

升 學 預 備

立體幾何學問題解法指導



上海中華書局印行

513.3

38

幾何學問題解法指導

(立體部)

目次

	頁
1. 空間之線與平面.....	1—44
摘要第一	
問題 1—44	
2. 多面體.....	45—72
摘要第二	
問題 45—68	
3. 旋轉體.....	73—104
摘要第三	
問題 69—100	

2024

幾何學問題解法指導

(立體部)

摘要第一

空間之線與平面之重要定理

1. 通過相交之二直線,僅可作一平面.
2. 相交二平面之交處爲一直線.
3. 從平面上或平面外之一定點,僅可作一垂線於其平面.
4. 一直線成垂線於一平面上之相交二直線,必成垂線於其平面.
5. 從平面上—垂線之足,至其平面上任意一直線作垂線,則自其交點至第一垂線作任意之直線,必成垂線於此平

面內之直線。

6. 兩平行線之一垂直於一平面,則他線亦垂直於同平面。

7. 在一平面上之直線,正射影必爲直線。

8. 含有公共垂線之二平面,必互相平行。

9. 平行二平面若截第三平面,則交線必互相平行。

10. 折四角形爲二平面所成。

11. 三面角之任意兩面角之和,大於其他一面角。

12. 凸多面角各面角之和,小於四直角。

空間之線與平面

1. 通過任意一定直線,得作無數平面.

【解】

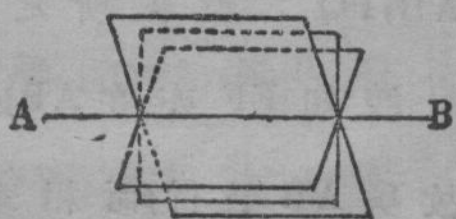
通過 AB 一定直線,得作無數平面.

【證】

任意取一平面,於其平面

引一直線,令與定直線

AB 重合,然後以 AB 爲軸



轉其平面,則凡所占之位置,均爲通過直線 AB 之平面.故題云云.

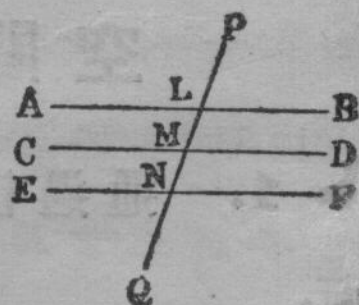
2. 有諸直線,互爲平行,而相交於其他之一直線上,則此等直線均在同一平面上.

【解】

$B, CD, EF, \dots$ 互爲平行之直線,與 PQ 直線相

交，則 $AB, CD, EF, \dots$ 等直線，均在同一平面上。

【證】



令 PQ 與 $AB, CD, EF, \dots$ 之交點

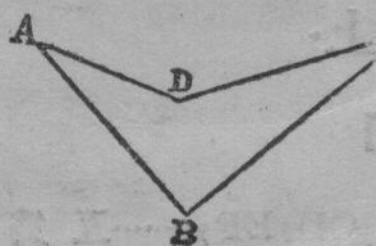
為 $L, M, N, \dots$ 。因 $AB \parallel CD$ ，得以決定一平面。然 L, M 各在直線 AB, CD 之上，即在 AB, CD 所定平面上。因知直線 PQ 亦在其平面上。換言之， CD, AB, PQ 二直線所定之平面上。

