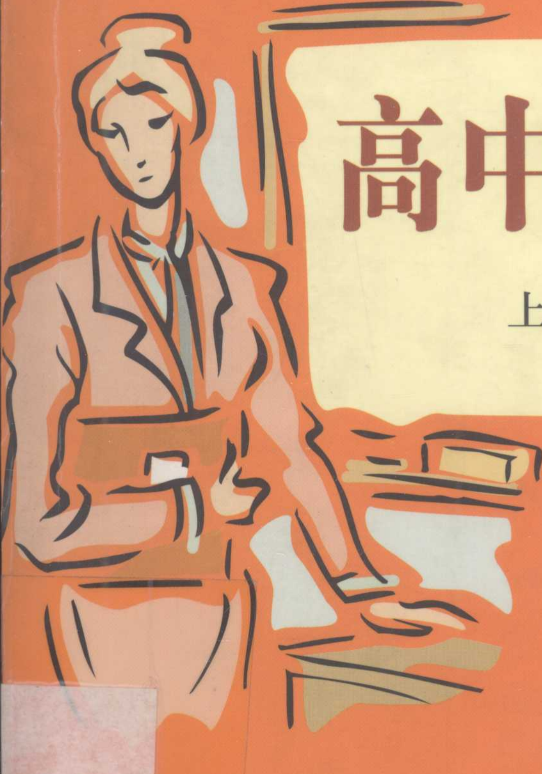

高中应用数学选讲

上海市中学生数学应用知识竞赛委员会 编

復旦大學出版社

高中应用数学选讲

上海市中学生数学应用知识竞赛委员会编

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中应用数学选讲/上海市中学生数学应用知识竞赛委员会编.
—上海:复旦大学出版社,2005.1
ISBN 7-309-04307-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.上…　Ⅲ.应用数学-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 137130 号

高中应用数学选讲

上海市中学生数学应用知识竞赛委员会　编

出版发行　复旦大学出版社
上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65118853(发行部)　86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　梁　玲
装帧设计　马晓霞
总 编 辑　高若海
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　浙江临安市曙光印务有限公司
开　　本　787×960　1/16
印　　张　17.75
字　　数　376 千
版　　次　2005 年 1 月第一版第一次印刷
印　　数　1—5 100

书　　号　ISBN 7-309-04307-3/O·337
定　　价　23.00 元

前　言

随着科技的发展和社会的进步，数学这门历史悠久的学科得到了越来越广泛的应用。无论在科学、工程、经济乃至于日常生活的各个领域，人们到处都会发现数学不可低估的重要作用。

举例来说，我们乘坐的先进、舒适的大型喷气客机的设计就离不开数学：机翼和机身通过分析计算才能确定它们的最佳形状；飞机的结构通过数学严格的校核才能确保有足够的强度；飞机发动机事先要用数学方法对其气动和机械性能进行分析和优化才能确保安全高效地运行、……。整个飞机的设计过程是由一种将数学与计算机相结合被称为计算机辅助设计(CAD)的先进技术完成的。

现代的喷气客机采用了许多高新技术，其中之一是自动着落装置。有了它，飞行员在飞机降落过程中甚至无须接触操纵杆，整个降落过程就会自动、安全地完成。所谓自动着落装置，实际上是一台配备了特殊软件的微型计算机，它接收飞机及周围环境和地面机场的各种信息，通过计算机软件的自动执行，进行分析计算，输出各种信息，控制飞机安全着落。显而易见，计算机软件是自动着落装置的核心。这个软件是根据人们建立的控制飞机着落的数学模型和相应的数学方法研制而成的。

数学除了在以飞机工业为代表的制造业中有着重要的作用外，在国民经济的规划和预测、气象预报和自然灾害预报、宇航工程、交通和物资调配、自然资源的勘探开发等方面以及在自然科学、医学和社会科学的许多领域中都愈来愈显示出举足轻重的作用。这一切促使人们对数学的重要作用有了新的和更加深刻的认识，从而得出我们已进入了“数学工程技术的时代”和“高技术本质上是一种数学技术”的共识。

当前，计算机技术正在飞速地发展着，计算机、特别是微型计算机已经十分普及。计算机的普及为数学的广泛应用提供了有力的工具。另一方面，要充分发挥计算机的作用，计算机的使用者必须具备应用数学知识解决现实问题的能力。在未来的信息社会中，用计算机作为工具，应用数学知识解决实际问题的技能更应当成为劳动者的一项基本素质。

