研究生(非数学类)数学系列规划教材

矩阵论教程

MATRIX THEORY TUTORIAL

张绍飞　赵 迪◎编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生（非数学类）数学系列规划教材

矩阵论教程

张绍飞　赵　迪　编著

机械工业出版社

本书可作为工科类研究生矩阵论教材，全书共分六章（约50学时），主要讲解矩阵的基本理论与方法，包括线性空间与线性变换，常见的矩阵分解，广义逆矩阵，矩阵分析，矩阵的直积与非负矩阵的介绍等. 各章配有相应的习题用作练习.

本书也可作为理工科学生及教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

矩阵论教程/张绍飞，赵迪编著. —北京：机械工业出版社，2009.12
研究生（非数学类）数学系列规划教材
ISBN 978-7-111-28911-1

Ⅰ. 矩… Ⅱ. ①张…②赵… Ⅲ. 矩阵-理论-研究生-教材 Ⅳ. 0151.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第217581号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 版式设计：张世琴
封面设计：王伟光 责任校对：张 薇 责任印制：洪汉军
北京市朝阳展望印刷厂印刷

2010年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 11.25印张 · 216千字

标准书号：ISBN 978-7-111-28911-1

定价：19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前　言

矩阵理论是数学的重要分支，内容十分丰富，它是数学与其他学科（如数值分析、概率统计、控制理论、优化理论、电学、信息管理科学与工程等）的基础．它在科学与工程计算方面有着广泛的应用，是有限维线性科学的有力工具．因此，学习和掌握矩阵的基本理论和方法，对于工科研究生来说是必不可少的．

考虑到读者大多数是工科专业的同学，大学期间是以工科线性代数为教材的．为了更好地与本课程衔接，需要用一定的课时来强化与补充线性代数中一些重要的理论，包括线性空间与线性变换、欧氏空间以及矩阵的Jordan型等．从而可以在充分了解矩阵的几何背景与内涵的基础上，对矩阵的代数及分析性质进行研究与讨论，以及利用代数与分析融合的手段来研究矩阵．作为数学基础课教材，本书适合50学时左右的矩阵论教学．

本书是作者在多年从事研究生矩阵论的教学中，对讲义不断充实改进后形成的．全书力求做到难度适中，简洁易懂，深入浅出．每章节都配有一定数目的习题，以供读者练习，从而强化逻辑推理计算和抽象思维的训练．本书第1～4章由张绍飞编写；第5，6章由赵迪编写，全书由赵迪统稿．

最后，特别感谢北京航空航天大学研究生院以及高宗升教授与陈祖明教授对本书编写给予的大力支持和指导．欢迎使用本书的师生们提出批评与建议．

作　者
于北京航空航天大学

目　录

第 1 章　线性代数引论

本章的主要目的是回顾和扩充一些线性代数的基本知识. 内容有线性空间与线性变换，相似矩阵与 Jordan 标准形，以及欧氏空间等理论. 这些理论和方法已渗透到自然科学与工程技术的各个领域，有着广泛的应用.

1.1　线性空间

一、定义与例子

线性空间是线性代数的基本概念之一，它是 n 维实向量几何空间的进一步抽象和推广，其本质是具有元素的加法和数乘运算并满足一些运算律. 线性空间是一种特殊的代数系统. 先给出以下定义：

定义 1　设 V 是一个非空集合，若 V 中有一种规则，称之为 V 的加法运算"+"，使得任取 u，$v\in V$，都有 V 中唯一的元与之对应，称之为 u 与 v 的**和**，记为 $u+v$，且这种加法必须具有以下性质：

1）交换律：$u+v=v+u$，$\forall u$，$v\in V$，

2）结合律：$(u+v)+w=u+(v+w)$，$\forall u$，v，$w\in V$，

3）存在零元 $\theta\in V$，使得 $\forall u\in V$，$u+\theta=u$，

4）$\forall u\in V$，存在 V 中唯一元（负元），记为 $-u$，使得 $u+(-u)=\theta$.

此时称 V 在加法运算下成一个**加群**，记为 $(V, +)$.

例 1　在数的加法运算下，所有整数，所有有理数，所有实数，所有复数分别构成加群，分别记为 $(\mathbb{Z}, +)$，$(\mathbb{Q}, +)$，$(\mathbb{R}, +)$，$(\mathbb{C}, +)$.

例 2　在数的乘法运算下，所有非零有理数构成加群，记为 $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$. 同样 $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ 及 $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ 也是加群. 而 $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \cdot)$ 不构成加群（负元不一定存在）.

