大學叢書

解析幾何與代數

第一冊

許來曷 施伯納著
樊 𰌤 譯

商務印書館發行

馮　序

德自大戰受創後,人人自奮,凡舊日之軍事、政事、工業、商務,莫不一革而新之;至今遂敢發表其軍事宣言,彼豈貿貿然爲之哉?蓋自審其實力已充足也.充實力以何爲本?工業製造也.工業製造以何爲本?科學也.科學又以何爲本?算學也.德自昔以算學著於世界,美、日兩國學者多留學焉.若柏林、葛廷根諸大學皆疇人輩出,名著如林.然猶謂此諸大學皆有數百年之歷史,若漢堡大學則其設立不過十五六年耳.然而算學系中之布拉希克(W. Blaschke)、阿爾丁(E. Artin)亦以其幾何學代數學名震當世.三年前美國芝加哥大學以重金聘布氏,伊因順道東游,歷印度、日本而至北平.我北大、清華兩校既醵金延伊演講,復詢之以發展算學方法.伊即推薦其門人施伯納(E. Sperner)來北大,擔任近世代數及形勢幾何學(Topology).施君出其與許來爲(O. Schreier)合撰之解析幾何與代數一書示余,余受而讀之,覺其所取教材雖與尋常近世代數(如 Bôcher, Dickson, Weber 等)無大出入,而體裁之新穎,論證之精密,則非舊書可比.蓋此書以向量爲工具,乃伊師布氏說微分幾何之最新法,能鎔合代數與幾何於一爐.故以幾何眼光觀之,則成一部嚴密之多元解析幾何學;以代數眼光觀之,則又宛然一部純粹代數學,所謂寓代數於幾何的言辭(Algebra in geometrical terminology)者是也.一方面可使代數有直接之幾何應用,而代數之觀念益明.一方面可使解析幾何有精密之論證而幾何之基礎益固.二者並進,由淺入深,陳義雖高,而所須預備知識不多,眞後學之津梁也.余卽取之以爲北大算學系之教本,不幸施君擔任二

年而歸，我國學子罕精德語，讀之多感困難．余因囑樊君𡒄爲譯成漢文，俾易流傳．樊君曾肄業同濟，深通德語，來此後又從施君學，施君常以高足目之．其譯時遇疑義每得承教於施君，此又吾國嚮來譯書者之所絕無也，其亦足貴矣．譯成余爲之校閱一過，因書此數語於簡首．

公曆一九三五年四月

漢叔序於北京大學

目　次

解析幾何與代數

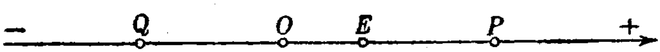
第　一　編

仿射空間　一次方程組

§1.　n 維仿射空間

直線，平面，空間與實數之集合，相互間有密切之關係，此種關係即爲解析幾何學之基礎．故欲論解析幾何學，探本窮源，首宜述此相互之關係．[1]

1.　一維空間（直線）．　設 g 爲一直線（圖 1），在此直線上擇定相異二點 O 與 E，O 點稱爲**原點**（Nullpunkt, Koordinatenanfangspunkt），E 點稱爲**單位點**（Einheitspunkt）．O 點分直線 g 成二**半線**（Halbstrahl），E 點所在之半線曰**正半線**（Positiver Halbstrahl），其他一半線曰**負半線**（Negativer Halbstrahl）；取線段 OE 之長作直線 g 上量度之單位長．對於 g 上之每一點，使有一實數與之相應，此與之相應之實數，即名爲點之**坐標**（Koordinate）；例如正半線上有一



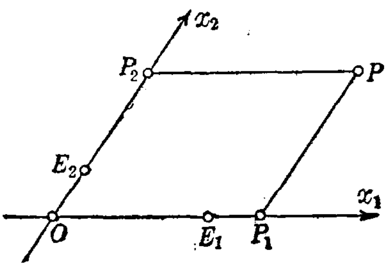
（圖 1）

點 P，即取線段 OP 之長之數值（即 OP 之長與 OE 之長之比值）使與 P 點相應；對於負半線上之一點 Q，取線段 OQ 之長之負值使與

Q 點相應. 照如此相應之法則 O 點之坐標自為 0, E 點之坐標自為 1. 如此, 對於直線 g 上任一點, 必有一實數且僅有一實數為此點之坐標; 反之, 對於任一實數, 直線 g 上必有一點且僅有一點存在, 此點之坐標卽為該實數. 故直線 g 上之點與實數之集合互成一一相應; 所謂一一相應者, 卽對於直線上之一點有一實數且僅有一實數與之相應, 而對於任一實數又有直線上之一點且僅有一點與之相應. 如此, 直線 g 上一經擇定 O, E 二點, 直線上之點與實數之集合二者之間卽成立一一相應之關係. 故在 g 上選定 O, E 二點後, 吾人卽謂在直線 g 上成立一**坐標系** (Koordinatensystem).