青年同学在完成中学阶段的学业后，无论是进入高一级的学校进行深造，或者踏上社会以自己的劳动为祖国的繁荣进步添砖加瓦，都必须适应这一“数学工程技术”的时代和信息社会的要求，具备应用数学知识解决现实问题的能力。

用数学方法解决现实问题的能力，包括将现实问题归结为一个数学问题(又称为建立数学模型或数学建模)，然后选择合适的数学方法加以求解；对求得的结果用适当的方法进行

验证，最后将结果应用于现实问题；对某些现象加以解释，或作出预测，或用于设计，或控制某个过程等等。这些能力不可能是天生就有的，也不是单纯学习数学的书本知识就能具备的，必须通过反复地训练和实践，树立起用数学方法解决现实问题的强烈愿望和坚定信心，才能促成这方面能力的提高和发展。

本书就是培养学生以应用数学知识解决现实问题能力的一个有益的尝试。它根据中学生的实际知识水平，在几个比较重要的领域里，列举了许多用数学方法解决实际问题的例子，由浅入深地训练学生解决实际问题的能力。本书作为高中学生的课外读物或课外活动的教材，或可弥补当前中学数学教学在这方面训练之不足，对中学教学教育改革起一定的推进作用。

本书又和上海市工业与应用数学学会、上海市青少年科技教育中心联合举办的上海市中学生数学知识应用竞赛有着十分密切的关系。这一竞赛已经成功地举行了十五年，产生了很好的影响。

本书的许多材料都曾在竞赛辅导中应用过，并且还收入了历次竞赛的试题和参考解答，可作为今后竞赛的主要辅导教材。

本书是集体劳动的成果，编写者都是上海各高等院校中在应用数学方面颇有造诣的教授、副教授或对中学数学教育很有研究的同志。他们付出的辛勤劳动一定会产生出有益的成果。

希望本书的出版能进一步激发广大青年同学学习数学的积极性以及利用所学的数学知识为社会主义祖国服务的热情，推动他们的健康成长。

李大潜

2004 年 12 月

目　　录

第 1 章　从最值问题谈起

在实际问题中，常常会碰到各种寻求最合理的方案、最优的效益、最经济的投入和最佳的选择等问题. 这类问题往往可归结为某一目标函数的最值问题，也是高考的重点和热点之一.

由于解决函数的最值问题，涉及的知识面很广，所以对培养学生能力、掌握知识技能、开拓学生视野有很大的作用. 现介绍几种求最值的方法与典型问题.

§1.1　二次函数配方法

方法提要　设二次函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$. 经配方，得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

若 $x \in \mathbf{R}$，则

当 $a > 0$ 时，$x = -\frac{b}{2a}$，$y_{最大值} = \frac{4ac - b^2}{4a}$；

当 $a < 0$ 时，$x = -\frac{b}{2a}$，$y_{最小值} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

若 $x \in [m, n]$，那么分两种情况讨论：

(1) $-\frac{b}{2a} \in [m, n]$，最值在 $x = -\frac{b}{2a}$ 的函数值、端点函数值 $f(m)$ 或 $f(n)$ 中求得；

(2) $-\frac{b}{2a} \notin [m, n]$，两个最值在两个端点值 $f(m)$ 和 $f(n)$ 中求得.

因此，在讨论二次函数最值时，要注意二次项系数 a 的符号和 x 的范围.

例 1　某取暖器厂，经市场调查，当取暖器价格 p 为 200 元时，需求量 Q 为 3 000 台，取暖器价格 p 每提高 20 元，需求量 Q 就减少 500 台；当取暖器价格 p 为 215 元时，取暖器厂的供应量 S 为 3 425 台，取暖器价格 p 每提高 40 元，取暖器厂就多生产并增加供应 280 台. 试问：

(1) 价格 p 为多少时，销售收入 R 最多？

(2) 需求量 Q 为多少时，达到供求平衡？此时的销售收入是多少？

解　(1) $Q - 3\,000 = -\frac{500}{20}(p - 200)$，即 $Q = -25p + 8\,000$，由 $Q > 0$，知 p 的范围是 $0 < p \leqslant 320$.

$\because R = p \cdot Q = p(-25p + 8\,000) = -25(p - 160)^2 + 640\,000$，

$\therefore$ 当 $p = 160$ 时，$R_{最大值} = 640\,000$(元).