通常，若一个数集中任意两个数的和，差，积，商（除数不为 0）仍在该数集中（即对四则运算封闭），则称该数集为**数域**. 显然 $\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ 均为数域（有理数域，实数域，复数域）.

注　可将数域概念推广到一般域（略）. 以后我们所讨论的主要是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

定义 2　设 $(V, +)$ 是一个加群，F 是一个数域. 若有 F 对 V 的数乘规则，使得 $\forall\lambda\in F$，$u\in V$，有 V 中唯一元与之对应，记为 λu，且此规则满足以下性质：

1) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$, $\forall\lambda\in F$, u, $v\in V$,（数乘对加法的分配律）

2) $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$, $\forall\lambda$, $\mu\in F$, $u\in V$,（数乘对数的加法分配律）

3) $\lambda\ (\mu u)=(\lambda\mu)\ u$, $\forall\lambda$, $\mu\in F$, $u\in V$,（数乘的结合律）

4) $1u=u$, $\forall u\in V$.

此时，称 V 是数域 F 上的**线性空间**或**向量空间**（V 中元称为**向量**，F 中元称为**标量**）.

特别地，当 $F=\mathbb{R}$ 时，称 V 为**实线性空间**；当 $F=\mathbb{C}$ 时，称 V 为**复线性空间**.

例 3 几何空间（实直线$\mathbb{R}$，平面$\mathbb{R}^2$，直觉空间$\mathbb{R}^3$）在通常向量加法运算（三角形法则）及数乘向量运算下构成$\mathbb{R}$上的线性空间. 更一般的，令

$$V=\{x\,|\,x|=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},x_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,n\},$$

取 $F=\mathbb{R}$，对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)^{\mathrm{T}}$，定义 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i=y_i$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$ 且 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ \cdots,\ x_n+y_n)^{\mathrm{T}}$，$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\ \cdots,\ \lambda x_n)^{\mathrm{T}}$，$\theta_V=(0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$（零向量）.

易验证 V 对上述运算保持封闭，且满足定义中的各种运算律，故 V 是$\mathbb{R}$上的线性空间，称此为 **n 维实坐标向量空间**，记为$\mathbb{R}^n$. 同理可定义$\mathbb{C}^n$.

例 4 在某区间 $(a,\ b)$ 上，{全体多项式}$\subset${全体可微函数}$\subset${全体连续函数}$\subset${全体可积函数}$\subset${全体实函数}，在通常函数的加法运算及数乘函数运算下分别构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

例 5 取 V 为$\mathbb{C}$上所有 $m\times n$ 矩阵构成的集合，即 $V=\{(a_{ij})_{m\times n}\,|\,a_{ij}\in\mathbb{C}\}$，在矩阵的加法运算及数乘矩阵运算下，$V$ 构成$\mathbb{C}$上的线性空间（$m\times n$ 阶复矩阵空间），记为$\mathbb{C}^{m\times n}$. 类似可定义$\mathbb{R}^{m\times n}$($m\times n$ 阶实矩阵空间).

例 6 取定 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，令 $W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\,|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$，不难验证 W 是$\mathbb{C}$上的线性空间，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**零空间**（或**核**），它也是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，记为$\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$.

通过以上几例我们看到，线性空间作为一种重要的代数系统，其涵盖的范围是非常广泛的. 我们所熟悉的各类对象很多均具有线性空间的结构，V 中的元可以是几何向量，可以是数，数组，矩阵，函数等等. 一般地，称 V 中的元为**向量**.

注 线性空间 V 中的零元是唯一的，任一元的负元也是唯一的.

以下我们来讨论线性空间的结构.

二、维数、基底与坐标

从线性代数课程中，我们了解了$\mathbb{R}^n$中向量组的代数性质诸如线性组合，线性相关与无关等，类似的概念性质完全可延伸到一般的线性空间.

定义 3 设 V 为 F 上线性空间，$x_i\in V(i=1,\ \cdots,\ m)$，$x\in V$. 若有 $c_i\in F$ $(i=1,\ \cdots,\ m)$ 使得

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m,$$

则称 x 为 x_1，…，x_m 的**线性组合**，或者说 x 可由 x_1，…，x_m 线性表出；若存在一组不全为零的数 k_1，…，k_m，使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} k_ix_i = \theta$，则称向量组 x_1，…，x_m 为**线性相关**；否则称为**线性无关**，即若 $\sum\limits_{i=1}^{m} k_ix_i = \theta$，则必有 $k_1 = \cdots = k_m = 0$.

在例 5 中，我们熟知，若取 n 个线性无关的解，则任一解可由此 n 个无关解线性表出，即该方程的通解（所有的解）是由 n 个无关解的任意线性组合表出.

