漢譯

范氏大代數

田長和譯

北平華鐵書局印行

漢譯

范氏大代數

曲長和 譯

東安市場
北平 華盛書局 發行
楊梅竹斜街
中華印書局

漢譯范氏大代數

全一册　精裝大洋二元六角　平裝大洋二元四角

譯者　田長和

發行者　北平東安市場　華盛書局　電話東局四一七一

印刷兼發行者　北平前外楊梅竹斜街　中華印書局　電話南局一六七三號

中華民國二十四年七月初版

目　　錄

第一編　數

第二編　代數

大代數

第一編　數

I. 自然數——數法，加法及乘法.

物羣及其基數

物群.　在日常經驗，物之呈現於吾人之目者，非僅單體，常集合而成羣(Group)或集團(Assemblage)也. 1

手指，牛群及多邊形之角項皆物群之例.

吾人區別物與物時，非各自而團體，將其集合使其在吾人之意識中，成爲單身物體(A single object)，此時吾人設想某物結合而成群.

吾人爲方便起見，稱結合成群之物，爲群之元素(Elements).

等群.　一一對應.　今有字母 A B C 及 DEF 兩群，有如此關係，吾人可將一羣中之各元素，與他羣中者，一對一匹配成偶，如配 A 與 D，B 與 E，及 C 與 F 是也. 2

無論何時，兩群中之各元素，能如此匹配者，則稱二羣相當(Equivalent)；如此匹配之方法，稱爲使二羣成一對一或一一對應(One to one correspondence)之關係.

3 **定理．** 設二群皆相當於同一之第三群，則二群相當．

蓋由假設，吾人能令每群中之各元素與第三群中者，成一一對應故也．但若將兩群中同與第三群中之一元素相匹配者視爲配偶，則兩群中之各元素，又一一對應矣．

4 **基數．** 吾人想像所有之物羣，分配成爲等羣類，任已知二羣，屬於同類或異類，以能否令其成爲一一對應而定．

例，A B C D 及 E F G H 之二字母羣，則屬於同類，A B C D 及 E F G 之二羣，則屬於異類．

遍一類諸羣，及區別一類各羣與他類各羣之性質，即羣中之物數（Number of things），或基數（Cardinal number）．易言之，

一羣中之物數，或其基數，乃本羣及與本羣成一一對應之其他各羣之通性也．

或曰："物羣之基數者，乃重排羣中之物或一一換置他物，該羣依然不變之性質也"；或又曰，"基數者，與物體本身之特徵，及其在羣中之排列，均無關之性質也"．

蓋由 §2，任意排列羣中之物，或以他物將其一一替換，不過將一羣變爲一等羣而已．此種變換，羣中依然不變之性質，必與物之特性及其排列均無關者也．

部分　設第一羣之元素爲第二羣之若干，而非其全部，則稱之爲第二羣之一部 (Part)。 5

例，ABC 羣爲 ABCD 羣之一部。

由此定義，遝得

設三群中之第一羣爲第二羣之一部，第二羣爲第三羣之一部，則第一羣亦爲第三羣之一部。 6

有限羣及無限羣．　若一羣(或集團)不等於其自身諸部之一者，則稱爲有限(Finite)；若等於其自身諸部之一者，則稱爲無限(Infinite)*。 7

例，ABC 爲有限羣；以其不能與 BC 或他任意之部，成一一對應故也。

但任意無終之連續記號或符號，如無終續數 1, 2, 3, 4, …，則爲無限集團。

例，吾人可使全集團 1, 2, 3, 4, …，與首爲2之部，成一一對應之關係，即

於　　1, 2, 3, 4, 5, …,　　(a)

與　　2, 3, 4, 5, 6, …,　　(b)

之中，配(a)中之1與(b)中之2，(a)中之2與(b)中之3，等一一於(a)中任選一數，則(b)中有一數與之相應。

因此集團(a)等於其部分(b)。故(a)爲無限。

大小基數．　設M及N表任二有限羣，則必合下列情形。 8

1. M 與 N 相等，

或　2. M 等於 N 之一部，

或　3. N 等於 M 之一部。

* 自然，實際不能一一計算無限羣 —— 普通稱集團，之各元素。若一定理，能使吾人示出每已知物之是否屬於集團，則此集團視爲已定。

第一種稱 M 與 N 有同一之基數，§4，或相等之基數；第二種則稱 M 之基數小於 N 者；第三種則稱 M 之基數大於 N 者.