(2) $\because S - 3\,425 = \frac{280}{40}(p - 215)$，$\therefore S = 7p + 1\,920$.

当 $Q = S$ 时，$-25p + 8\,000 = 7p + 1\,920$，得到 $p = 190$(元/台)，$Q = 3\,250$(台)，$R = p \cdot Q = 617\,500$(元).

所以，当需求量 Q 为 3 250 台时，达到供求平衡，此时销售收入是 617 500 元.

例 2 某宾馆一号楼共有 n 层，二号楼共有 3 层，三号楼共有 4 层. 参加国际数学年会的与会人员分别住在 3 幢楼的不同楼层内. 现在从一号楼、二号楼、三号楼的每层指派 1 人共 $n+7$ 人集中到一号楼的第 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 层开会，k 为何值时，$n+7$ 位与会人员上、下楼所走的路程总和最少？(假定相邻两层楼梯的长度都相等，二号楼、三号楼到一号楼之间的距离不计)

解 在一号楼的 n 位与会人员中，上楼到第 k 层的有第一层至第 $k-1$ 层的与会人员. 上楼的层数之和为：$S_1 = 1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{1}{2}k(k-1)$.

在一号楼的 n 位与会人员中，下楼到第 k 层的有第 $k+1$ 层至第 n 层的与会人员.

下楼的层数之和为：$S_2 = 1 + 2 + \cdots + (n-k) = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$.

在二号楼的 3 位与会人员上楼、下楼的层数之和为：$S_3 = 1 + 2 + 3(k-1) = 3k$.

在三号楼的 4 位与会人员上楼、下楼的层数之和为：$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4(k-1) = 4k + 2$.

所有与会人员上、下楼层数总和为：

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \left(k - \frac{n-6}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(n^2 + 14n - 28).$$

若 $n > 7$，且 n 为偶数时，当 $k = \frac{n-6}{2}$ 时，$S_{最小值} = \frac{1}{4}(n^2 + 14n - 28)$；

若 $n > 7$，且 n 为奇数时，当 $k = \frac{n-5}{2}$ 或 $\frac{n-7}{2}$ 时，$S_{最小值} = \frac{1}{4}(n^2 + 14n - 27)$；

若 $1 \leqslant n \leqslant 7$ 时，当 $k = 1$ 时，$S_{最小值} = \frac{1}{2}(n^2 - n + 18)$.

例 3 (**2000 年全国高考题**)某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从 2 月 1 日起的 300 天内，西红柿的市场售价与上市时间的关系可用图 1-1 的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系可用图 1-2 的抛物线表示.

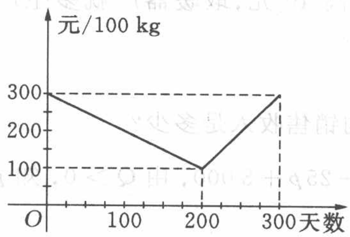

图 1-1

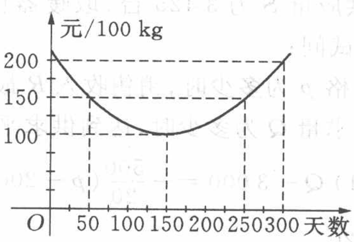

图 1-2

(1) 写出图 1-1 表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$，写出图 1-2 表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$；

(2) 规定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿收益最大？(注：市场售价和种植成本的单位为：元/100 kg，时间单位为：天)

解 (1) 由图 1-1 可得市场售价与时间的函数关系：

$$f(t)=\begin{cases}300-t,\ (0\leqslant t\leqslant 200)\\ 2t-300,\ (200<t\leqslant 300)\end{cases}.$$

由图 1-2 可得种植成本与时间的函数关系为：

$$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,\ 0\leqslant t\leqslant 300.$$

(2) 设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$，则由题意：

$$h(t)=f(t)-g(t),$$

$$h(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{200}t^2+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{175}{2},\ (0\leqslant t\leqslant 200)\\ -\dfrac{1}{200}t^2+\dfrac{7}{2}t-\dfrac{1\,025}{2},\ (200<t\leqslant 300)\end{cases}$$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，$h(t)=-\dfrac{1}{200}(t-50)^2+100$，∴ 当 $t=50$ 时，$h(t)_{最大值}=100$；

当 $200<t\leqslant 300$ 时，$h(t)=-\dfrac{1}{200}(t-350)^2+100$，∴ 当 $t=300$ 时，$h(t)_{最大值}=87.5$.