注 线性无关组的任一子集是线性无关的；线性相关组的任一扩集仍线性相关.

下面我们引入维数的概念.

定义 4 线性空间 V 中不同线性无关组中的向量个数不一定相同，向量个数的最大者叫做 V 的**维数**，记为 $\dim V$. 当 $\dim V < +\infty$（即为 n 或 0），称 V 为**有限维空间**，否则为**无限维空间**，记 $\dim V = +\infty$.

无限维空间是很多的，如取

$$K = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \pi^i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\pi \text{ 为圆周率})$$

不难验证，K 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，易见 1，π，π^2，…，π^m 线性无关，m 为任一自然数，故 $\dim K = +\infty$.

以后我们所涉及的空间一般均指有限维空间. 我们将看到空间 V 的维数是刻画 V 的特征数字. 引入如下：

定义 5 设 V 是数域 F 上的线性空间. x_1，…，$x_r \in V$，若满足：

1）x_1，…，x_r 线性无关，

2）V 中任一 x 均可由 x_1，…，x_r 线性表出.

则称 x_1，…，x_r 为 V 的一个**基底（基）**.

由定义，若 x_1，…，x_r 为 V 的一个的基底，则

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i \,\middle|\, \alpha_i \in F \right\} = span(x_1, \cdots, x_r).$$

可进一步断言：

定理 1 设 $\dim V < +\infty$，则

$$\dim V = n \Leftrightarrow V \text{ 的任一基底的元素个数均为 } n.$$

证明 "$\Rightarrow$"：任取 V 的一个基底 x_1，…，x_r，由维数定义知 $r \leqslant n$. 若 $r < n$，则存在 V 中线性无关的最大组 y_1，…，y_n，而 x_1，…，x_r 为基底，故每一个 y_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）均可由 x_1，…，x_r 线性表出. 设

$$y_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i, j = 1,2,\cdots,n,$$

考虑

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j\right)x_i = \theta,$$

由 x_1，…，x_r线性无关，故有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0, i = 1,2,\cdots,r$. 又因为此齐次方程组变量个数 n 大于方程的个数 r，故有非零解 β_1^0，…，β_n^0，使得

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j^0 y_j = \theta,$$

此与 y_1，…，y_n线性无关矛盾. 故 $r=n$.

"$\Leftarrow$"：设 $\dim V=m$，则存在 x_1，…，x_m为 V 中线性无关最大组，对于 $\forall u \in V$，则 u，x_1，…，x_m线性相关，故存在不全为 0 的数 β_1，…，β_m，β_{m+1}，使得

$$\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \beta_{m+1}u = \theta,$$

而 $\beta_{m+1}\neq 0$，故 $u = \sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{\beta_i}{\beta_{m+1}}\right)x_i$.

故 x_1，…，x_m为 V 的一组基，所以 $m=n=\dim V$.

推论 1　n 维空间中任意 n 个线性无关的向量均为 V 的一个基底，且任一线性无关组 x_1，…，$x_r(r\leqslant n)$ 可扩充为一个基.

推论 2　$\dim V=n$，x_1，…，x_n是 V 的一个基底，则对于 $\forall y\in V$，y 可由 x_1，…，x_n唯一表出.

定义 6　设 $\dim V=n$，x_1，…，x_n为 V 的一个基，$\forall y\in V$，令 $y=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$，称有序数组 $(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$为 y 在基 x_1，…，x_n下的**坐标**，它由 y 与基 x_1，…，x_n所唯一确定.

例 7　$P_n(x) = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R}\right\}$为 $n+1$ 维空间，1，x，…，x^n可作为它的基.

例 8　$\mathbb{C}$ 是$\mathbb{C}$ 上的一维空间，是$\mathbb{R}$ 上的 2 维空间，是$\mathbb{Q}$ 上的无限维空间，故空间维数与数域相关.

注　向量的坐标形式无论向量的实际意义如何，其坐标形式具有共性，且运算规律完全一致.

三、基变换与坐标变换

我们看一下线性空间中不同基底间的关系以及向量关于不同基底的坐标之间

的关系.

定义 7　设 x_1，…，x_n 及 y_1，…，y_n 是空间 V 的两个基，令

$$y_i = a_{1i}x_1 + \cdots + a_{ni}x_n = (x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, i = 1,\cdots,n.$$

引入矩阵记法：$(y_1, \cdots, y_n) = (x_1, \cdots, x_n)A$，这里 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in F^{n\times n}$，称 A 为由基 x_1，…，x_n 到基 y_1，…，y_n 的**过渡矩阵**（**变换矩阵**）.