如，M 為字母 a b c 之羣，N 為 d e f g 之羣，則 M 等於 N 之一部.如 d e f.

故 M 之基數小於 N 者，亦卽 N 之基數大於 M 者也.

9 **註.** 由 §7 有限羣之定義，於上述"等""較大"及"較小"之關係，已無疑義.

如，定義不能使 M 之基數等於而又小於 N 者，蓋此之謂 M 等於 N 而復等於 N 之一部者也，如是，則 N 等於其自身之一部 §3，故 N 為無限，§7.

10 **推論.** 設三基數之第一小於第二，第二小於第三，則第一亦小於第三.

如 M,N,P 表任意之物羣及其基數，M 等於 N 之一部，N 等於 P 之一部；故由 §§3，6，M 等於 P 之一部.

11 **基數系.** 自一元素之羣，逐次"加"一新元素，則得下列之基數表：

1. 僅一元素之羣，如 1，之基數.
2. 加一元素於第一種羣，而得之羣，如 11，之基數.
3. 加一元素於第二種羣，而得之羣，如 111，之基數.
4. 由此類推，以至無窮.

將逐次之基數，名為"一""二""三"……並以符號 1，2，3，… 表之.

12 **此系之觀察.** 吾人稱有限羣之基數為有限基數 (Finite Cardinal)，並將上述之基數表，作下列之觀察：

第一. 表中之一一基數，均為有限.

蓋1羣爲有限，以其無一部與之相等者§7；加一物於有限羣，而得之羣，仍爲有限，故一一次羣皆爲有限*．如，1爲有限，因之而11爲有限；11爲有限，因之而111亦然；餘類推．

第二．　每有限基數，均含表中．

由定義，蓋每有限基數，均爲若干有限羣之基數也，如M．但吾人可以一記號而代任有限羣M中之一物，而構成一記號羣111…1以與M相當．而此記號羣，必有一最後之記號，故含於§11之表中，如若不然，則其將無止境，由§7，羣之本身，因之而M，將爲無限矣．

第三．　基數無二相等者．

此由§8之定義知之．蓋如上之所述，一切諸羣1，11，111，…均爲有限；且每二羣，其一爲其他之一部，此亦不待言者．

*今證之如下(G. Cantor, Math. Ann, Vol. 46, P. 490)：

若M爲有限羣，e爲一物，則加e於M而得之Me羣，仍爲有限。

蓋設$G \equiv H$，表G，H二羣相等。

若Me不爲有限，則由§7，必等於其一部。

今令P表此部，如此則$Me \equiv P$矣。

(1) 設P不含e。

令f表P中之元素，與Me中之e配偶者，而P中之餘部，則以P_1表之。

則$M \equiv P_1$，以$Me = P_1 f$與$e \equiv f$故也。

但此不能，因M爲有限，P_1者，M中之一部也，§7。

(2) 設P含e。

P中之e與Me之e相匹配，則不可，蓋如此，則P之餘部一M之一部一與M相等矣。

設P中之e，與某他元素相匹配，如Me中之g，而Me中之e，與P中之f相匹配。

若此假設，$Me = P$爲眞，必也吾人重結合元素e，f，g，使P中之e與Me中之e相配，P中之f與Me中之g相配亦爲眞，但如上之證，P之一部與M相等矣，故此種假設，亦不可能也。

自然數列．方程式與不等式．

13 **自然數．** 茲稱符號 1, 2, 3,…—或其名“一”,“二”,“三”.…—爲正整數,或自然數(Natural Numbers).故 自然數者,代基數之符號 (Sign or Symbol)也.