所以，由 $100>87.5$ 可知，$h(t)$ 在区间 $[0,\ 300]$ 上可以取得最大值 100，此时 $t=50$，即从 2 月 1 日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大.

§1.2 基本不等式法

方法提要 (1) 若 x、y 为实数，则 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ (当且仅当 $x=y$ 时，等号成立).

(2) 若 x、y 为正数，则 $\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$ (当且仅当 $x=y$ 时，等号成立).

可以进行如下的推广：

(1) 若 x、y、z 为正数，则 $\dfrac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$ (当且仅当 $x=y=z$ 时，等号成立).

(2) 若 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 为正数，则 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ (当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立).

(3) 若 x、a、b 为正数,则 $ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}$ (当且仅当 $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时,等号成立).

例 4 如图 1-3,某住宅小区把一块边长为 $2a$ 的等边三角形 ABC 的空地改建为绿地. DE 把绿地分成面积相等的两部分.

(1) 设 $AD=x\ (x\geqslant a)$, $ED=y$, 求用 x 表示 y 的函数关系式;

(2) 如果 DE 是灌溉水管的位置,为了省钱,希望它最短,DE 的位置应该在哪里? 如果 DE 是居民散步的小径,希望它最长,DE 的位置又应该在哪里? 请予以证明.

解 (1) 设$\triangle ABC$ 的边长为 $2a$, D 在 AB 上, $a\leqslant x\leqslant 2a$.

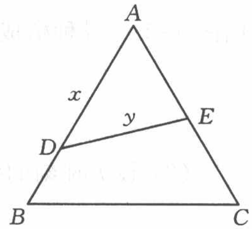

图 1-3

$\because S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, $\frac{1}{2}\cdot x\cdot AE\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2a)^2$, 解得

$AE=\frac{2a^2}{x}$.

$\because y^2=x^2+\frac{4a^4}{x^2}-2x\cdot\frac{2a^2}{x}\cdot\cos 60°=x^2+\frac{4a^4}{x^2}-2a^2$,

$\therefore y=\sqrt{x^2+\frac{4a^4}{x^2}-2a^2}\ (a\leqslant x\leqslant 2a)$.

(2) 令 $x^2=t$, 则 $a^2\leqslant t\leqslant 4a^2$, $y=\sqrt{t+\frac{4a^4}{t}-2a^2}\geqslant\sqrt{2\sqrt{4a^2}-2a^2}=\sqrt{2}a$.

$\therefore$ 当 $t=2a^2$ 时,即 $AD=x=\sqrt{2}a$, $y_{最小值}=\sqrt{2}a$, 此时 $DE\parallel BC$;

当 $t=a^2$ 或 $t=4a^2$ 时,即 $x=a$ 或 $x=2a$, $y_{最大值}=\sqrt{3}a$, 此时,DE 为 AB 或 AC 边上的中线.

所以,如果 DE 是灌溉水管的位置,DE 应该与 BC 平行,且 $AD=\sqrt{2}a$; 如果 DE 是居民散步的小径,DE 为 AB 或 AC 边上的中线.

例 5 (**1997 年全国高考题**)甲乙两地相距 s km,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c km/h. 已知汽车每小时运输成本(单位:元)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度 v km/h 的平方成正比,且比例系数为 b;固定部分为 a 元.

(1) 把全程运输成本 y(元)表示为速度 v (km/h)的函数,并指出这个函数的定义域;

(2) 为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

解 (1) 汽车从甲地匀速行驶到乙地所用的时间为$\frac{s}{v}$,全程运输成本为

$$y=a\cdot\frac{s}{v}+bv^2\cdot\frac{s}{v}=s\left(\frac{s}{v}+bv\right),$$

所以,所求函数及其定义域为 $y=s\left(\frac{a}{v}+bv\right)$, $v\in(0,\ c]$.

(2) $\because$ s、a、b、v 都是正数,

$\therefore s\left(\dfrac{a}{v}+bv\right)\geqslant 2s\sqrt{ab}$，当且仅当 $\dfrac{a}{v}=bv$ 时取等号，此时 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，

若$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$，则 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时，全程运输成本 y 最小.