由线性方程组理论不难看到 A 是可逆的，故有 $(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n) A^{-1}$，即 A^{-1} 为 y_1，…，y_n 到 x_1，…，x_n 的过渡矩阵.

任取 $x \in V$，设 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i y_i$，故

$$x = (x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (y_1,\cdots,y_n)\left(A^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}\right) = (y_1,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性，

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}} = A^{-1}(\xi_1,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}} \text{或} (\xi_1,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}} = A(\eta_1,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$$

此即向量 x 在不同基下的坐标之间的变换公式，故基变换矩阵确定后，坐标之间的变换公式也随之确定.

四、子空间与维数定理

直觉空间 $\mathbb{R}^3$ 中，引两个不共线向量 $a = \overrightarrow{OA}$，$b = \overrightarrow{OB}$，则由 a 与 b 所张成的空间为 Π，即 $\Pi = span(a, b) = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ 是 O，A，B 所在的平面 Π，是一个二维空间，同样 $l = span(a)$ 为 O，A 所在的直线 l，为一维空间. 而 $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$，$l \subseteq \mathbb{R}^3$，故 Π，l 均为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间. 如图 1-1 所示，一般有：

定义 8　设 V 是域 F 上的线性空间，$W \subseteq V$，W 非空，若 W 中向量关于 V 的加法及数乘运算也构成 F 上的线性空间，则称 W 为 V 的一个**子空间**.

注　任一空间 V 有两个平凡子空间 V 及 $\{\theta\}$.

例 9　$\mathbb{R}^3$ 中，过原点的任一直线及平面均是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

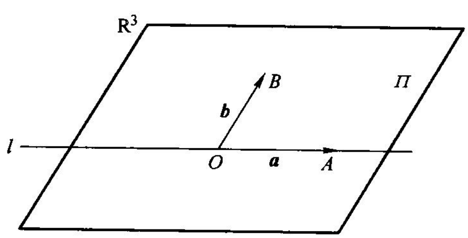

图　1-1

例 10　取定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 令

$$N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\},R(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m\,|\,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\},$$

则 $N(\boldsymbol{A})$ 及 $R(\boldsymbol{A})$ 分别是$\mathbb{R}^n$及$\mathbb{R}^m$的子空间.

例 11 任取 x_1, …, $x_m\in V$, 令 $W=span(x_1,\cdots,x_m)=\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\,|\,\lambda_i\in F\}\subseteq V$, 不难验证 W 是 V 的子空间.

判定 V 的子集 W 是否是子空间有以下简单准则:

定理 2 V 是 F 上的线性空间, $W\subseteq V$, 以下三个命题等价

命题 1 W 为 V 的子空间

命题 2 1) $\forall\lambda\in F$, $x\in W$, 有 $\lambda x\in W$.

2) $\forall x$, $y\in W$, $x+y\in W$

命题 3 $\forall\lambda$, $\mu\in F$, x, $y\in W$, $\lambda x+\mu y\in W$,

也即 W 关于 V 的线性运算封闭.

对于子空间, 常见有两种重要运算. 设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 令 $W_1\cap W_2\triangleq\{x\in V\,|\,x\in W_1,\ x\in W_2\}$, $W_1+W_2\triangleq\{x_1+x_2\,|\,x_1\in W_1,\ x_2\in W_2\}$. 不难验证, $W_1\cap W_2$及 W_1+W_2 仍是 V 的子空间, 且 $W_1\cap W_2$是包含于 W_1 及 W_2 的最大子空间, W_1+W_2 是包含 W_1 及 W_2 的最小子空间, 分别称其为 W_1 及 W_2 的**交空间**及**和空间**.

同理, 可归纳定义 $\sum_{i=1}^{k}W_i$.

思考: $W_1\cup W_2$是否为子空间? 为什么?

和空间和交空间的维数有以下基本的维数定理.

定理 3 设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则以下公式成立:

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2).$$

证明 令 $\dim W_i=m_i$, $(i=1,\ 2)$, $\dim(W_1+W_2)=n_1$, $\dim(W_1\cap W_2)=n_2$. 取 x_1, …, x_{n_2}是 $W_1\cap W_2\subseteq W_i(i=1,\ 2)$ 的基底, 将其分别扩充为 W_1 的基底: $\{x_1,\ \cdots,\ x_{n_2},\ y_1,\ \cdots,\ y_k\}$ 及 W_2 的基底 $\{x_1,\ \cdots,\ x_{n_2},\ z_1,\ \cdots,\ z_l\}$, 这里 $m_1=n_2+k$, $m_2=n_2+l$. 故

$$\begin{aligned}W_1+W_2&=\{\sigma+\tau\,|\,\sigma\in W_1,\tau\in W_2\}\\&=\{\sum_{i=1}^{n_2}\lambda_i x_i+\sum_{i=1}^{k}\mu_i y_i+\sum_{i=1}^{l}\xi_i z_i\,|\,\lambda_i,\mu_i,\xi_i\in F\}\\&=\mathrm{span}(x_1,\cdots,x_{n_2},y_1,\cdots,y_k,z_1,\cdots,z_l).\end{aligned}$$