2. 二維空間(平面). 於平面中擇定二相異而相交之直線 (圖 2), 稱此二直線為**坐標軸** (Koordinatenachsen), 名之曰 x_1 軸, x_2 軸, 其交點名之曰原點. 在 x_1, x_2 軸上各取定單位點 E_1, E_2 (E_1, E_2 皆須與 O 點相異), 卽取定 OE_1 為 x_1 軸上量度之單位長, OE_2 為 x_2 軸上量度之單位長 (OE_1 與 OE_2 自不必等長). 如是在 x_1 軸上有一坐標系, 以 O 為原點, 以 E_1 為單位點; 在 x_2 軸上亦有一坐標系, 以 O 為原點, 以 E_2 為單位點.

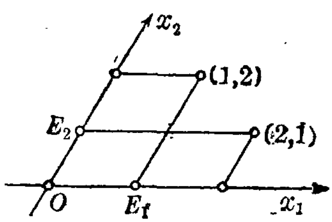
對於平面中之任意一點 P, 吾人使有一對實數與之相應, 此對與之相應之實數, 卽名為 P 點之**坐標** (Koordinaten). 其法乃過 P 點作二直線, 其一平行於 x_2 軸, 其一平行於 x_1 軸. 設此二線各交 x_1, x_2 軸於 P_1, P_2 點, 又設 P_1 點在 x_1 軸上之坐標系中之坐標為 x_1, P_2 點在 x_2 軸上之坐標系中之坐標為 x_2, 吾人卽取此二實數 x_1, x_2 使與 P 點相應, 且名 x_1 為 P 點之**第一坐標** (Erste Koordinate), x_2 名為 P 點之**第二坐標** (Zweite Koordinate). 第一坐標亦稱為**橫坐標** (Abszisse), 第二坐標亦稱為**縱坐標** (Ordinate). 如是, 對於



(圖 2)

平面中之一點，卽有一對且僅有一對有次序之實數與之相應；反之，對於任意一對有次序之實數 x_1，x_2，平面中卽有一點且僅有一點與之相應，蓋 x_1 軸上之 P_1 點由 x_1 決定，x_2 軸上之 P_2 點由 x_2 決定，過 P_1 點所作 x_2 軸之平行線與過 P_2 點所作 x_1 軸之平行線必相交於一點，且此交點亦由 x_1, x_2 二實數而決定.

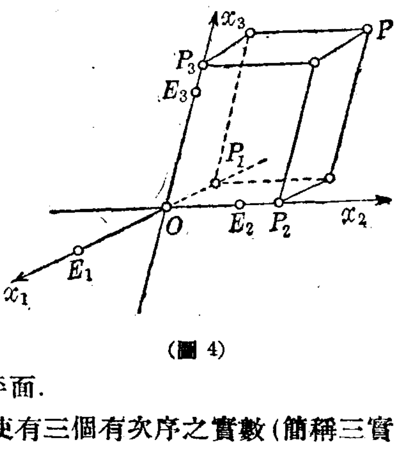
一點之坐標若爲 x_1, x_2，卽以記號 $(x_1,\ x_2)$ 表之. 在此記號中，x_1 與 x_2 之次序一定，不能互易，第一坐標恆居首，第二坐標恆居後. 如圖 3 中所示，(1, 2) 與 (2, 1) 二點完全相異.



(圖 3)

平面中之點與實數偶之集合 (所謂實數偶，卽一對有次序之實數) 二者間成立一一相應之關係. 故在平面中擇定 x_1, x_2 二坐標軸與其上之單位點 E_1, E_2 後，吾人卽謂平面中成立一平行坐標系 (Parallelkoordinatensystem).