14 **自然數列．** 依 §11 所賦基數之次序,以排列代表基數之數,則得無終之記號組 1,2,3,4,5,…,或“一”,“二”, “三”, “四”,“五”,…, 此所謂自然列數(Natural Scale) 或自然數之數列.

15 數列中之每記號,表其限制數列之部, 其中記號數也.

如, 4 表記號 1, 2, 3, 4, 之數. 蓋記號 1, 2, 3,4 之數,猶如羣 1, 11, 111, 1111 之數也,而羣之數,復猶如末羣,1111,中之記號之數也,§8.普通亦然.

16 **數列之有序性．** 自然數列, 其本身不過爲相異符號(Different signs) 之一集團而已,其中有發端之符號,如 1;於此而有次之確定符號,即 2;依次復有再次之符號,即3;以此類推,而至無窮.

易言之, 自然數列, 爲不同符號之一集團, 不過此種符號,有始無終,其相互之位置, 有確定及明了之次序而已.

由此觀之,自然數之本身,僅爲有序之記號, 即敍述數列時,其出現之次序(以時間而論)也.

17 數列猶如他種集團, 其元素之按已知而確定之次序排列者,顯然有下列之性質:

1. 稱任意之二元素，一在"前"，一在"後"；其"前"，"後"二字在元素中任一對之意義，與在任意他對中者，完全相同。

2. 若任與二元素，則恒能定其孰前孰後。

3. 若 a，b，c 為任意三元素，而 a 先於 b，b 先於c，則 a 先於 c。

已知之集團，有已俱上述之性質者，有選擇其排列方法，而使之俱上述之性質者。無論何者，均稱集團為有序系 (Ordinal System)。

第一種之例為(1)自然數列之本身；(2)某時代之相繼事件；(3) 自左而右，沿水平線而排列之点行。第二種之例為依姓名之字母次序而排列之人羣。

集團中之元素，亦有"相合"者。如兩個或多個事件之 18
同時發生者是也。

若集團中之元素，其"不相合"而能適合1，2，3之關係者，則稱之為有序 (Ordinal)——其相合者，則適合

4. 若 a 與 b 相合，b 與 c 相合，則 a 與 c 相合。

5. 若 a 與 b 相合，而 b 又在 c 之前，則 a 在 c 之前。

自然數者，以其在數列中之相對次序 (Relative 19
Order in the scale)而示基數之大小關係者也。

蓋任二已知之基數，其自然數在數列中出現較後者，則較大故也。

"若三基數之第一小於第二，第二小於第三，則第一亦小於第三"，此種關係，在數列中則以"a 先於 b，b先於 c 則 a 先於 c"之關係以表之。

實際比較基數時，此方法外，殊少應用．吾人不用§8之法，直接比較物羣之基數．反而言之，吾人可以適當之自然數以表之，且以自然數在數列中出現之相對次序而推知其孰大孰小，此方法頗省吾之思維，蓋數列深入吾人之惱，是以二自然數，一經談及，立知其孰前孰後．如，當吾人談A，B二城，A城之人口爲120,000，B城爲125,000，則立即斷定B城之居民較A城爲多，因在數列中，知125,000之出現較120,000爲後也．

20　**數字方程及不等式．** 由§13，字"數"者，自然數之謂也；而文字a，b，c則表此任意之數．

21　欲示a與b在數列中，所表之數相同，或"相合"，則表之以方程式(Equation)

$$a=b,\quad 讀爲\quad “a等於b”.$$

22　然欲示在自然數列，a在前而b居後，則表之以不等式(Inequalities)之一

$$a<b,\quad 讀爲\quad “a小於b”;$$

$$b>a,\quad 讀爲\quad “b大於a”.$$

23　嚴格而論，"等"，"小"，"大"，諸字，自然非謂符號a，b之本身，而謂其所表之數也．如"a小於b"一語，不過爲"a所表之基數小於b所表之基數"之簡稱而已矣．