考察

$$a_1x_1+\cdots+a_{n_2}x_{n_2}+b_1y_1+\cdots+b_ky_k+c_1z_1+\cdots+c_lz_l=\theta, \tag{1-1}$$

由式 (1-1) 有

$$c_1z_1+\cdots+c_lz_l=-\sum_{i=1}^{n_2}a_ix_i-\sum_{i=1}^{k}b_iy_i\in W_1\cap W_2,$$

故 $c_1z_1+\cdots+c_lz_l=a_1'x_1+\cdots+a_{n_2}'x_{n_2}$，从而

$$c_1=\cdots=c_l=0,$$

由式（1-1）有

$$a_1x_1+\cdots+a_{n_2}x_{n_2}+b_1y_1+\cdots+b_ky_k=\theta,$$

从而 $a_1=\cdots=a_{n_2}=b_1=\cdots=b_k=0$，故由式（1-1）知 x_1，$\cdots$，x_{n_2}，y_1，$\cdots$，y_k，z_1，$\cdots$，z_l线性无关，从而构成 W_1+W_2 的一个基底，故 $n_1=n_2+k+l$，从而

$$\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=n_1+n_2=n_2+k+n_2+l=\dim W_1+\dim W_2.$$

和空间 W_1+W_2 的向量可分解为 W_1 与 W_2 中向量之和，但这种分解一般来说不唯一，如取 W_1 与 W_2 分别是 Oxz 平面与 Oxy 平面，$\boldsymbol{i}$ 为 Ox 正向的单位向量，则 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$\lambda\boldsymbol{i}\in W_1\cap W_2$，而零向量

$$\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{i}+(-\lambda\boldsymbol{i}).$$

因为 $\lambda\boldsymbol{i}\in W_1$，$-\lambda\boldsymbol{i}\in W_2$，故分解不唯一（如图 1-2 所示）.

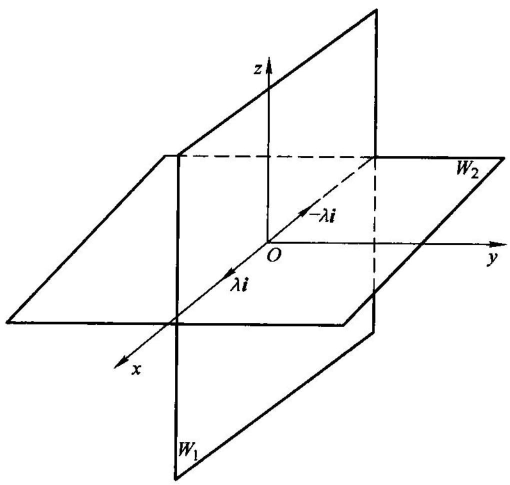

图 1-2

由此引入

定义 9 如果和空间 W_1+W_2 中任一向量均唯一地表成 W_1 中的一个向量与 W_2 中的一个向量之和，则称 W_1+W_2 是 W_1 与 W_2 的**直和**，记为 $W_1\oplus W_2$（或 $W_1\dot{+}W_2$）.

以下是刻画直和的几个等价条件.

定理 4 设 W_1，W_2 为 V 的子空间，则以下命题等价：

1） W_1+W_2 是直和；

2） W_1+W_2 中零元表法唯一；

3） $W_1\cap W_2=\{\theta\}$；

4） $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

证明概要 1）$\Rightarrow$2） 自然成立；

2）$\Rightarrow$3） $\forall\alpha\in W_1\cap W_2$，有 $\theta=\alpha+(-\alpha)$，由条件知，$\alpha=\theta$；

3）$\Leftrightarrow$4） 由维数定理可证；

4）$\Rightarrow$1） 任取 $\alpha\in W_1+W_2$，$\alpha=u_1+v_1=u_2+v_2$，u_1，$u_2\in W_1$，v_1，$v_2\in$

W_2，有 $u_1-u_2=v_2-v_1\in W_1\cap W_2=\{\theta\}$，故 W_1+W_2 是直和.