3. 三維空間. 過空間之一點 O 擇定不在一平面中之三直線 (圖 4)，此三直線名之爲坐標軸，曰 x_1 軸，x_2 軸，x_3 軸. 在 x_i 軸上 $(i=1, 2, 3)$ 取定一單位點 E_i. 於是在每 x_i 軸上，卽有一坐標系，以 O 爲原點，以 E_i 爲單位點，每二坐標軸決定一平面，此種平面稱爲**坐標面** (Koordinatenebenen)，過 x_i, x_j 二軸之坐標面曰 x_i-x_j 平面，如是，共有三坐標面，卽 x_1-x_2 平面，x_2-x_3 平面，x_3-x_1 平面.



(圖 4)

對於空間之任意一點 P，吾人使有三個有次序之實數 (簡稱三實數組) 與之相應，此三實數組卽名爲 P 點之坐標. 其法乃過 P 點作

平面 e_1, e_2, e_3; e_1 平行於 x_2-x_3 平面, e_2 平行於 x_3-x_1 平面, e_3 平行於 x_1-x_2 平面, 設 e_i 平面交 x_i 軸於 P_i 點, 又設 P_i 點在 x_i 軸上之坐標爲 x_i, 吾人卽取此三數 x_1, x_2, x_3 使與 P 點相應, 稱爲 P 點之坐標, 且名 x_1 爲第一坐標, x_2 爲第二坐標, x_3 爲第三坐標. 如是, 對於空間一點, 卽有一個且僅有一個三實數組與之相應; 反之, 對於每一個三實數組, 空間卽有一點且僅有一點與之相應, 蓋 x_1 軸上之 P_1 點由實數 x_1 決定, x_2 軸上之 P_2 點由 x_2 決定, x_3 軸上之 P_3 點由 x_3 決定, 再過 P_1 作 e_1 平行於 x_2-x_3 平面, 過 P_2 作 e_2 平行於 x_3-x_1 平面, 過 P_3 作 e_3 平行於 x_1-x_2 平面, 此三平面必交於一點, 且此交點由 x_1, x_2, x_3 三實數而決定.

一點之坐標若爲 x_1, x_2, x_3, 則以記號 (x_1, x_2, x_3) 表之. 此中 x_1, x_2, x_3 之次序一定, 自左至右, 首爲第一坐標, 次爲第二坐標, 末爲第三坐標.

如此, 空間之點與三實數組之集合, 二者間亦成立一一相應之關係. 故在空間擇定三坐標軸與其上之三單位點以後, 吾人卽謂空間有一平行坐標系.

4. n 維空間. 直線上之點與實數之集合, 已有法則使之一一相應; 同樣, 平面中之點與實數偶之集合, 或空間之點與三實數組之集合, 每二者間均成立一一相應之關係. 利用此種一一相應之關係, 凡直線上或平面中或空間之幾何的觀念與性質, 皆可化形爲實數集合之代數的觀念與性質. 反之, 凡實數集合間之代數關係, 亦有點集合之幾何關係與之相應. 故在解析幾何學中, 不直接以直線, 平面或空間作探討之對象, 而代之以實數之集合, 而於探索所得之代數結果又化原爲點集合之幾何性質, 此卽解析幾何學之基本原理也. 在解析幾何學中, 吾人雖常藉直覺以助想像, 但一切推證則純爲代數的.

實數之集合與直線上之點旣有一一相應之關係, 故可稱實數之集合爲一維空間, 而名一實數爲一維空間中之一點同理, 所有實數

偶之集合亦可稱爲二維空間, 一個實數偶卽名爲二維空間中之一點; 所有三實數組之集合亦可稱爲三維空間, 一個三實數組卽名爲三維空間之一點. 仿此, 吾人更可將此種概念推廣之:

一個由 n 個實數按照一定之次序列成之實數組 (以下簡稱 n 實數組), 如 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$, 名之爲點 (Punkt) ($n$ 爲正整數). 實數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 名爲此點之坐標 (Koordinaten), 並稱 x_1 爲第一坐標, x_2 爲第二坐標, $\cdots\cdots$, x_n 爲第 n 坐標. 兩點 $P=(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n)$, $Q=(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 之坐標, 若兩兩相等, 卽 $x_i=y_i$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$), 則稱此二點爲相等 (gleich) 或重合 (fallen zusammen). 所有 n 實數組之集合, 稱爲 n 維仿射空間 (der affine Raum von n-Dimensionen).