同樣知 EF 亦在 AB, PQ 二直線所定之平面上。故與 AB 平行，而相交於 PQ 之各直線，均在 AB, PQ 二直線所定之平面上。故題云云。

3. 可作各邊不在同一平面內之！
邊形否？

【解】

先任意取三點 A, B, C ，次取此三點所決定平面之外之一點 D ，而後聯結 AB, BC, CD, DA



閉折線。然 D 點不在平面 ABC 之上，則四邊形 $ABCD$ 之各邊不能在同一平面。故各邊不在同一平面上，亦得作四邊形。

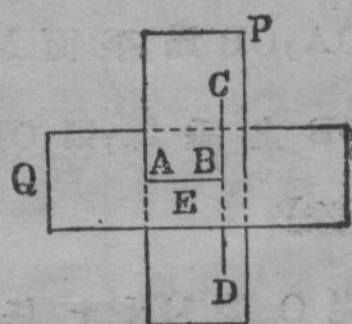
4. 兩平面相交為一直線。

【證】

設 P, Q 為二平面， AB 為其相交之一直線。

【證】

先從其交線上取一點 A ，次從平面 P 上取二點 C, D （此



C, D 點須在平面 Q 反對之側)，連結 CD 直線，則過 C, D 有無限平面，在 Q 之異側，而直線 CD 必交平面 Q ，令其交點為 B 。此 C, D 二點在平面 P 上，故直線 CD 亦在其平面 P 上（平面定義），由是知 B 在平面 P 上。然 A, B 二點同在平面 P, Q 之上，故 AB 為二面公共之直線，而二面公共之點，不在此直線 AB 之外。假令此外再有一公共點 E ，則二平面 P, Q 共有直線 AB ，及此

線外之點 E , 則此二平面不可不相合 (通過一直線及此直線外之一點, 只能作一平面故也). 是與題相反, 故題云云.

5. 一直線成垂線於一平面上之相交二直線, 必成垂線於其平面.

【解】

OA, OB 爲平面 MN 上之相交二直線, OP 爲 OA, OB 之垂線, 則 OP 爲 MN 之垂線.

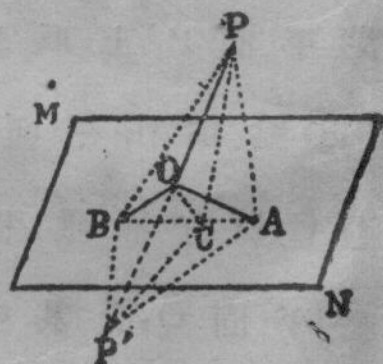
【證】

從 O 於 MN 上任意引一直線

OC , 引長 PO 至 P' , 令 $OP' = OP$,

而 AB, OC 之交點爲 C . 連結

A, B, C 於 P 及 P' .



由是 $OP = OP', OA \perp PP'$, $\therefore AP = AP'$.

仿此 $BP = BP'$, 又 AB 爲公共邊.

$\therefore \triangle APB \equiv \triangle AP'B$, $\therefore \angle PAB = \angle P'AB$,

即 $\angle PAC = \angle P'AC$, 又 AC 爲公共邊.

由是 $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$, $\therefore PC = P'C$,

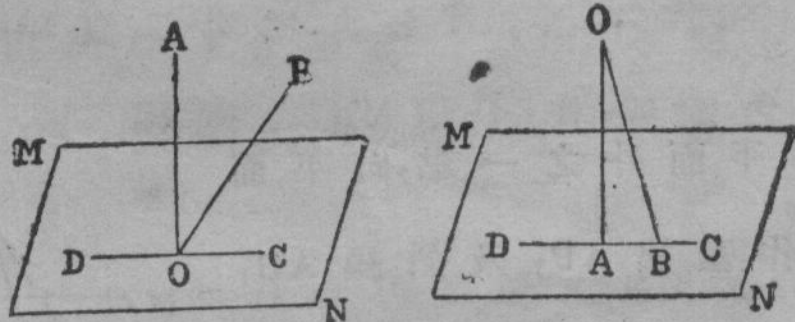
且 $PO = P'O$, $\therefore PP' \perp OC$, 即 $OP \perp OC$.

$\therefore OP \perp MN$.

✓ 6. 從平面上或平面外之一定點, 僅可作一垂線於其平面.

【解】

MN 爲一平面, O 爲一定點, 則從 O 僅能作一垂線於 MN .



【證】

OA 爲 MN 平面上之垂線, 若 OA 之外, 可作其他垂線 OB 於此平面上. 然通過 OA, OB 僅能作一平面, 且與 MN 平面相交必爲一直線 DC . 由是 OA, OB 同成垂線於 DC , 與平面幾何所說從直線上一點, 祇能作一垂線於此直線上之理不合. 故題云云.