例 12 取 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$，$W_1=\{\boldsymbol{A}\in V|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\}$，$W_2=\{\boldsymbol{A}\in V|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\}$. 不难验证 W_1 及 W_2 均是 V 的子空间. $\forall \boldsymbol{A}\in V=\mathbb{R}^{n\times n}$，由于

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}.$$

易见 $\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\in W_1$，$\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\in W_2$，所以 $V=W_1+W_2$. 又对任意的 $\boldsymbol{B}\in W_1\cap W_2$，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.
所以 $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{O}\}$，不难算出

$$\dim W_1=1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \dim W_2=1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故 $\mathbb{R}^{n\times n}=W_1\oplus W_2$.

注 子空间直和的概念及定理 4 的结果可推广到有限个子空间情形. 类似于定理 4 有，$\sum_{i=1}^{k}W_i$ 是直和 $\Leftrightarrow \dim\left(\sum_{i=1}^{k}W_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\dim W_i\Leftrightarrow W_i\cap\left(\sum_{j\neq i}W_j\right)=\{\theta\}(i=1,\cdots,k)$.

习题 1.1

1. 证明：在实函数空间中，1，$\cos^2 t$，$\cos 2t$ 是线性相关的.

2. 求下列线性空间的维数与一组基

(1) 矩阵空间 $\mathbb{C}^{m\times n}$； (2) $V=\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\}$； (3) $V=\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\}$

3. 设 $W_1=span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2\}$，$W_2=span\{\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2\}$ 求 $\dim(W_1+W_2)$ 及 $\dim(W_1\cap W_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,\ 1,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(2,\ -1,\ 0,\ 1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,\ -1,\ 3,\ 7)$.

4. 证明 $\mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 维的空间.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ \cdots,\ 1,\ 0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$. $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，证明 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基底，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在此基下的坐标.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\ \alpha_{in})$，$(i=1,\ \cdots,\ n)$ 是 F^n 的一组基，且向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ 在此基下的坐标为 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，证明每个 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均可表示为 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 的线性组合.

7. 设 V_1，V_2 是数域 F 上的线性空间 V 的两个非平凡的子空间，证明存在 $\alpha\in V$ 使 $\alpha\notin V_1$，且 $\alpha\notin V_2$.

8. 设 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 令 $V_1=\{\boldsymbol{X}\in F^n\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}$，$V_2=\{\boldsymbol{X}\in F^n\mid(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}$. 证明：$F^n=V_1\oplus V_2$.

1.2 线性变换及矩阵

我们看到，线性空间作为一类基本而重要的代数系统，具有广泛的实际背景. 我们所熟知的众多对象均具有线性空间的结构，而线性代数的核心内容不仅要讨论线性空间的结构，而且要探究空间之间的联系，而线性变换则是反映这种联系的最基本的手段之一. 与此相联系的是矩阵，它是反映线性变换的内在性质的数学表现，是研究线性变换的基本方法之一. 本节着重介绍线性变换的基本概念，并借助矩阵手段来表示及刻画其各种性质.

一、线性变换的定义及例子

定义 1 设 V, W 是域 F 上的线性空间，映射 T: $V\to W$ 具有以下性质: $\forall\lambda$, $\mu\in F$, x, $y\in V$, 有 $T(\lambda x+\mu y)=\lambda Tx+\mu Ty$, 称 T 为 V 到 W 的一个线性映射. 特别当 $V=W$ 时，T 为 V 到自身的线性映射，称 T 为 V 上的一个**线性变换**.

例 1 恒等变换 T: $V\to V$, $Tx=x$, $\forall x\in V$.

零变换 T: $V\to V$, $Tx=\theta$, $\forall x\in V$.

易见这两种变换均是线性变换.

例 2 伸缩变换: 取定 $k\in\mathbb{R}^+$, 令 T: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $Tx=kx$, $\forall x\in\mathbb{R}^3$. T 将 $\mathbb{R}^3$ 中的任一向量拉伸 ($k>1$) 或压缩 ($k<1$) k 倍.

例 3 平面旋转变换 T:, 取定 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, $\forall \boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$,

$$
\begin{aligned}
Tx &= T(x_1,x_2)\\
&=(x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi, x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi)\\
&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

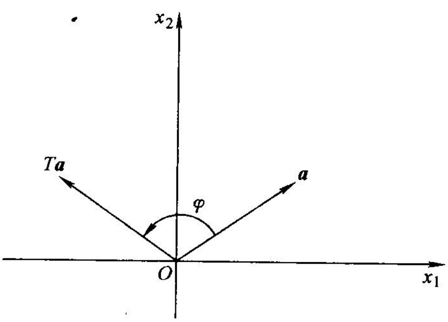

图 1-3

我们熟知这是将 $\mathbb{R}^2$ 中任一向量绕原点逆时针旋转 φ (如图 1-3 所示)，易验证 T 是线性变换.