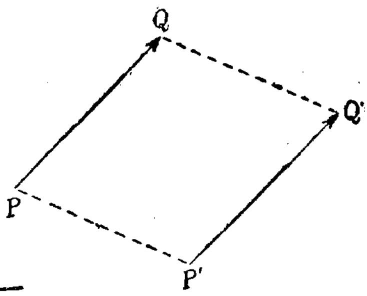
吾人以 R_n 簡表 n 維仿射空間, 當 $n=1, 2, 3$ 時, R_n 有直覺之幾何意義, 若 $n\geqq 4$, 則不復有直覺之幾何意義矣.

(1) 關於實數之基本運算法則, 本書假定讀者已有相當之認識, 關於此點, 在每本新式之微積分學教科書中, 皆有嚴密而有系統之敍述.

§ 2. 向量

欲研究 R_n, 向量之運算實爲重要工具, 故今以向量爲始.

在直覺空間中, 線段 PQ 由其二端 P, Q 決定 (圖 5), 若令二端之一爲起點, 另一端爲終點, 則此線段之方向定矣. 例如以 P 點爲起點, Q 點爲終點, 則此定向線段之方向爲自 P 至 Q, 以 $\overrightarrow{PQ}$ 表之. 此種定向線段, 卽稱爲向量 (Vektor). 二向量若等長且等向, 則稱爲相等: 故向量有一定之方向與長而無一定之位置; 故向量可平行於原來位置任

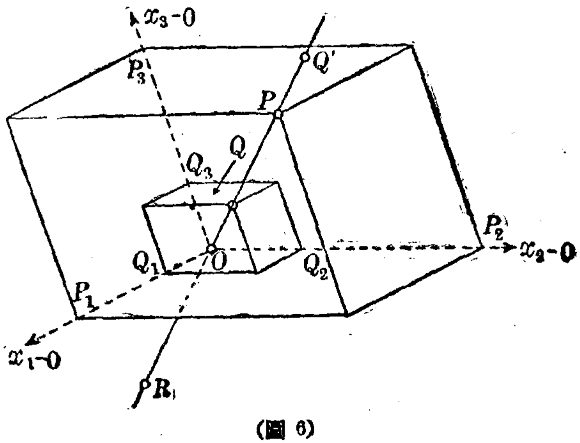


(圖 5)

意移動. 易言之, 向量之起點可任意選擇.——由此定義, 當知 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{QP}$ 二者不同.

今於空間取定一平行坐標系, 設 P 點之坐標為 x_1, x_2, x_3, Q 點之坐標為 y_1, y_2, y_3, 則定向線段 $\overrightarrow{PQ}$ 可由起點 P 之坐標 x_1, x_2, x_3 及 P, Q 二點之**坐標差** (Koordinatendifferenzen) $a_1=y_1-x_1$, $a_2=y_2-x_2$, $a_3=y_3-x_3$ 而決定, 蓋由此二者終點 Q 之坐標 $y_1=x_1+a_1$, $y_2=x_2+a_2$, $y_3=x_3+a_3$ 亦已決定也. 今若將 $\overrightarrow{PQ}$ 平行移至 $\overrightarrow{P'Q'}$ 之位置 (圖 5), 則起點終點之坐標隨之而變, 但起點與終點之坐標差 y_i-x_i 則不變. 此坐標差 y_i-x_i 名為向量 $\overrightarrow{PQ}$ 之**向量分** (Komponenten), 由上可知相等二向量之向量分必兩兩對應相等. 反之, 若二向量之向量分兩兩對應相等, 則二向量必等; 蓋如使此二向量之起點取於同一點時, 則此二向量必將重合也. 故向量與向量分, 二者間互成一一相應, 二者之中, 若有一已定, 則他一亦隨之決定. 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 之向量分若為 a_1, a_2, a_3, 卽以下式表之:

$$\overrightarrow{PQ}=\{a_1, a_2, a_3\}.$$



(圖 6)