而不等式$a<b$於符號a，b本身之意義，左不過在數列中a先於b而已．

24　**等式及不等式法則．** 由§§17，18與§§21，22之定義，逕得

1．若$a=b$，$b=c$，則$a=c$．

2．若$a<b$，$b<c$，則$a<c$．

3．若$a=b$，$b<c$，則$a<c$．

數　法

算術者，　自然數間存在之原有關係，與將其結合所用之演算之初步討論也． 25

算術之演算以數法（Counting）爲基礎．

數法．　擬知物羣之基數，則數此羣． 26

此尋常之法也．將一物標"一"，次物標"二"，依此而進，至物窮而後至——依口述數記號"一"，"二"，…，在數列中出現之順序，幸勿遺漏，而愼用之，但物之本身，可依適宜吾人之順序而選擇之；其用以終止此種程序之符號（或標幟），乃吾人所求者也——即物羣之基數之名稱（Name）．由 §15，數列之有序性，末一記號，表共用記號之若干，以是知羣中之物爲多寡也，§8．

數法之程序，可視爲令計算之羣，與自然數列之一部——始自"一"，而止於數法所用之最末數——，成一一應對也，§2．

考自然數在數法中，有兩種意義：(1)僅用某羣，爲數碼，以完成此運算，(2)以最末數錄計算之結果．

在撰擇彼時，依任何順序，均無關係，已於無形中暗示之矣．茲證之如下：

定理．　計算有限物羣時，無論選物之任何順序，結果均同． 27

例，設物依一順序 P，撰擇，羣之計算結果爲99，依他順序，Q，撰擇，結果爲97．

則物羣之含前 97 物順序爲 P 者，將與全物羣之順序爲 Q 者相等矣，由 §3，按假設，以其各與自然數列之前 97 數相配也．

但此不能，蓋如此，則羣之一部將與其全部相等矣；而由假設，知羣爲有限者也，§7．

28 基數之新定義． 上述定理，可爲有限羣之基數定義之基礎也，即：

有限羣之基數者，即以任何順序，將羣數之，皆得相同之自然數之性質也．

若擇自然數列，如 §16 所定者，爲吾人討論數之起点，則此基數定義，自然而得之矣．

加 法

29 加法定義． 加 3 於 5 者，乃於自然數列中，求居 5 後之第三位者，何數也．

此數，8，可於數列中，自 6 起，向後數三數而得之．

此種演算，以記號 + （讀爲“加”）表之，書爲 $5+3=8$．

總之，加 b 於 a，即於自然數列中，求居 a 後之第 b 位數．

以數列之無末記號也，故此數恒能求之．吾人稱此數爲 a，b 之和（Sum），且以 a，b 之式 $a+b$ 表之．

30 註． 求 $a+b$ 之法，乃於數列中，向後計算，將 b 物之羣，每次一個，一步步加於 a 物之羣也．故（1）最後之結果，爲 $a+b$ 物之羣，§8，（2）若 a 與 b 皆表定基數，則 $a+b$ 仍之． 參看 5 頁底註．

因 $a+1$, $a+2$, 等, 表 a 後之第二,第一,等等數,故續數 $a+1$, $a+2$,… 表a後數列之全部. 31

故a後之任已知數, 可以 $a+d$ 表之,而 d 者一確定之自然數也.

方法. 用數法而加大數, 則異常繁冗. 故吾人需記憶小數之和(加法表),並應用下列各節所謂之"加"法定律,而導出大數之和. 32

加法定律. 加法爲"交換"及"結合"之演算, 即遵循下列二定律: 33

交換律. $a+b=b+a$ 34

加 a 於 b, 與加 b 於 a, 結果相同

結合律. $a+(b+c)=(a+b)+c$, 35

先加 c 於 b,以所得之和復加於 a,與先加 b 於 a,次加 c 於所得之和,結果相同.