事实上，设 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, λ, $\mu\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{\lambda x}+\boldsymbol{\mu y}) &= T(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2)\\
&=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\
&=\lambda(x_1,x_2)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}+\mu(y_1,y_2)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\
&=\lambda T\boldsymbol{x}+\mu T\boldsymbol{y}.
\end{aligned}
$$

例 4 平面反射变换 T：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$，有

$$T\boldsymbol{x} = T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2),$$

此为$\mathbb{R}^2$上关于 x_1 轴的反射（如图 1-4 所示）．不难验证，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，

$$T(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda T\boldsymbol{x} + \mu T\boldsymbol{y}.$$

例 5 投影变换 T：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$，$T(x, y, z) = (x, y, 0)$，此为 Oxy 平面上的投影（如图 1-5 所示）．不难验证，$T(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) = \lambda T\boldsymbol{a} + \mu T\boldsymbol{b}$，$T$ 是$\mathbb{R}^3$上的一个线性变换．

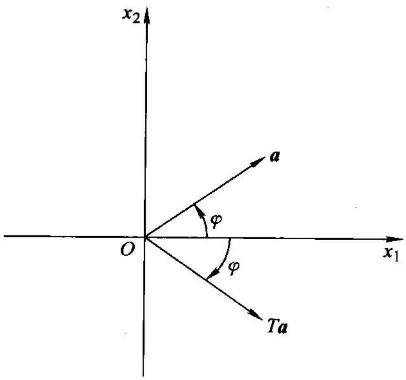

图 1-4

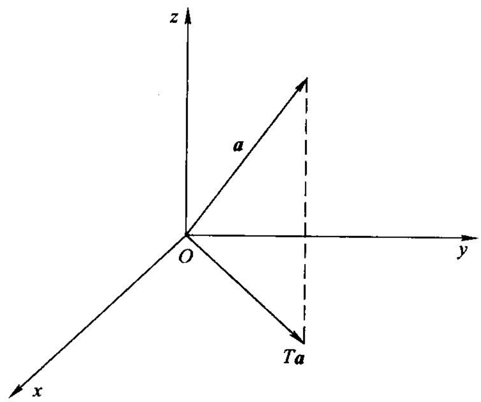

图 1-5

由以上几例可见，几类熟知的具有几何意义的变换均属于特殊的线性变换．

例 6 微分算子及积分算子．

令 $C[a, b]$ 及 $C^{(1)}[a, b]$ 分别表示 $[a, b]$ 上全体连续函数及全体具有一阶连续导数的集合，均为线性空间．令，

$$S: C[a,b] \to C[a,b],$$

$$S(f(x)) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \forall f(x) \in C[a,b];$$

$$D: C^{(1)}[a,b] \to C[a,b],$$

$$D(f(x)) = f'(x), \forall f(x) \in C^{(1)}[a,b].$$

由积分及导数的简单性质知，S 为 $C[a, b]$ 上的线性变换，D 为 $C^{(1)}[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的线性映射．

二、核空间、像空间及亏加秩定理

设 V 及 W 是 F 上的线性空间．令 $L(V, W)$ 表所有 V 到 W 的线性映射所构成的集合，设 $T \in L(V, W)$，令

$$N(T)=\{x\in V\mid Tx=\theta\},$$
$$R(T)=\mathrm{Im}(T)=\{y\in W\mid y=Tx,x\in V\}.$$

易验证 $N(T)$ 为 V 的子空间. $R(T)$ 为 W 的子空间，称 $N(T)$ 及 $R(T)$ 为 T 的**核空间及像空间**. 并称 $\dim N(T)$ 为 T 的**零度**（或亏），$\dim R(T)$ 为 T 的**秩**. 一般有

定理 1 （亏加秩定理）设 $T\in L(V, W)$，V 为有限维的，则 $N(T)$ 及 $R(T)$ 均为有限维，且

$$\dim N(T)+\dim R(T)=\dim V.$$

即 T 的亏加秩等于其定义域的维数.

证明 设 $\dim V=n$. 取 $N(T)$ 的一组基 e_1，…，e_k，将其扩充为 V 的一组基 e_1，…，e_k，e_{k+1}，…，$e_{k+r}(k+r=n)$，下面只须证 $T(e_{k+1})$，…，$T(e_{k+r})$ 构成 $R(T)$ 的一组基.