吾人恆以德文小寫字母 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ 等表向量，如 $\mathfrak{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$. $\overrightarrow{PQ}$ 之向量分爲 $y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3$; $\overrightarrow{QP}$ 之向量分爲 $x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3$, 故

$$\overrightarrow{QP}=\{-a_1, -a_2, -a_3\}.$$

圖 6 中, P 點之坐標若爲 x_1, x_2, x_3, 則 $\overrightarrow{OP}$ 之向量分爲 $x_1-0=x_1$, $x_2-0=x_2$, $x_3-0=x_3$. 故

$$\overrightarrow{OP}=\{x_1, x_2, x_3\}.$$

今在線段 OP 上取一點 Q, 設此點之坐標爲 y_1, y_2, y_3. 過 P 點作平行於坐標面之平面，設此三平面各交坐標軸於 P_1, P_2, P_3 點. 同樣，過 Q 點作平行於坐標面之平面，又設此三平面各交坐標軸於 Q_1, Q_2, Q_3 點. 由幾何中相似形之定理，當有

$$\overline{OQ}:\overline{OP}=\overline{OQ_1}:\overline{OP_1}=\overline{OQ_2}:\overline{OP_2}=\overline{OQ_3}:\overline{OP_3}{}^{(1)}$$

於此所當注意者, x_i 軸上之 P_i, Q_i 二點位於 O 點之同側，因此 x_i 與 y_i 同號，故

$$y_1:x_1=y_2:x_2=y_3:x_3,$$

或

$$y_1=\lambda x_1,\quad y_2=\lambda x_2,\quad y_3=\lambda x_3. \qquad (0\leqq\lambda\leqq 1)$$

於是

$$\overrightarrow{OQ}=\{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}. \qquad (0\leqq\lambda\leqq 1)$$

對於線段 OP 之延線上 P 點以外之一點 Q', 則有

$$\overrightarrow{OQ'}=\{\lambda' x_1, \lambda' x_2, \lambda' x_3\}. \qquad (\lambda'>1)$$

再者, $\overrightarrow{PO}$ 之向量分爲 $-x_1, -x_2, -x_3$, 若取 O 點作 $\overrightarrow{PO}$ 之起點，則該向量之終點 R 之坐標必爲 $-x_1, -x_2, -x_3$. $\overrightarrow{OR}$ 與 $\overrightarrow{PO}$ 二向量相等，故必平行，故 R 點在線段 PO 之延線上而在 O 點之外側. 應用上述結果，設 S 點位於 PO 之延線上而在 O 點之外側，則

$$\overrightarrow{OS}=\{-\lambda x_1,\ -\lambda x_2,\ -\lambda x_3\},$$

此處之 λ 爲正數, 或 >1, 或 $\leqq 1$; 若 S 位於線段 OR 以內, 則 $0\leqq\lambda\leqq 1$; 若 S 位於 OR 之延線上而在 R 之外側, 則 $\lambda>1$.

向量 $\{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}$ 稱爲向量 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 之 λ 倍, 以式表之:

$$\lambda\cdot\{x_1, x_2, x_3\}=\{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}.$$

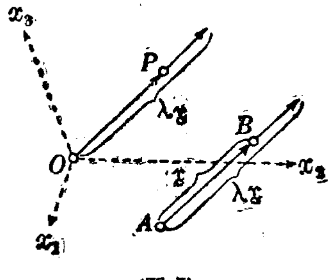
當 $\lambda=0$ 時, 則

$$\lambda\cdot\{x_1, x_2, x_3\}=\{0, 0, 0\},$$

$\{0, 0, 0\}$ 之諸向量分盡爲 0, 特名曰零向量 (Nullvektor).

茲更將以上之結果總括述之如下: 若 P 點之坐標爲 x_1, x_2, x_3, 而 $\mathfrak{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$, 則過原點 O 與 P 點之直線上所有之點, 卽爲將諸向量 $\lambda\cdot\mathfrak{x}$ 之起點取於 O 點而得之諸終點; 反之, 將所有 $\lambda\cdot\mathfrak{x}$ 之起點取於 O 點而得之諸終點, 必爲過 O 與 P 之直線上之點; 此處之 λ 爲任何實數, 對於線段 OP 內之點, λ 在 0 與 1 之間, 反之, 若 λ 爲 0 與 1 之間之實數, 則所得之終點必在線段 OP 內.