註. 實際,吾人以$a+b+c$ 式代 $(a+b)+c$, 而 $a+b+c+\cdots$ 式之表加 b 於 a, 加 c 於所得之和, 等等.不言而喻. 36

諸定律之證明. 茲證明諸定律如下. 37

第一. 交換律: $a+b=b+a$.

如, $3+2$ 與 $2+3$ 之和相等.

因在自然數列中,$3+2$乃表先度 3 ,再度 2 之數.如,

所數之群　　1,2,3,　4,5,　　(a)

其數碼爲　　1,2,3,　1,2,　　(b)

但(a)與(b) 之記號群間,有一對一之關係,且由 §2 每一對一之關係必爲交互,者故吾人可互換(a),(b)之任務;即設 (b) 爲所數之群,則 (a) 將表數碼之羣.

所以,求$3+2$ 即相當於數記號之群

1,2,3,　1,2.　　(b)

同法求 $2+3$ 即相當於數群

1,2,　1,2,3.　　(c)

似 (b),(c)所含記號相同,而所異者,不過諸記號之排列形式,故由 §27 其數法之結果相同,即

$$3+2=2+3.$$

任意二自然數 ,a 及 b, 之數法,其理相同.

第二. 結合律: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

因於 a 後數至第 b 記號，即$(a+b)$，然後再數至第c記號，即 $(a+b)+c$，吾人共數 $b+c$ 記號可也，故於 a 後數至第$b+c$記號而已，即 $a+(b+c)$。

基數之義意含於上列證明之中，但加法及其定律，可不依此意義而求其證，茲以下列底註證之。*

*意大利之數學家皮偶氏 (Peano) 不藉基數之意義，而籍一組之"假定"，如下之所述者，已定自然數系—凡"數"均係"自然數"

1. 記號 I 爲一數。

2. 每數 a 之後，必有數存在—稱之爲$a+$，

3. 數 $a+$ 永不爲 1。 4. 設 $a+=b+$，則 $a=b$。

5. 每已知數 a，呈現於續數$1, 1+, (1+)+, \cdots$，之中.

數值,2,3，定爲：$2=1+, 3=2+\cdots\cdots$

$a+b$ 之和係指連續諸公式$a+1=a+$，$a+2=(a+1)+$，………所定之數(由假定5)。

方書之公式組，相當於單一之公式.

$$6.\ a+(b+1)=(a+b)+1$$

由 6 應用"數學歸納法"吾人得加法公式：

$$7.\ a+(b+c)=(a+b)+c. \quad 8.\ a+b=b+a.$$

第一. 若$c=k$時，7合理.則 $c=k+1$時，亦能合理.因由6及7,

$$a+[b+(k+1)]=a+[(b+k)+1]=[a+(b+k)]+1$$
$$=[(a+b)+k]+1=(a+b)+(k+1).$$

但$c=1$時，由6，7合理。

故$c=2$時，7合理，∴$c=3$時，∴…，由5，$c=$任何數時.

第二. 吾人先証 8 之特殊例 $8'.\ a+1=1+a$，

設$a=k$，$8'$合理，則由6，得$(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1)$。

故若 $a=k$ 時，$8'$ 合理，則 $a=k+1$ 時，亦合理.

故若 $a=1$ 時，$8'$ 合理，則 $a=2$時亦合，∴$a=3$，…皆合理。

最後，設 $b=k$，8 合理，則 $b=k+1$，亦合理。因由 7 及 $8'$

$$a+(k+1)=(a+k)+1=1+(a+k)$$
$$=1+(k+a)=(1+k)+a=(k+1)+a.$$

因 $b=1$ 時，8 合理(由$8'$)，故$b=2$時亦合理，∴$b=3$，∴…皆合理。參看 Stolz 及 Gmeiner二氏之數論，13頁以後，及所引皮偶氏說；並參看 Huntington 在美國數學會之報告 (Bulletin of the American Mathematical Soceity) 第九卷，40頁，H.Grassmann (Lehrbuch der arithmetik)首先由 6 得 7 及 8 之證。