若$\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$，即 $v\neq(0,c]$ 时，$\because y=f(v)$ 在$(0,c]$上单调递减，$\therefore$ 当 $v=c$ 时取等号，即 $v=c$ 时，全程运输成本最小.

所以，为使全程运输成本最小，当$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$时，行驶速度应为 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，当$\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$时，行驶速度应为 $v=c$.

例 6　甲、乙两个粮食经销店同时在某一个粮食生产基地按同一批发价购进粮食，他们每年都要购粮 3 次，由于季节因素，每次购粮的批发价均不相同. 为了规避价格风险，甲每次购粮 10 000 千克，乙每次购粮款为 10 000 元. 试比较甲乙两经销店哪种购粮方式最经济合算?

解　设 3 次购粮时每千克批发价分别为 a_1，a_2，a_3 元. 甲每次购 10^4 千克时，三次购粮款共 $10^4(a_1+a_2+a_3)$ 元，因此，甲购粮每千克的平均价格为 $\dfrac{10^4(a_1+a_2+a_3)}{3\times10^4}=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ 元. 乙每次购粮用 10^4 元，3 次共用去 3×10^4 元，乙每次购粮分别为$\dfrac{10^4}{a_1}$，$\dfrac{10^4}{a_2}$，$\dfrac{10^4}{a_3}$千克，乙购粮数每千克的平均价格为

$$\frac{3\times10^4}{\dfrac{10^4}{a_1}+\dfrac{10^4}{a_2}+\dfrac{10^4}{a_3}}=\frac{3}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}}.$$

$\because (a_1+a_2+a_3)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}\right)=3+\left(\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_1}{a_2}\right)+\left(\dfrac{a_3}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}\right)+\left(\dfrac{a_1}{a_3}+\dfrac{a_3}{a_1}\right)$

$\geqslant 3+2+2+2=9$（当且仅当 $a_1=a_2=a_3$ 时等号成立），

$\therefore \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}>\dfrac{3}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}}$.

$\therefore$ 乙的购粮方式更经济些.

§1.3　三角函数法

方法提要　设函数 $y=a\sin x+b\ (a\neq0)$.

(1) $a>0$，

当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{最大值}=a+b$;

当 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ 时，$y_{\text{最小值}} = b - a$；

(2) $a < 0$，

当 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ 时，$y_{\text{最大值}} = b - a$；

当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ 时，$y_{\text{最小值}} = a + b$.

对于函数 $y = a\cos x + b$ 也可进行类似的讨论.

例 7 某汽车零件厂为了提高生产效益对生产工艺进行革新.在生产中有一道工序是从一块小于半圆的扇形钢板上切割出一块矩形钢板，那么应该如何安排切割方案能使余料最小？

解 设扇形 OAB 的半径为 R，中心角为 2α.

(1) 当中心角小于直角时，如图 1-4，设 $\angle BOD = \theta$，则

$$S_{CDEF} = DE \cdot EF = R\sin\theta \cdot \frac{R\sin(2\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha} = \frac{R^2}{2\sin 2\alpha}[\cos 2(\alpha - \theta) - \cos 2\alpha].$$

当 $2(\alpha - \theta) = 0$，即 $\theta = \alpha$ 时，S_{CDEF} 有最大值 $\frac{R^2}{2}\tan\alpha$.

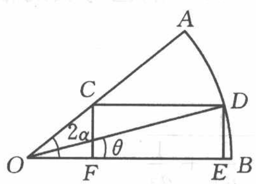

图 1-4

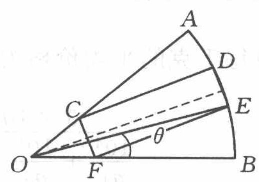

图 1-5

或者，如图 1-5，设 $\angle EOB = \theta$，则

$$S_{CDEF} = DE \cdot EF = 2R \cdot \sin(\alpha - \theta) \cdot \frac{R \cdot \sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{R^2[\cos(\alpha - 2\theta) - \cos\alpha]}{\sin\alpha}.$$

当 $\alpha - 2\theta = 0$，即 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ 时，S_{CDEF} 有最大值 $R^2 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$.

$\because$ 当 $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$，即 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\tan\alpha}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}} > \tan\frac{\alpha}{2}$.

$\therefore$ 当中心角小于直角时，将扇形弧二等分，以等分点为顶点作内接矩形 $CDEF$，再沿其周界切开即可.

(2) 当中心角等于直角时，如图 1-6.