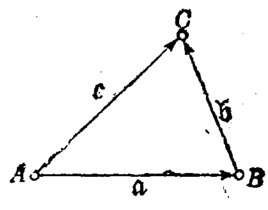
設 A 爲空間之一點 (圖 7), 取 A 作 $\mathfrak{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$ 之起點, 如此所得 $\mathfrak{x}$ 之終點設爲 B, 則 $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{x}$. 如此, 過 A, B 二點之直線上所有之點, 卽爲將一切向量 $\lambda\cdot\mathfrak{x}$ 之起點取於 A 而得之諸終點; 反之, 將諸 $\lambda\cdot\mathfrak{x}$ 之起點取於 A 點而得之諸終點, 必爲此直線上之點. 對於線段 AB 內之點, λ 在 0 與 1 之間; 反之, 若 λ 爲 0 與 1 間之一實數, 則所得之終點必在線段 AB 內.



(圖 7)

設有二向量 $\mathfrak{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathfrak{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, 今取任意一點 A 作 $\mathfrak{a}$ 之起點 (圖 8), 設如此而定之 $\mathfrak{a}$ 之終點爲 B, 卽取 B 爲 $\mathfrak{b}$ 之起點,

又設如此而得之終點爲 C, 則 $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathfrak{b}$. 今命 $AC=\mathfrak{c}$, 並假定 $\mathfrak{c}$ 之向量分爲 c_1, c_2, c_3, 則 c_1, c_2, c_3 甚易由 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ 之向量分算得. 設 A 點之坐標爲 x_1, x_2, x_3; B 點之坐標爲 y_1, y_2, y_3; C 點之坐標爲 z_1, z_2, z_3; 則



(圖 8)

$$a_i=y_i-x_i,\ b_i=z_i-y_i,\ c_i=z_i-x_i. \qquad (i=1, 2, 3)$$

但
$$z_i-x_i=(y_i-x_i)+(z_i-y_i),$$
故
$$c_i=\overset{a}{\cancel{x}}_i+b_i.$$

因此關係吾人稱向量 $\mathfrak{c}$ 爲 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ **二向量之和** (Summe zweier Vektoren) 而寫作下式:

$$\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b},$$

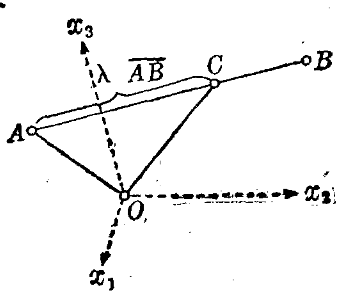
或

$$\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3\}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}+\{b_1,\ b_2,\ b_3\}.$$

故二向量相加, 卽將各向量分兩兩相加.

如圖 9, 空間有 A, B 二點, C 爲過 A, B 之直線上之一點, 吾人可假定 C 爲以 A 作向量 $\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ 之起點而得之終點 (此處之 λ 乃由 C 點而決定之實數), 則

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}.$$



(圖 9)

若令 A 點之坐標爲 x_1, x_2, x_3; B 點之坐標爲 y_1, y_2, y_3; C 點之坐標爲 z_1, z_2, z_3; 則

$$\overrightarrow{OC}=\{z_1,\ z_2,\ z_3\},\quad \overrightarrow{OA}=\{x_1,\ x_2,\ x_3\},$$
$$\overrightarrow{AB}=\{y_1-x_1,\ y_2-x_2,\ y_3-x_3\};$$

故有

$$\{z_1, z_2, z_3\} = \{x_1, x_2, x_3\} + \lambda\cdot\{y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3\}$$
$$= \{x_1 + \lambda(y_1 - x_1), x_2 + \lambda(y_2 - x_2), x_3 + \lambda(y_3 - x_3)\}.$$

但由二向量相等之定義,二向量之向量分兩兩對應相等時,二向量始相等,於是有

$$z_1 = x_1 + \lambda(y_1 - x_1),$$
$$z_2 = x_2 + \lambda(y_2 - x_2),$$
$$z_3 = x_3 + \lambda(y_3 - x_3).$$

C 點係過 A, B 之直線上之任意一點,故由此三方程,若使 λ 取一切實數值時,可得過 A, B 之直線上一切點之坐標. 若使 λ 取一切位於 0 與 1 間之實數值,即 $0 \leqq \lambda \leqq 1$,則可得線段 AB 內之一切點之坐標. 上列三方程名爲**直線之參數表示** (Parameterdarstellung der Geraden).