從平面外之點, 僅可作一垂線於其平面, 亦可

同樣證明。

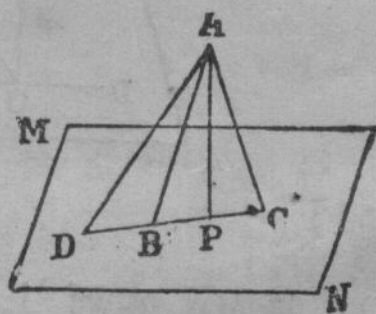
7. 從平面外一點，向其平面作垂線，及諸斜線，此各線中，以垂線為最短，其斜線之長短，視其足及垂線足之距離以為斷，即距離相等，則其斜線亦相等；距離小或大，則其斜線為短或長。

【解】

A 為平面外之一點，向平面 MN 作垂線 AP，及斜線 AB，AC，AD……。

題言 $AP < AB$ ，而 $BP = PC$ ，則

$AB = AC$ 。又 $DP > PC$ ，則 $AD > AC$ 。



【證】

$\because AP \perp \text{面 } MN, \therefore \angle APB = \angle APC = \angle R$ ，而 $\angle PAB$ 及 $\angle PCA$ 任何亦均小於 $\angle R$ 。 $\therefore AB > AP$ 。

而 $BP = PC$ ，又 $\angle APB = \angle APC = \angle R$ ，AP 為共有邊。

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle APC, \therefore AB = AC$ 。

又 $DP > PC$,

因知 $AD > AB$. $\therefore DP > BP$,

✓ 8. 從三點 A, B, C 至相等之距離取一點 P , 則 P 點必在通過 $\triangle ABC$ 之外心 O 而垂直於其平面之直線上.

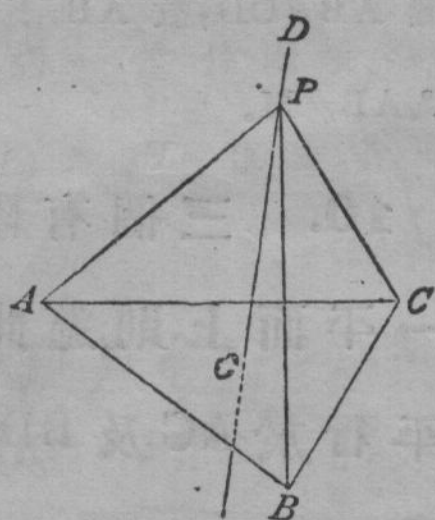
【證】

過 P 點引直線 DO' , 令垂直於 ABC 平面上, 其足爲 O' , 因 $PA = PB = PC$, 故

$$AO' = BO' = CO'.$$

是 O' 爲 $\triangle ABC$ 之外心, 必與 O 重合.

故知 P 點, 必在過 O 點而垂直於 ABC 之直線 OD 上.



9. 有兩平行直線, 若過其一直線作一平面, 則此平面不與其他之一直線相合, 必與之平行.

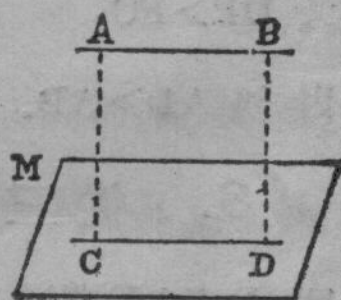
【解】

$AB \parallel CD$, M 爲過 CD 而不含 AB

之任意平面, 則 $AB \parallel M$.

【證】

$\because AB \parallel CD$,



$\therefore AB, CD$ 在同一平面 $ACDB$ 之上, 而 $ACDB$ 與 M 相交爲直線 CD , 若直線 AB 交平面 M , 則其交點不可不在直線 CD 之上。

然 $AB \parallel CD$, 故 AB 不交於平面 M .

$\therefore AB \parallel M$.