事实上，若 $\sum\limits_{i=1}^{r}a_{k+i}T(e_{k+i})=\theta$，有 $T(\sum\limits_{i=1}^{r}a_{k+i}e_{k+i})=\theta$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{r}a_{k+i}e_{k+i}\in N(T)$，故有 $\sum\limits_{i=1}^{r}a_{k+i}e_{k+i}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ie_i$，$a_1=\cdots=a_k=a_{k+1}=\cdots=a_{k+r}=0$，故 $T(e_1)$，…，$T(e_{k+r})$ 线性无关，且 $\forall y\in R(T)$，$\exists x\in V$，使得 $y=Tx$，令 $x=\sum\limits_{i=1}^{k+r}b_ie_i$，则

$$\begin{aligned}y&=Tx=T(\sum_{i=1}^{k+r}b_ie_i)\\&=T(\sum_{i=1}^{k}b_ie_i)+T(\sum_{i=k+1}^{k+r}b_ie_i)=\sum_{i=k+1}^{k+r}b_iT(e_i).\end{aligned}$$

故 $T(e_{k+1})$，…，$T(e_{k+r})$ 构成 $R(T)$ 的一组基. 所以，

$$\dim R(T)=r=n-k=\dim V-\dim N(T).$$

三、线性变换的矩阵及线性空间的同构

由前面的一些例子，我们可以看到线性变换包含了广泛的实际背景，且有很多几何意义，这对我们理解它有一定的帮助，但从数学角度来讲，我们更希望能找出它众多背景中所具有的一些共同的形式，也即能得到它的明确的数学表现形式，这样可以从更广的范围来进一步研究它的性质和特点.

设 $\dim V=n$，$T\in L(V, V)$，取定 V 的一组基 e_1，…，e_n，令

$$Te_j=a_{1j}e_1+\cdots+a_{nj}e_n,1\leqslant j\leqslant n,$$

采用矩阵记法：

$$T(e_1,\cdots,e_n)\triangleq(Te_1,\cdots,Te_n)\triangleq(e_1,\cdots,e_n)A \tag{1-2}$$

这里，$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{n\times n}\in F^{n\times n}.$$

在式（1-2）中，注意到 A 中的元为数，（e_1，…，e_n）中的元是向量，但数与向量有（在 V 中）数乘向量运算，故在式（1-2）中按矩阵运算规则有意义．再由空间结构及 T 的线性性质知，T 由 Te_1，…，Te_n 的确定而完全确定，故由 T 唯一确定一个矩阵 A，引入如下

定义 2 式（1-2）中的矩阵 A 称为 T **在基** e_1，…，e_n **下的矩阵或简称** A **为** T **的矩阵**.

由定义的引入看到，取定 V 的基 e_1，…，e_n，对任一 $T\in L(V,V)$，则唯一确定一个矩阵 $A\in F^{n\times n}$，反之如何？有以下结论.

定理 2 设 $\dim V=n$，e_1，…，e_n 为 V 的一组基，任取 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in F^{n\times n}$，则有且仅有一个线性变换 $T\in L(V,V)$，使其矩阵恰为 A.

证明概要 $\forall x\in V$，$x=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j e_j$，令 T：$V\to V$，$Tx=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\xi_j a_{ij}e_i$. 不难验证，1）$T$ 是 V 上的线性变换；2）在 e_1，…，e_n 基底下的矩阵恰为 A.

推论 $L(V,V)$ 与 $F^{n\times n}$ 之间存在一一对应关系.

我们看到，抽象的线性变换可以用具体的矩阵形式表示，故具有几何意义的线性变换可以转化为代数形式或矩阵来研究.

命题 $L(V)=L(V,V)$ 是线性空间，引入 $L(V,V)$ 中的运算：

$$(T_1+T_2)x\triangleq T_1x+T_2x,\forall T_1,T_2\in L(V,V);$$
$$(\lambda T)x\triangleq\lambda Tx,\ \lambda\in F,x\in V.$$

易验证 $L(V,V)$ 是 F 上的一个线性空间，即线性变换空间，可断言 $L(V,V)$ 与 $F^{n\times n}$ 之间不仅有一一对应关系且有完全相同的代数结构．先有：

定义 3 设 V，W 是 F 上的线性空间，若存在 f：$V\to W$，满足：

1）f 是一一到上（双射）映射，

2）f 保持运算，即 $\forall\lambda$，$\mu\in F$，x，$y\in V$，有 $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$，

则称 V 与 W **是同构的**，记为 $V\overset{f}{\cong}W$.

同构的线性空间具有完全一致的空间结构及各种运算律，故同构的空间视为一个，现在我们可以证明如下.

定理 3 $L(V,V)\cong F^{n\times n}$.

证明 取定 V 的一组基 e_1，…，e_n，由前知

$$\forall T\in L(V,V),\ T(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A,\ A\in F^{n\times n},$$