到此,本節中所論者皆僅限於直覺的空間內,以下將此種觀念推廣及於 n 維空間.

設 $P = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$, $Q = y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ 爲 R_n 中之二點,所有凡能適合方程

$$z_i = x_i + \lambda(y_i - x_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

(λ 爲任何實數)之點 $(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n)$ 之集合,稱爲 R_n 中過 P, Q 二點之**直線** (Gerade). 若 λ 加以限制,使 $0 \leqq \lambda \leqq 1$,則凡能適合上列方程之點之集合,稱爲**線段** PQ (Strecke). P, Q 稱爲線段之二端,若命一端爲起點,他端爲終點,則此線段之方向定矣,此定向之線段即以 $\overrightarrow{PQ}$ 表之. 此種定向線段,稱爲**向量** (Vektor). P, Q 二點之坐標差 $y_1 - x_1, y_2 - x_2, \cdots\cdots, y_n - x_n$ 稱爲 $\overrightarrow{PQ}$ 之**向量分** (Komponenten).

二向量之向量分如兩兩對應相等,則稱二向量爲相等,故向量可由其向量分決定. 設有一向量之向量分爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$,則書爲

$$\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}.$$

故若 $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\cdots\cdots$, $a_n = b_n$,則二向量 $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$,

$e_i=\{\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots;\delta_{in}\}$
$i\neq k$ 时 $\delta_{ik}=0$
$i=k$ 时 $\delta_{ik}=1$

$\mathfrak{b}=\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$ 稱爲相等.

向量之諸向量分若皆爲 0, 稱爲零向量 (Nullvektor).爲簡單計,有時亦以 $\mathfrak{O}$ 表零向量.

若 R_n 中之一向量, 其向量分除第 i 個爲 1 外, 餘者均爲 0, 則此向量稱爲 R_n 中之**第 i 個單位向量** (der i-te Einheitsvektor des R_n), 普通以 $\mathfrak{e}_i$ 表之, 卽

$$\mathfrak{e}_1=\{1, 0, 0, \cdots\cdots, 0\},$$
$$\mathfrak{e}_2=\{0, 1, 0, \cdots\cdots, 0\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{e}_n=\{0, 0, 0, \cdots\cdots, 1\}.$$

如以 **Kronecker** 符號(2) (Kronecker-symbol) 表之, 則爲

$$\mathfrak{e}_i=\{\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots\cdots, \delta_{in}\} \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

向量 $\mathfrak{a}=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$ 之始點 P, 可任意選擇, 但 P 一經選定, 則終點 Q 亦隨之決定, 設 $P=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$, 則 Q 點之坐標當卽由

$$y_i=x_i+a_i \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

而決定, 蓋 $a_i=y_i-x_i$ 也.

二向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{QR}$ 之和, 定爲 $\overrightarrow{PR}$, 卽

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}.$$

設 $\overrightarrow{PQ}=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$, $\overrightarrow{QR}=\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$, 則 $\overrightarrow{PR}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots\cdots, a_n+b_n\}$, 此乃甚易證明之事. 故二向量相加, 卽將二向量之諸向量分相加, 以式表之:

$$\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}+\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots\cdots, x_n+b_n\}.$$

由實數加法之交換律, 可知

$$\{a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots\cdots, a_n+b_n\}=\{b_1+a_1, b_2+a_2, \cdots\cdots, b_n+a_n\},$$

故
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a},$$

此謂之向量加法之交換律 (Kommutativgesetz der Addition der Vektoren).

若於 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 再加 $\mathfrak{c}=\{c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n\}$, 則得和爲 $\{a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2, \cdots\cdots, a_n+b_n+c_n\}$. 若於 $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ 再加 $\mathfrak{a}$, 其結果亦同, 故

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}),$$

此謂之向量加法之結合律 (Assoziativgesetz der Addition der Vektoren). 同理, 任意 k 個向量相加時, 其結果與施加之次序無關. 設有 k 個向量

$$\mathfrak{a}_1=\{a_1{}^{(1)}, a_2{}^{(1)} \cdots\cdots, a_n{}^{(1)}\},$$

$$\mathfrak{a}_2=\{a_1{}^{(2)}, a_2{}^{(2)} \cdots\cdots, a_n{}^{(2)}\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{a}_k=\{a_1{}^{(k)}, a_2{}^{(k)} \cdots\cdots, a_n{}^{(k)}\}^{(3)}$$

相加, 無論施加之先後何如, 其和皆爲

$$\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{a}_i=\left\{\sum_{i=1}^{k}a_1{}^{(i)},\ \sum_{i=1}^{k}a_2{}^{(i)},\ \cdots\cdots,\ \sum_{i=1}^{k}a_n{}^{(i)},\ \right\}^{(4)}.$$

一向量若以一實數 λ 乘之, 卽以此向量之向量分各乘以 λ. 以式表之:

$$\lambda\cdot\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}\cdot\lambda=\{\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots\cdots, \lambda a_n\}.$$

若以二實數 λ, μ 乘一向量 $\mathfrak{a}$, 則必

$$\mu\cdot(\lambda\cdot\mathfrak{a})=(\mu\cdot\lambda)\cdot\mathfrak{a},$$

蓋皆等於 $\{\mu\cdot\lambda\cdot a_1, \mu\cdot\lambda\cdot a_2, \cdots\cdots, \mu\cdot\lambda\cdot a_n\}$ 也. 故式中之括弧可以省去, 卽

$$\mu\cdot\lambda\cdot\mathfrak{a}=\mu\cdot(\lambda\cdot\mathfrak{a})=(\mu\cdot\lambda)\cdot\mathfrak{a}.$$

設 $\mathfrak{a}=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$, $\mathfrak{b}=\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$, 則有

$$\lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\{\lambda a_1+\lambda b_1, \lambda a_2+\lambda b_2, \cdots\cdots, \lambda a_n+\lambda b_n\}=\lambda\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b},$$

$$(\lambda+\mu)\mathfrak{a}=\{\lambda a_1+\mu a_1, \lambda a_2+\mu a_2, \cdots\cdots, \lambda a_n+\mu a_n\}=\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{a}.$$

此二式稱爲分配律 (Distributivgesetz).

設 $\mathfrak{a}=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$, 則 $(-1)\cdot\mathfrak{a}=\{-a_1, -a_2, \cdots\cdots, -a_n\}$, 簡以 $-\mathfrak{a}$ 表 $(-1)\cdot\mathfrak{a}$. 如又一向量 $\mathfrak{b}=\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$, 則 $\mathfrak{b}+(-1)\cdot\mathfrak{a}$ 恆簡作 $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$. 故

$$\mathfrak{b}-\mathfrak{a}=\{b_1-a_1, b_2-a_2, \cdots\cdots, b_n-a_n\},$$

又

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{a}=\{0, 0, \cdots\cdots, 0\},$$

此式之右端爲一零向量, 此處可簡以 $\mathfrak{O}$ 表之, 因在此式中, 吾人一望而知 $\mathfrak{O}$ 所表者爲零向量而非實數之 0. 任一向量 $\mathfrak{a}$, 恆能適合方程

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{O}=\mathfrak{a}.$$

若有方程

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b},$$

則吾人恆可解 $\mathfrak{x}$, 蓋若於兩端同加 $-\mathfrak{a}$, 卽得

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{b}-\mathfrak{a}.$$

茲更討論 $\lambda\cdot\mathfrak{a}=\{\lambda\cdot a_1, \lambda\cdot a_2, \cdots\cdots, \lambda\cdot a_n\}$ 在何種條件之下, 始等於 $\mathfrak{O}$. 最普通之情形, 自爲 $\lambda=0$. 若 $\lambda\neq 0$, 則因 $\lambda\cdot a_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ 皆須爲 0, 自必須 a_i 皆等於 0, 此卽 $\mathfrak{a}$ 必須爲一零向量. 故當 $\lambda\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{O}$ 時, 或 $\lambda=0$, 或 $\mathfrak{a}=\mathfrak{O}$, 二者之中至少有一成立.

於此, 更一述二向量之數積 (Skalarprodukt zweier Vektoren) 有 $\mathfrak{a}=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$, $\mathfrak{b}=\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$, 則

$$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots\cdots+a_n\cdot b_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i$$

稱爲 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 二向量之數積, 而以 $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ 表之, 卽

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i.$$

故二向量之數積不復爲向量, 而爲一實數. 若 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, 則書爲 $\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}$.

對於二向量之數積, 交換律亦得適用, 卽

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a},$$