法,並介紹 Lemoine 氏之幾何繪圖學;第七章論單圓作圖,第八章論圓規作圖,皆於其歷史發展及作圖之基本問題有精詳之闡述.

（一）本書可供高級中學學生及教員幾何課程之參考．其理論之精闢，敍述之有條不紊，皆足以訓練思考途徑之發展；五、六、七、八諸章所舉之多數例題尤能引起學者之研究興趣．

（一）譯文力求忠實，全書次序皆仍原文．除原文中有顯著之錯誤二、三處譯者更改之後附註於頁末外，其餘有證明不甚明顯，說理稍涉高深者，反足以鍛鍊閱者之思想能力，譯者均不加註釋，以免強作解人之誚．

（一）譯名大部按照國立編譯館所暫定者，其有未經擬定者則從舊譯參酌採用之．

（一）人名，地名等皆不加翻譯，逕用原文．

（一）原文中有引證參考書時，皆僅舉其作者之名而另附參考書目於書末，譯文率仍其舊．

（一）譯者以規尺作圖問題之重要而國內專論本問題之書尚未之見，故特不揣譾陋，遂譯此書而公之於世，錯誤舛謬，知所難免，海內學者，幸有以教之．

二十五年十一月十九日，譯者識．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

目　錄

直尺與圓規

第一章

導言

Euclid 於其幾何原本 (element) 之篇首卽舉三公設 (postulates) 曰:

"茲假定

(i) 從任一點能作一直線至另一點;

(ii) 一線段能延長至直線上之任何長度;

(iii) 以任意點爲圓心可作一圓與此圓心成任一距離;"

該書首六篇之一切作圖所根據者僅此三個基本作圖法而已. 首二公設述 Euclid 用其直尺,或一直邊,所能爲者何事. 此直尺未必有刻度,蓋 Euclid 僅用以作直線或延長之,固未嘗以之移動距離至他一位置也. 第一公設

予吾人直線 AB 上在 A 與 B 間之部分，而第二公設則予吾人 A 以外及 B 以外之部分，故合兩公設則能畫爲兩與點所定之一直線之全部或該線上爲問題所需之任何部分.

末一公設則述 Euclid 用其圓規所能爲者. 同樣，Euclid 捨自一半徑至同圓他半徑外未嘗以之移動距離；Euclid 此畫具，不論其作如何狀，於圓心變易時，或兩尖端之一離開平面時，必將下垂而失原來之半徑(93 頁). 合此三公設卽得直尺及圓規之作用，卽過兩與點畫一直線及以一已與圓心作一圓使過一與點；而此兩作圖法遂構成幾何原本中之全部平面作圖. 歐氏作圖(Euclidian construction) 一名詞卽用以表一切能用 Euclid 兩作圖法重複應用有限次完成之作圖，而此種作圖不必皆見於 Euclid 原著中.

事實上，Euclid 所予吾人能用規尺完成之作圖爲數極少，而卽任一學幾何者皆有得一前人從未嘗有之作圖之可能. 然數千年前，卽有三數幾何圖形爲任何人所欲以規尺作圖，而無人能成功者. 其中最著名者爲作一正方形與一圓同面積及作一角等於一與角之三分一；最後

始證明此兩者中無一能以有限次之 Euclid 之作圖法完成之.

故能以規尺完成之圖形一方爲數無窮，一方亦有極多限制. 其爲無窮也顯而易見:卽就最簡單之包含直線上一組等距離之點之一圖形言(此圖形自可以規尺完成),卽可含三點,可含四點，可含四以上乃至無窮數之點，因此卽此最簡一式已含無窮圖形，全部可能圖形之爲數無窮更不待言矣;然而此種圖形亦有限制,蓋已知有多數圖形不屬於此一種,而需要直尺,圓規以外之畫具以完成之.例如上舉者外尙有正七角形,正九角形，或橢圓;橢圓可以兩針及一線畫成連續曲線，然用歐氏作圖則僅能得此曲線上無窮數之點.

於是本書所討論之第一個問題遂爲:何種作圖能根據 Euclid 之三公設完成而何種作圖則否? 或換言之,何種問題能僅用圓規與直尺解決? 學者之用盡心力圖欲以歐氏作圖方一圓或三等分一角也,歷時蓋數世紀,此企圖雖於直接目的上失敗;而亦常生他方面之效果;然能證明前此學者之企圖必當失敗,則解析學發達後之事也.古代或經典的幾何中少有普遍的論述，而卽近世幾何亦

缺少一種檢查其自身之權限之記法或計算法. 吾人常謂某一種問題當有某一類解法,但原則上對於每一特殊問題均須注重其本身之條件而爲之創一特殊之法. 方法之變異無窮,欲總述一切方法似屬無望,而欲謂某問題必無一未來之天才能得其一規尺解法亦似不可能者. 然而如今則此最後一語卻可施於方圓者(circle-squares),方圓者之稱不來自幾何學者,而來自解析學者. 利用坐標幾何學 (coordinate geometry) 之方法得以代數語言表一切幾何之敍述;代數語言雖稍欠優美,而其所含之字彙較廣; 且不但能討論特殊問題而亦能普遍論述一切問題,以是能完全答覆下一問題: 僅用直尺, 或兼用直尺及圓規,有何種可能作圖?