✓10. 三個有限直線 AB, BC, CD 不在同一平面上, 則過此三直線中點之平面, 必平行於 AC 及 BD .

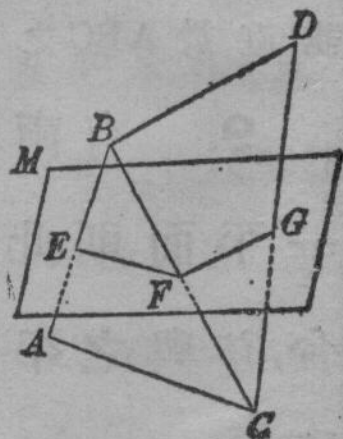
【證】

令 AB, BC, CD 之中點爲 E, F, G ,

此三中點所定之平面爲 M .

則 $\triangle BAC$ 之 E, F 爲二邊 AB, BC

之中點。



$\therefore EF \parallel AC$, 同樣 $FG \parallel BD$.

而 M 任何亦不含 AC , 若含 AC 則 AB, BC 在平面 M 上, 且 FG 亦在平面 M 上, 以 C, G 在 M 上, 因之 CD 亦在 M 上.

然 AB, BC, CD 不在同一平面 M 之上, 是與假設相反.

$\therefore M \parallel AC$, 同樣 $M \parallel BD$.

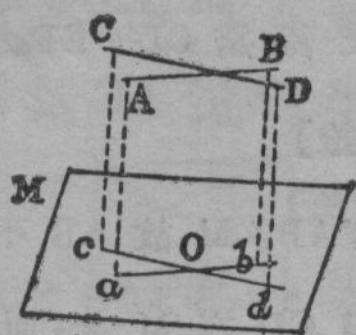
11. 通過一定點, 得作一平面與空間之二直線平行.

【解】

O 爲定點, AB, CD 爲空間二直線, M 爲過 O 點而平行於 AB 及 CD 之平面.

【證】

先從定點 O , 及定直線 AB 所定之平面上, 作 $aOb \parallel AB$, 次從定點 O 及定直線 CD 所定之平面上, 作 $cOd \parallel CD$.



因 aOb, cOd 所定之平面為 M .

故 M 通過 aOb , 且平行於 aOb 之平行線 AB . 同樣知 M 通過 cOd , 且平行於 cOd 之平行線 CD . 故題云云.

12. 設有一直線與一平面平行, 則通過該直線, 可作無數平面, 與該平面相交, 而其交線互為平行, 且與原直線平行.

【解】

AB 為一直線, M 為一平面.

題言 $AB \parallel M$, 則 CD, EF, GH 各

交線為 $CD \parallel EF \parallel GH \parallel AB$.

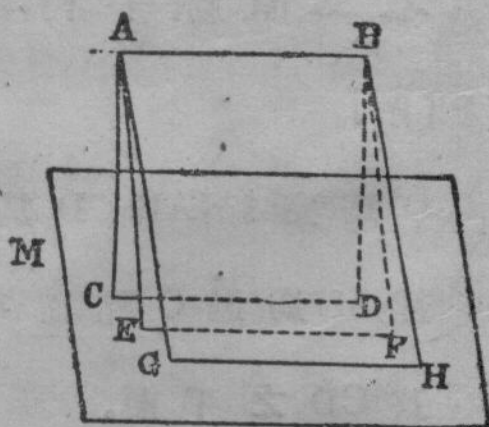
【證】

$\because AB \parallel M$, 故 AB 不交於 M .

因 CD 在 M 上, 而 AB 不能交於 CD . 且 AB, CD 在同一平面 AD 上.

$\therefore AB \parallel CD$. 同樣 $AB \parallel EF, AB \parallel GH$.

$\therefore AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$.



✓ 13. 三平面一般相交於一點,然其特別之形狀如何?

【證】

P, Q, R 爲三平面.

P, Q 之交爲 AB ; P, R 之交爲

CD ; Q, R 之交爲 EF , 則 AB, CD 在

同一平面上,故 (I) 一般此二

直線相交,其交點爲 A . 然 A

爲 P, Q 之交線 AB 上之點,則 A 爲 P, Q 上之點;

又 A 爲 CD 上之點,則 A 亦爲 R 上之點,由是 A

在 P, Q, R 上,而此三平面除 A 以外無公共點.

因 P, Q 上之公共點不可不在 AB 之上; P, R 上

之公共點不可不在 CD 之上;故 P, Q, R 之公共

點,必在 AB, CD 之公共點上.然

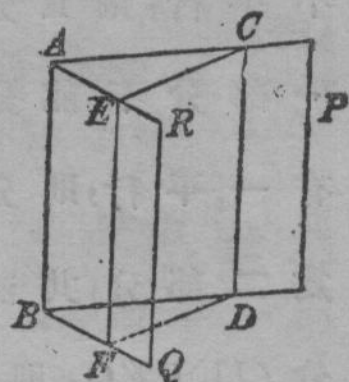
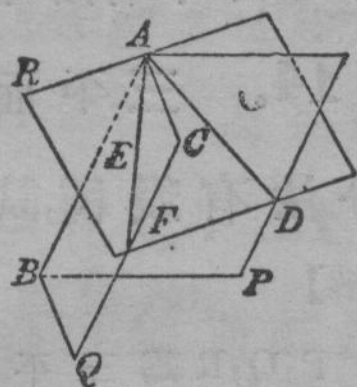
二線相交,只有一點,故一般三

平面相交於一點.若其特別之

形狀, (II) $AB \parallel CD$, 則 AB, CD 不相

交,故 P, Q, R 無公共點, $EF \parallel AB$

亦同樣也. (III) AB 與 CD 重合,則三平面同過一



直線，有無數公共點。(IV) $AB \parallel CD$ ，而 $R \parallel Q$ ；則三平面亦無公共點。(V) $R \parallel Q$ ， $Q \parallel P$ ，則 $P \parallel R$ ，即三平面互為平行，亦無公共點。

14. 三平面可分空間為幾部分，而其分法有幾種，試舉各種之形狀以對。

【解】

令 P, Q, R 為三平面，先取 P, Q 二平面考之，一般為一直線相交，令此交線為 XY ，則 P, Q 分空間為四部分；次就第三平面 R 之位置考之，一般令 XY 與 R 相交，由是 R 分 P, Q 所分之四部分為八部分矣。

特別 (I) P, Q 相交， $R \parallel XY$ 。(甲) R 與 P, Q 任何亦不平行，則 R 分前所分之三部分各為二部，有一部分不能分，共計七部。(乙) R 與 P, Q 任何亦有一平行，則分前所分相隣之二部分又各分為二部分，共計六部分。(丙) R 過 XY 亦分為六部分。(II) $P \parallel Q$ ，則 P, Q 分空間為三部分，由是 R 與之相交，則分空間為六部分矣(與乙同)。若 R 各

與 P, Q 平行,則前所分中有一部分又分爲二部分,共計四部分。

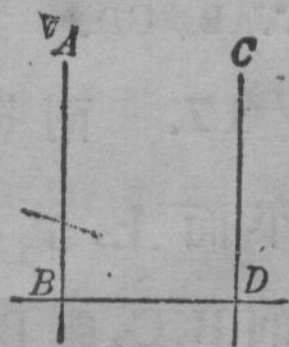
15. 設空間有二直線俱垂直於第三直線,則此二直線互爲平行否?

【證】

二直線 AB, CD 俱垂直於第三直線 BD 。

然 AB 因垂直於 BD , 故在過 B 而垂直於 BD 之平面上。

同樣 CD 在過 D 而垂直於 BD 之平面上。



由是 AB, CD 各在一平面上,均得爲 BD 之垂直線,然與此相類之直線有無數存在,故 AB, CD 不能恆爲平行,有時 AB, CD 在同一平面上,則 $AB \parallel CD$, 是其特別之例。

✓ **16.** 設有兩平行平面,均交於第三平面,則其交線互爲平行。

【證】