次章即述規尺作圖之每一步驟如何等於一解析學之方法;實則,應用一把直尺之能力相當於解一一次方程式之能力,而應用圓規之能力則相當於解一二次方程式者. 因此, 僅用直尺能解決之問題即稱爲一次問題 (linear problem), 而能用直尺圓規解決之問題則稱爲二次問題 (quadratic problem). 因規尺作圖 (ruler and compasses construction) 之每一步驟皆等於解一一次或二次

方程式，故研究用各種可能方法連合此二代數方法所能得之結果卽可答覆吾人目前之問題謂 (27 頁)：某種問題而亦僅此某種問題，其解法恃乎一一次方程式其根之計算僅須有理運算 (rational operation) 者，始得僅以直尺解之；而 (32,42 頁) 某種問題而亦僅此某種問題，其解法恃乎一次數爲 2 之冪，而根可以有理運算及開平方得之之代數方程式者，始得以直尺及圓規解之.

是卽上述問題之完全解答，蓋全用代數語言述之者；然欲維持其普遍之形式，此解答實不能譯爲純幾何之語言，幾何學中蓋尙缺此類文字也. 然此舉實非必要，蓋若有一用幾何語言敍述之問題，儘可試測其以代數語言表示所得之形式——其實際實行唯於數種特殊情形始稍感困難. 若試測成功，卽可從解析學獲得此幾何問題之一歐氏作圖. 例如第二章之末卽研究吾人對於正多角形 (regular polygon) 之作圖能力. 出乎意外者則正十七角形作圖之可能也，其作法見 47 頁.

吾人旣明瞭可能的歐氏作圖之爲無窮而亦爲有限制，並已相當明瞭其限制爲如何，自欲對此種作圖之全體施一淸晰之觀察，而究問最佳之分類當如何. 第一分類

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

上文已提及之;包含能僅用直尺解之之一次問題,第三章卽專論此種作圖. 該章將述及已知件 (data) 對作法之影響,及已知件之性質及關係可如何分類,使每一類各有一特殊的作圖方法.

Euclid 之圓規雖於相當限度外能移動距離,而該章中未嘗用及圓規,至其直尺則絕對不能移動距離. 故原則上,卽已知件中無某種特殊關係時,"距離"不能從圖形之某一部移動至另一部,更不能比較兩線段之長短,卽此兩線段在同一直線上亦爲不可能,唯於一線段爲他一線段之一部分時,始能謂全體大於部分. 兩線段捨相重合外皆不能謂其長度相等;蓋比較兩線段實有使其排列於同方向以供吾人比較之意義,故至少須將其中一線段移至他一位置;然僅用直尺,於一般情形,此爲不可能. 從平行四邊形對邊相等之性質,知若能作平行線,卽能將長度自一線移至其平行線,故移動距離與作平行線間實有密切關係;後此尙當證明,在某種限度內,若吾人能完成兩者之一,卽能完成另一者. 雖云如是,然亦唯平行四邊形之對邊爲相等,其鄰邊卽不然,故作平行線實無補於移線段之長度至與原線段不同之一方向. 唯於已知件

允許吾人作一鄰邊,對邊同爲相等之菱形時,始能於兩組不同方向之平行線中任一組上獲得相等長度. 若僅用直尺,實無使一已與長度旋轉任意角度之能力,蓋此爲圓規之主要功用之一.

於是吾人根據已知件之投影性質 (projective property) 及數量性質 (metrical property), 長度之性質及角度之性質而獲一次作圖之普通分類法. 交比 (cross-ratio) 於兩者皆屬重要,比較兩不同列點 (range) 之交比之結果又引起等晝 (homography) 及對合 (involution) 兩義;自此數者最終又歸結於需求公點 (common point) 或重點 (double point) 之問題, 此種重點之作圖等於解一二次方程式,故僅用直尺不能完成之.

故於兼用圓規之第四章中,吾人對"作一圓"及"解一二次方程式"加以比較,於是能完滿研究交比及對合. 此後復離開本題 (92 頁) 而證明尋常之近世作圖器,分線器 (dividers), 平行尺 (parallel ruler), 及三角板 (set square),常與規尺并用者,僅能縮短歐氏作圖而不能擴張其解決問題之範圍. 後此又詳述如何運用此諸器具能完全代替圓規之作用.

除對作圖之已知件加以分類外，尚可分彙作圖之方法而研究每個方法對何種問題最為有用．第五章介紹兩個最基本的思想，卽性質分離 (separation of properties) 及變換 (transformation)，大多數作圖中此兩者或其中之一必居顯要之地位．自此兩思想引起者有半打極有用之解題方法，該章中當詳細解釋之．其中有軌跡法 (103 頁)：如自某某條件推知所求點必在一軌跡上，此軌跡若吾人所用方法能成功則必為直線或圓所構成者，同時自其他條件推知所求點必在另一如此之軌跡上，則兩軌跡之交卽所求點．又有試驗錯誤法 (106 頁)：於數次失敗的試測後，若問題確有解法，則必能獲一必底於成之著手途徑；有投影法 (119 頁) 及其數特例：其中含性質分離及變換兩原理；有反形法 (122 頁)：因其中直線與圓之關係而極適於規尺作圖；有對極法 (130 頁)：完全根據於對偶原理 (principle of duality)．

上述者為研究作圖本身之純本質分類．此外另有其他完全自外在觀點觀察得來之分類法．此種分類法根據於作法之能否減少種種作圖之不便利，所謂不便利者蓋原於畫具之弱點，可謂為實用上的，而非數學的．

然實則盡量減除用一小塊紙，一枝鈍鉛筆作圖的種種困難在理論上亦有其相當的價值(第六章). 同章末段之用意則在於估計一作圖之長度，法爲計算其所需之各種圓規及直尺之演繪動作，然後能指出一個問題之種種不同作法中何者爲最短捷. 此種計分方法實無異於消遣，而計分標準亦極隨意，唯 Lemoine 氏之幾何繪圖學原著頗堪一讀，本書介紹其材料之一部，望讀者能致力於其原書。

最後兩章所述者僅由於好奇心理，唯最少亦有一章可謂爲原於機械作圖之實際應用. 任何歐氏作圖題可僅作一圓及作多數直線解之，亦可不作一直線而作多數圓解之. 七，八兩章證明是理並舉例以明其作法.

於是全書之連鎖包含全部規尺作圖，其範圍，其限制及其分類. 但本書盡量引證例題，故後此舉例獨多；所望讀者中有不喜一般之敍述或解析學研究者可自諸問題及其幾何解法中獲得研究興趣.

第二章

可能之作圖

於討論任何特殊規尺作圖之前，本章中先借助解析學而研討此種作圖之全部．吾人對每個幾何步驟均當獲得其相等之解析手續 (analytical process)，始能確切敍述以某種方法運用某種畫具能完成何種作圖．

坐標

茲當先知如何用某種坐標系能以算術形式表示問題之已知件，然後研查規與尺之每個運用與此數字已知件間有何種關係．於是利用代數定律卽能確切指明用某一畫具或兼用兩者所能得之結果．

爲使研究之進行簡單順利必須假設一切幾何的已知件皆爲點．如此必能使研究大爲便利，且亦完全無損於普遍性．從 Euclid 首二公設，知任與所與直線上之二點，該直線卽可作圖，故若已知件中有一直線，卽可易以

該直線上之兩點. 此兩點必爲確定的而非"任意"點. Euclid 三公說中無一能用以自一直線中"任意"取出一點(參閱 18 頁);點,必爲已與者,或爲已作兩相交直線以決定之者. 故若欲自已知件中摒棄一直線而易以兩點,則捨非其他已知件中已有該直線上之兩定點,吾人必先使兩條其他已與直線或兩對與點之連線與之相交,始能以此兩交點爲已知件,以代所與直線. 卽在已知件中,或自已知件能直接得到者,至少有兩直線,或不在一直線上之三點. 於某種瑣屑情款 (trivial cases) 中,所與之元素 (elements, 指點,線等) 過少,故所能作圖者僅有有限之點及直線 (參閱 26 頁). 例如,若所予者僅有一對直線,則所能作圖者唯其交點而已,此點爲唯一完全確定之點. 線上其他各點可謂之部分決定,而不能謂爲完全確定;此諸點形成一組定點,與平面上其他各點有別,而諸點間則無可分別,故不能用於更進一步之作圖. 此等情形後此完全置之不論. 同理,一圓可代以圓心及圓周上一點,或圓心及他兩點其距離等於圓之半徑者,或圓周上之三點;而亦有數種瑣屑情款當棄置弗論. 又吾人所研究之問題皆係求有某種所求性質之點,直線與圓之作圖,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbo