

华中理工大学  
1995 年研究生学术年会  
优秀论文集

---

《研究生学报》编辑部编

华中理工大学  
1995 年研究生学术年会优秀论文集

目 录

1. 牛肉冷冻干燥的数值模拟和实验研究 ..... 顾中平(1)
2. 一类函数图像的 Bouligand 维数 ..... 张玉民(8)
3. 一种用于有限元分析中的快速消隐的画家算法 ..... 刘理(14)
4. 红豆杉细胞悬浮培养中过氧化物酶活性测定 ..... 王信梧 王君健(17)
5. 纸张厚度测量中新型复合传感器的应用 ..... 梁悦平 孙健 夏士智(21)
6. 基于面向对象技术的专家系统 ..... 易卫东(25)
7. 电子邮件系统中的路由选择 ..... 黄海涛 徐则琨(31)
8. CAPP 系统中冲压剪切劳动定额的研究 ..... 吴锋(39)
9. 冲裁模结构 CAD 系统的描述模型 ..... 陈玉梅 肖祥芷 肖景容 李亚农(44)
10. 基础教育规划决策支持系统的设计与实现 ..... 江照群 王红卫 费奇(51)
11. 实用性注塑模计算包 ICPACK 的开发 ..... 李小红(58)
12. 一种新型土壤热源热泵装置的试研究 ..... 汤建华 张昆峰(65)
13. 一种新型 DC 微小电流传感器的研究 ..... 刘红丽 龚洁 陈大钦(72)
14. 预光刻机中伺服录写的实现 ..... 黄上游 贾连兴(78)
15. 一种自启动单相开关磁阻电动机理想线性模型下的电磁关系 ... 刘华 詹琼华(83)
16. 锅炉水冷壁爆管及其防治 ..... 沈宇亮 张晓梅(89)
17. 基于 SDLC 环的高速同步通信及其实现 ..... 唐文运 (95)
18. X-Y 自旋玻璃临界指数 ..... 李源 易林(101)
19. 旋转机械微机辅助动平衡测试分析系统 ..... 余小平 苏俊峰(108)
20. 前馈网络的灵敏度分析及降低方法 ..... 王德想 孙德保 尹泉(116)
21. 罗果夫斯基线圈的性能研究 ..... 毛中亚 叶启弘(122)
22. 国有资产保值增值与 ..... 吴文军(128)
23. 经济增长与生产函数 ..... 梁猛 曹祥涛 兰星(133)
24. 加强我国银行贷款风 ..... 何文谦 杨焱(141)
25. SAD 法在我国保税区功能开发中的应用 ..... 姜杰 肖敦斌(145)
26. CREDIT OPERATION & CONTROL OF MORDEN COMMERCIAL BANK;  
CREDIT RISK & INTERNATIONAL DEVELOPING ... Harvey He Xijun(151)
27. 计算机辅助大学英语写作教学初探 ..... 潘松(157)
28. STATIVE PASSIVE ..... Shang Hongmei(162)

# 牛肉冷冻干燥的数值模拟和实验研究

顾中平

(动力工程系)

## 摘 要

本文建立了辐射给热条件下牛肉冷冻干燥过程的理论模型,并用变时间步长法对冻干过程进行了数值模拟,得到了传热控制下制品在不同时间内的温度分布曲线、制品表面压力、温度随时间变化曲线。在此基础上进行了实验研究,探索对牛肉的真空冷冻干燥工艺。

关键词:真空冷冻干燥 数值模拟 牛肉

## 1 前言

冷冻干燥是将含水物质先在低温下冻结成固态,后使其中的水份在真空条件下直接由固态升华为气态,从而除去水份而保存物质的方法。

本文研究的是方便面汤料中牛肉的冷冻干燥过程,考虑到是方便速食食品,冻干的牛肉预先作切丁、煮熟处理。

冷冻干燥过程一般分三步进行,即预冷冻、第一阶段干燥、第二阶段干燥。其中第一阶段干燥是冰晶体的升华过程,大约能除去 90% 左右的水份,是冻干的主要阶段。

升华干燥是将冻结后的产品置于密闭的真空容器中加热,其冰晶就会升华成水蒸气逸出并将排出的水蒸气凝华而使产品脱水干燥。干燥是从外表面开始逐步向内推移的,冰晶升华后残留下的空隙变成而后升华水蒸气的逸出通道。已干燥层和冻结部分的分界面为升华界面(亦即固相和气相的相分界面)。

显然,冻干过程中,存在一个随时间变化的两相界面,在该界面上冰晶升华需吸收热量。与此问题类似的如:冰的融化凝固、铸件的固化,这类问题的主要特点是:控制方程是导热方程,区域内存在着一个随时间变化的两相界面,在该界面上放出或吸收热量,因此又称为“可移动边界问题”。它首先是由曾对此问题研究作出重要贡献的科学家 Stefan 提出,故常称为 Stefan 问题。

由于这类问题在数学上是一个强非线性问题,(即使其控制方程可能是线性的,但两相界面的位置常常有待确定,界面的能量方程条件是非线性的),解的叠代原理不能使用,所以至今只能对很少较为简单的情况,在进行一定的假设情况下,可求出精确分析解,而对较为一般的情况则很难或根据不可能求出其理论分析解,只能用近似方法或数值方法。由于数值法得到的结果直观、明了,便于分析,而且计算机技术的飞速发展,使数值法的精

确度越来越高,使用领域也越来越广。

对一维 Stefan 问题的数值法,Gupta 将其分为两类,即固定步长法和变时间步长法,固定步长法是指将相变过程的全部时间划分有限多个相等的小区间,采用这种方法,对每个时间片,界面位置一般是处于两个结点,中间的某一位置上,而不会正好处于网格结点上,所以在建立离散化方程时,必须对界面附近的节点进行插值,这种方法计算较为复杂。

而变时间步长法,则是同样在  $x$  方向上的均匀结点情况下,使每个时间片的长度可变,且保证每经历一个时间片边界层正好跨越一个网格结点,也即变步长法的边界面位置在每个时间片末是正好位于某个结点上的。由于界面的移动规律一般是非线性的,所以在计算过程中,每个时间步长需随时确定。

本文利用变步长法对切丁牛肉的冷冻干燥过程进行数值求解。

## 2 理论模型

切丁的牛肉是立方体结构,置于冻干箱加热板间的网状支撑架上(如图 2.1 所示),升华过程中所需要的热量由加热板辐射至制品表面再经干燥层的热传导而提供,升华的水汽经干燥层进入冻干箱进而在水汽凝结器上冷凝。升华过程中,制品内相界面(升华界面)是由立方体的边缘不断向中间收缩,直至中间某一点而干燥完毕。为建立合适的数学模型,我们假定牛肉各向同性(事实上由于牛肉纤维组织的不同排列,其热质传递性能有很大差异),这样升华热质传递过程在立方体的六个面内可以认为是完全对称进行的,相应我们的模型可简化成为如图 2.2 所示,制品为原立方体的六分之一(正四棱锥),其底面为原立方体的面,高为立方体边长的二分之一。

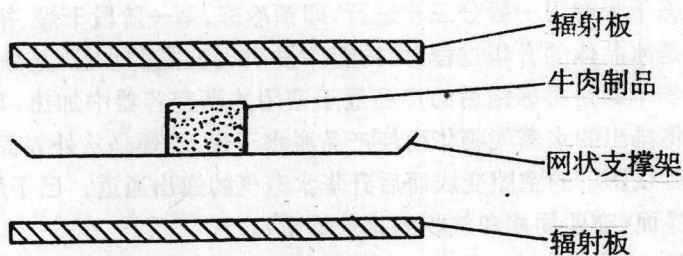


图 2.1 冻干示意图

对图 2.2 的模型,为了建立其数学模型,作如下假设:

(1) 在前面对称性假定条件下,可知正四棱锥的四个侧面内无热质传递,即可以看作是绝热边界。

(2) 升华面在距表面  $x$  且与底面平行的升华面进行直至四棱锥顶部,升华面厚度无限小。

(3) 冻结层内均匀,各向同性,不考虑溶有的少量不凝性气体。

(4) 在多孔介质内,固体基质与内部气体处于热平衡。

(5) 升华过程中升华潜热为常数,由于压力较低,水蒸气视为理想气体。

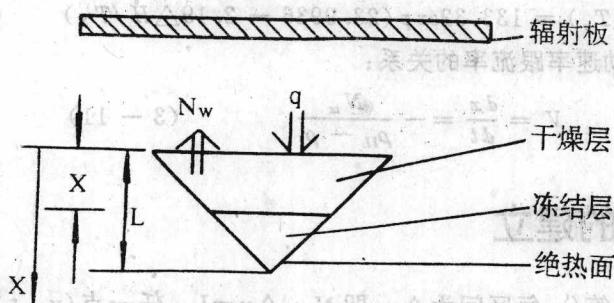


图 2.2 冻干传热传质模型

(6) Clapeyron 方程提供了升华温度、压力与升华潜热的关系。

### 3 数学模型

在上面的这些假设下,运用微元的热量、质量守恒,我们可以得到本问题的数学模型:

(1) 干层能量平衡方程:

$$\frac{dT_I}{dt} = -N_{ix} \frac{A(X)}{A(x)} \frac{C_{pg}}{P_{ig}C_{pi}} \frac{dT_I}{dx} + \frac{\alpha_{ie}}{A(x)} \frac{d}{dx} \left[ A(x) \frac{dT_I}{dx} \right] \quad (0 < x < X) \quad (3-1)$$

(2) 冻结层能量平衡方程:

$$\frac{dT_{II}}{dt} = \frac{\alpha_{ii}}{A(x)} \frac{d}{dx} \left[ A(x) \frac{dT_{II}}{dx} \right] \quad (X < x < L) \quad (3-2)$$

(3) 升华面能量平衡方程:

$$K_{II} \frac{dT_{II}}{dx} - K_{Ie} \frac{dT_I}{dx} + V(\rho_{II}C_{pi}T_{II} - \rho_I C_{pi}T_I) + N_{ix}C_{pg}T_I = -\Delta H \cdot N_{ix} \quad (x = X) \quad (3-3)$$

(4) 能量平衡方程的初始、边界条件:

$$T_I = T_{II} = T_0 \quad (t = 0, 0 < x < L) \quad (3-4)$$

$$q_1 = -K_{Ie} \frac{dT_I}{dx} \Big|_{x=0} = \varepsilon \cdot 5.67 \cdot$$

$$\left[ \left( \frac{T_{II}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_I|_{x=0}}{100} \right)^4 \right] \quad (t > 0, x = 0) \quad (3-5)$$

$$q_2 = K_{II} \frac{dT_{II}}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (t > 0, x = L) \quad (3-6)$$

$$T_I = T_{II} = T_x \quad (t > 0, x = X) \quad (3-7)$$

(5) 干层内传质方程:

$$\frac{d\rho_w}{dt} = D_{Ie} \frac{d^2\rho_w}{dx^2} \quad (3-8)$$

(6) 水汽流率:

$$N_{wX} = -D_{Ie} \frac{d\rho_w}{dx} \quad (3-9)$$

(7) Clapeyron 方程:

$$P_{wx} = f(T_x) = 133.32 \exp(23.9936 - 2.19\Delta H/T_x) \quad (3-10)$$

(8) 升华面移动速率跟流率的关系:

$$V = \frac{dx}{dt} = - \frac{N_w}{\rho_{II} - \rho_I} \quad (3-11)$$

## 4 离散方程的建立

我们将  $L$  分  $N$  等分, 每区间为  $\Delta x$ , 即  $N \cdot \Delta x = L$ , 任一点  $(x_i, t_j)$  在  $x-t$  坐标系内的位置为  $(i\Delta x, \sum_{m=0}^{j-1} \Delta t_m)$ , 这里  $\Delta t_m$  是相界面由  $m\Delta x$  位置移动到  $(m+1)\Delta x$  所经历的时间。我们的目的就是求出合适的  $\Delta t_m$  ( $0 \leq m \leq N-1$ ), 则总的冻干时间为  $\sum_{m=0}^{N-1} \Delta t_m$ 。

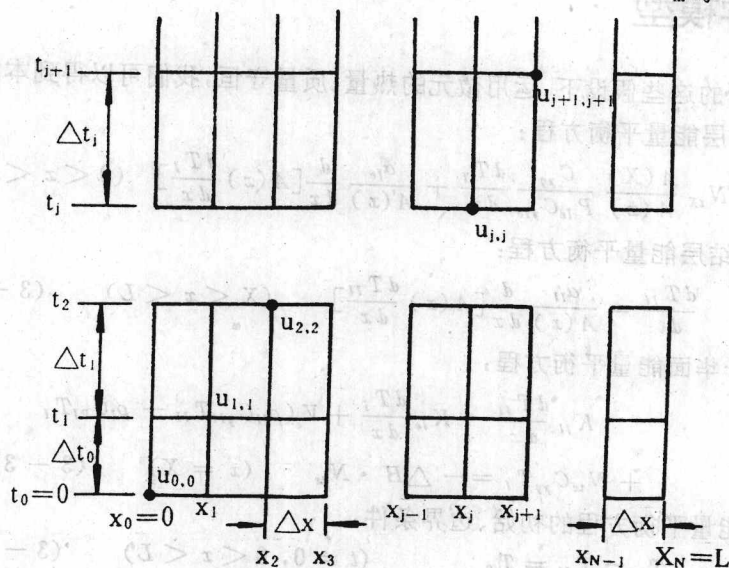


图 4.1 冻干过程中的变时间结点

同时根据查阅的文献及实验分析, 冻干过程为传热控制, 亦即在保证已干制品层表面温度低于崩解温度, 升华面温度低于共晶点温度情况下, 选取合适的辐射板温, 求出制品内的温度分布和冻干所需的时间, 同时为保证升华水气的顺利逸出可求出制品内的压力分布及箱内需保持的真空度。

用  $u_{i,j+1}$  代表网格点  $(i, j)$  处的温度, 下面建立离散化方程以求得  $t_{j+1}$  时刻 (升华面在  $x_{j+1}$  处) 各点的温度值  $u_{i,j+1}$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ),  $\Delta t_j$  值及保证水汽逸出的压力分布  $P_i$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ), 这里  $P_0$  为制品表面的压力, 也即箱内需维持的压力。

为保证离散化的稳定性, 对 (3-1) 式左边采用向后差分, 右边采用向后及中间差分的隐性格式, 得到:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t_j} = \left[ \frac{4(L - (j+1)\Delta x)^2}{4(L - i\Delta x)^2} \frac{C_{py}}{\rho_{I0} C_{pI0}} \frac{\Delta x}{\Delta x_j} + \frac{2\alpha_I}{i\Delta x - L} \right] \frac{u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}}{\Delta x}$$

$$+ \alpha_l \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, j) \quad (4-1)$$

同样, (3-2) — (3-11) 式分别离散如下:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t_j} = \frac{2a_{ll}}{i\Delta x - L} \frac{u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}}{\Delta x} + a_{ll} \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} \quad (i = j+2, j+3, \dots, N-1) \quad (4-2)$$

$$K_{ll} \frac{u_{j+2,j+1} - u_{j+1,j+1}}{\Delta x} - K_{ls} \frac{u_{j+1,j+1} - u_{j,j+1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta t_j} (\rho_{ll} C_{Pl} - \rho_l C_{Pl}) \cdot U_{j+1,j+1} + N_{lx} C_{Pl} u_{j+1,j+1} = -\Delta H \cdot u_{j+1,j+1} \quad (4-3)$$

$$U_{i,j} = T_0 \quad (i = 0, 1, \dots, N; j = 0 \text{ 即 } t = 0 \text{ 时刻}) \quad (4-4)$$

$$q_1 = -K_{ls} \frac{u_{i,j+1} - u_{0,j+1}}{\Delta x} = \varepsilon \cdot 5.67 \cdot \left[ \left( \frac{T_H}{100} \right)^4 - \left( \frac{u_{0,j+1}}{100} \right)^4 \right] \quad (4-5)$$

$$q_2 = -K_{ll} \frac{u_{N,j+1} - u_{N-1,j+1}}{\Delta x} = 0 \quad (4-6)$$

$$u_{j+1,j+1} = T_x \quad (4-7)$$

对 (3-8) 式由  $\rho_w = \frac{p_w}{RT_l}$ , 离散得到:

$$\left( \frac{P_{i,j+1}}{Ru_{i,j+1}} - \frac{P_{i,j}}{Ru_{i,j}} \right) / \Delta t_j = D_{ls} (P_{i,j}) \frac{\frac{P_{i-1,j+1}}{Ru_{i-1,j+1}} - 2 \frac{P_{i,j+1}}{Ru_{i,j+1}} + \frac{P_{i+1,j+1}}{Ru_{i+1,j+1}}}{(\Delta x)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, j) \quad (4-8)$$

对 (3-9) 式物料表面水汽流率:

$$N_{wo} = -D_{ls} \frac{P_1 - P_0}{\Delta x} = -D_{ls} (P_{0,j}) \frac{\frac{P_{i,j+1}}{Ru_{i,j+1}} - \frac{P_{0,j+1}}{Ru_{0,j+1}}}{\Delta x} \quad (4-9)$$

$$P_{j+1,j+1} = P_{wx} = 133.32 \exp(23.9936 - 219. \Delta H / T_x) \quad (4-10)$$

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = - \frac{N_u}{\rho_{ll} - \rho_l} \quad (4-11)$$

对 (4-1) — (4-7) 式在  $t_{j+1}$  时刻, 共有  $N+2$  个未知数 ( $\Delta t_j$ ,  $u_i = 0, 1, \dots, N; j+1$ ), 方程个数也为  $N+2$  个, 可以求解。本文采用高斯—塞德尔迭代法求出 ( $\Delta t_j, u_{i,j+1}$ )。方程中干层导热和传质系数视为压力的函数。在求各点导热和传质系数时所用压力近似取前一刻的对应点压力值。

求出 ( $\Delta t_j, u_{i,j+1}$ ) 后, 由方程 (4-8) 至 (4-11) 及干燥层内质量守恒方程:

升华面传入的质量 = 制品表面导出的质量 + 干层内各微元质量增量之和

$$-N_{wx} A(X) \Delta t_j = -N_{w0} A(0) \Delta t_j + \sum_{i=0}^j \left[ \left( \frac{p_{i,j+1}}{u_{i,j+1}} - \frac{p_{i,j}}{u_{i,j}} \right) \frac{A(x) \Delta x}{R} \right] \quad (4-12)$$

同样用高斯—塞德尔迭代求出  $t_{j+1}$  时刻的  $P_{i,j+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, j+1$ )。

## 5 计算结果与实验研究

根据所建立的离散方程,绘制出程序框图,而后编制程序。这样可对具有立方体形状的制品,在辐射给热条件下的冷冻干燥过程进行数值求解,得到制品在不同时间内的温度分布曲线,制品表面压力、温度随时间变化曲线及升华干燥所需要的时间。

本文对牛肉制品进行了数值求解,并且在此基础上进行了实验研究,实验结果表明该模型的建立具有一定的合理性,对颗粒状食品的冷冻干燥有较大的指导意义。

下图为  $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$  牛肉冻干过程的计算和实验实测结果:

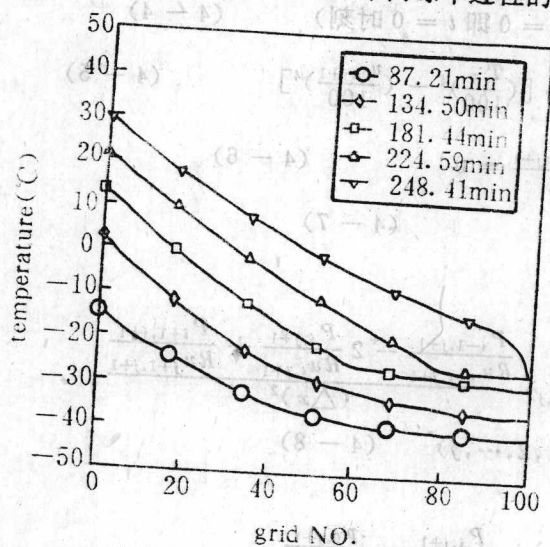


图 5.1 不同时间制品内各结点温度分布曲线(计算值)

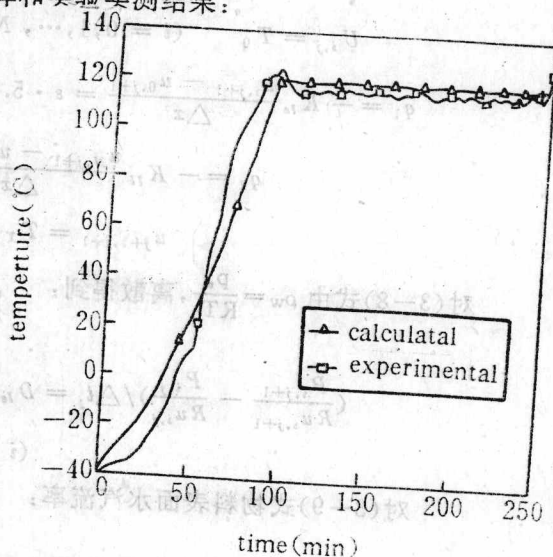


图 5.2 辐射板温度随时间的变化曲线

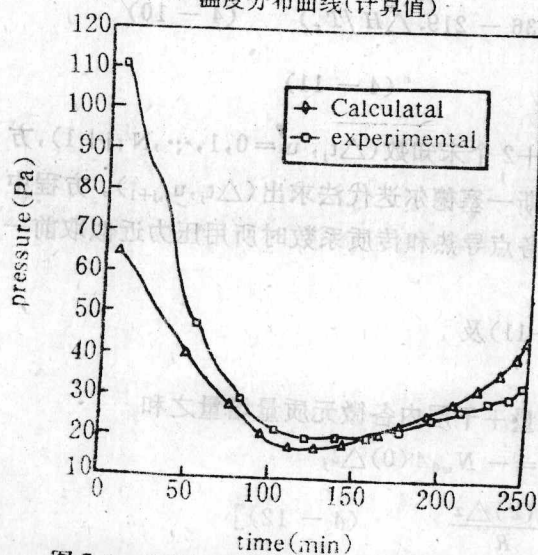


图 5.3 为保证水汽逸出箱内需维持的压力

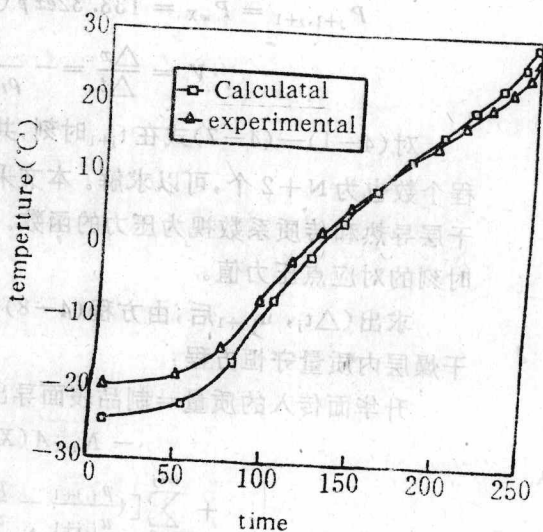


图 5.4 制品表面的温度变化曲线

由图 5.1 可以看出随着冻干的进行升华面( $-25^{\circ}\text{C}$ )不断向内结点推进,在接近 250min 升华干燥完毕,可进入下一阶段的解析干燥。

升华阶段的两大主要决定因素是辐射板温和箱内压力(真空度)。板温的提高能增大制品的辐射得热量,进而提供给升华的热量也相应增加,加快了升华的进行。但如果箱内没有足够的真空度,致使升华水汽来不及逸出,升华面压力会提高,相应升华面温度也上升,而升华面温度则受制品共融点温度的限制。另外,箱内真空度的提高在有利于升华水汽逸出的同时,也减小了制品干层的导热系数,减少了升华供热量,对升华有抑制作用。图 5-3、图 5-4 中制品升华干燥的前半阶段(约 160min 以前)真空度低于所需计算值,制品表面温度则高于计算结果,这是由于开始阶段箱内真空度的不足引起制品升华面温度的提高,相应制品内各点及制品表面的温度也上升,而后半阶段正好相反。计算和实验表明,板温维持在  $120^{\circ}\text{C}$ , 压力在  $70\sim 20\text{Pa}$  间变化,对牛肉的冻干过程是合理的。

### 参考文献

1. 冷冻干燥技术,赵鹤皋、林秀诚编,华中理工大学出版社;
2. R. S Gupta and Dharendra Kumar, Variable time step methods for one dimensional Stefan problem with mixed boundary condition, Int. J. Heat Mass Transfer. vol. 24;
3. 食品冻干循环压力法研究,罗文林,华中理工大学硕士论文;
4. 计算传热学,郭宽良等编著,中国科学技术出版社,1988 年;
5. 数值传热学,陶文铨编著,西安交通大学出版社,1988 年;
6. 食品冻干中的热质传递特性和最佳升华压力,程江等,制冷学报 94.1;
7. 美 R. B. 基伊,干燥原理及运用,上海科学技术出版社;
8. J. D. Mellor, Fundamental of Freeze-Drying Academic Press. London, New York, San Francisco, 1978.

## Numerical Simulation and Experimental Research on Freeze Drying of Beef

Gu Zhongping

### Abstract

In this paper, a theoretical model of freeze drying of beef with radiation condition was proposed and a "modified variable time step" method was used to simulate the process of freeze drying. Temperature distribution curves are obtained at different time. The surface pressure and temperature distribution curves are plotted with respect to time. Furthermore, experimental research is carried out in order to find out the appropriate processing progress of vacuum freeze drying of beef.

Keywords: vacuum freeze drying      numerical simulation      beef

## 一类函数图像的 Bouligand 维数

张玉民

(数学系)

## 摘 要

本文用分段函数定义了一类周期级数,给出了其函数图像 Bouligand 维数的计算公式。

关键词 Bouligand 维数;分段函数;周期级数基函数。

## 1 引入与记号

众所周知,函数图像的 Bouligand 维数在很多学科中有应用[1,2]。正因为如此,近来越来越多学者研究了函数图像的 Bouligand 维数[3,4],其中所讨论的函数是用连续可导的周期函数作为基函数来定义的。本文讨论了另一类函数图像的 Bouligand 维数,该函数是用连续但不是处处可导的分段函数作为基函数来定义的。本文定义的函数为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(s-2)k} g(2^k x) \quad (1)$$

其中  $1 < s < 2, 0 \leq x \leq 1, g(x)$  如下:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & x \in [0, \varepsilon] \\ 1 & x \in [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon] \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - \frac{1}{2}) & x \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon] \\ -1 & x \in [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon] \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - 1) & x \in [1 - \varepsilon, 1] \end{cases}$$

这里  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}, g(x)$  为周期为 1 的周期函数。

本文采用以下记号:

设  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  为平面上非空有界闭集。对  $\delta > 0$ , 用

$$G(\delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x', y') \in G, \text{ 使 } d((x', y'), (x, y)) \leq \delta\}$$

表示  $G$  的  $\delta$  平行面,其中  $d((x', y'), (x, y))$  表示点  $(x', y')$  到点  $(x, y)$  的欧氏距离。用

$B(e, \delta)$  表示  $\mathbb{R}^2$  中以  $e$  为中心,  $\delta$  为半径的开圆盘,记

$$N_\delta(G) = \min \{N : \bigcup_{i=1}^N B(e_i, \delta) \supset G\}$$

用  $|G(\delta)|_2$  表示  $G(\delta)$  的二维 Lebesgue 测度, 用同如下定义  $G$  的 Bouligand 维数

$$\dim_B G = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(G)}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( 2 + \frac{\log |G(\delta)|_2}{-\log \delta} \right) \quad (2)$$

由文[3]知, 如果极限

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( 2 + \frac{\log |G(2^{-n})|_2}{-\log (2^{-n})} \right) \quad (3)$$

存在, 则(2)成立且  $\dim_B G$  等于(3)的值。

## 2 主要结果及证明

定理: 设  $0 < s < 2$ ,  $G_s(f) = \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$ , 则  $\dim_B G_s(f) = s$ , 其中  $f(x)$  形如(1)。

证明: 分两步进行证明。

一、证明  $\dim_B G_s(f) \leq s$ 。

记  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n 2^{s-2k} g(2^k x)$ , 则

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(s-2)k} g(2^k x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(s-2)k} \\ &= C_1 \cdot 2^{(s-2)n} \end{aligned}$$

其中  $C_1 = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(s-2)j}$ 。设

$$M_n = \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 1], |y - f_n(x)| \leq C_1 \cdot 2^{(s-2)n}\}$$

显然  $G_s(f_n) \subset M_n$ 。  $M_n$  的面积为  $2C_1 \cdot 2^{n(s-2)} \cdot m[0, 1] = 2C_1 \cdot 2^{n(s-2)}$  含于  $M_n$  内部的  $\delta$ -网正方形中的正方形个数最多为  $2C_1 \cdot 2^{n(s-2)} / \delta^2$ 。  $M_n$  的边界长约

$$2tn + 4C_1 \cdot 2^{n(s-2)}$$

其中  $t_n$  为  $G_s(f_n)$  在  $[0, 1]$  上的长度, 则由文[3]可知, 与边界相交的  $\delta$ -网正方形最多有

$$\lceil [9(2t_n + 4C_1 \cdot 2^{n(s-2)}) / \delta] + 1 \rceil \quad ([\ ] \text{ 在此为取整})$$

个,  $f_n(x)$  要  $[0, 1]$  上几乎处处可导, 从而

$$\begin{aligned} t_n &= \int_{[0, 1]} \sqrt{1 + (f'_n(x))^2} dx \\ &\leq \int_{[0, 1]} (1 + |f'_n(x)|) dx \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n 2^{(s-1)k} \int_{[0, 1]} |g'(y)|_{y=2^k x} dx \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n 2^{(s-1)k} \int_{2^k[0, 1]} |g'(y)| \frac{dy}{2^k} \end{aligned}$$

经初等计算可得  $\int_{z^*[0,1]} |g'(y)| \frac{dy}{2^k} = 4$ , 从而

$$t_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n 2^{(s-1)k} \cdot 4 \\ \leq C_2 \cdot 2^{n(s-1)}$$

其中  $C_2$  是与  $n$  无关的常数.

与  $M_n$  相交的  $\delta$ -网正方形个数记为  $N_\delta(f)$ , 则

$$N_\delta(f) \leq 2C_1 \cdot 2^{n(s-2)}/\delta^2 + 9(2t_n + 4C_1 \cdot 2^{n(s-2)})/\delta + 1 \\ \leq (C_3 \cdot 2^{n(s-2)} + C_4 \cdot 2^{n(s-1)})/\delta^2$$

不妨令  $2^{-n} < \delta \leq 2^{-n+1}$ , 则

$$\dim_B G_s(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\log N_\delta(f)}{-\log \delta} \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\log (C_3 \cdot 2^{n(s-2)} + C_4 \cdot 2^{n(s-1)}) - 2\log \delta}{-\log \delta} \\ = 2 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\log (C_3 \cdot 2^{n(s-2)} + C_4 \cdot 2^{n(s-1)} \cdot 2^{-n+1})}{-\log 2^{-n}} \\ = s$$

上界证毕.

二、证明  $\dim_B G_s(f) \geq s$ .

对非负整数  $n, p$ , 令

$$J(p, n) = [2^{-n-1}(p - 2^{-1}), 2^{-n-1}(p + 2^{-1})],$$

$$f(J(p, n)) = [a_{n,p}, b_{n,p}],$$

$$G(n, p) = (J(p, n) \times R) \cap G_s(2^{-n-1}),$$

其中  $G_s(2^{-n-1})$  表示  $G_s(f)$  的  $2^{-n-1}$  平行面, 则有

$$G_s(2^{-n-1}) \supset \bigcup_{p=1}^{2^n-1} G(n, p).$$

由于  $J(p, n)$  ( $p=1, 2, \dots, 2^n-1$ ) 的内部互不相交, 有

$$|G_s(2^{-n-1})|_2 \geq \sum_{p=1}^{2^n-1} |G(n, p)|_2.$$

对任何正整数  $i$ , 有

$$b_{n,p} - a_{n,p} \geq |f(2^{-n-1}(p + 2^{-i})) - f(2^{-n-1}(p - 2^{-i}))| \\ \geq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(s-2)k} (g(2^{k-n-1}(p + 2^{-i})) - g(2^{k-n-1}(p - 2^{-i}))) \right| \\ = \left| \sum_{k=1}^i 2^{(s-2)k} (g(2^{k-n-1}(p + 2^{-i})) - g(2^{k-n-1}(p - 2^{-i}))) \right| \\ = \sum_{k=n+1}^{n+i-1} 2^{(s-2)k} \cdot 2g(2^{k-n-i-1}) \\ = \sum_{k=1}^i 2^{(s-2)k} |g(2^{k-n-1}(p + 2^{-i})) - g(2^{k-n-1}(p - 2^{-i}))| \quad (4)$$

取  $i$ , 使  $2^{-i} \leq \varepsilon$ , 则当  $i > -\log_2 \varepsilon$  时, (4) 变为

$$\begin{aligned}
 b_{n,p} - a_{n,p} &\geq \sum_{k=s+1}^{n+i-1} 2^{(s-2)k} \cdot 2g(2^{k-n-i-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^i 2^{(s-2)k} \cdot \frac{1}{\varepsilon} 2^{k-n-i} \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} 2^{(s-2)(k+s)} \cdot 2g(2^{k-i}) \\
 &= \sum_{k=1}^i 2^{(s-2)k} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2^{k-n-i} \quad (5)
 \end{aligned}$$

下面分两步计算(5)

1°. 令  $\varepsilon = 2^{-Z}$  ( $Z \geq 2$ ,  $Z$  为正整数)。

当  $2^{m-i-1} \leq 2^{-Z}$  时,  $m \leq i+1-Z$ , 有

$$\begin{aligned}
 b_{n,p} - a_{n,p} &\geq \sum_{m=1}^{i+1-Z} 2^{(s-2)(m+n)} \cdot 2^{Z+m-1} \\
 &+ \sum_{m=i+2-Z}^{i-1} 2^{(s-2)(m+n)+1} \\
 &- \sum_{k=1}^n 2^{(s-2)k} \cdot 2^Z \cdot 2^{k-n-1} \\
 &= 2^{(s-2)n+Z-i} \cdot \frac{2^{s-1}(1-2^{(s-1)(i+1-s)})}{1-2^{s-1}} \\
 &+ 2^{(s-2)n+1} \cdot \frac{2^{(s-2)(i+2-Z)}(1-2^{(s-2)(Z-2)})}{1-2^{s-2}} \\
 &- 2^{Z-n-i} \cdot \frac{2^{s-1}(1-2^{(s-1)n})}{1-2^{s-1}} \\
 &= \frac{2^{(s-2)n-i}}{1-2^{s-1}} \{ 2^{(s-1)i}(-2^{Z+(s-1)(2-Z)} + \\
 &\frac{2^{(s-2)} - 2^{(2-Z)+1}(1-2^{(s-2)(Z-2)})(1-2^{(s-1)})}{1-2^{s-2}}) \} \\
 &+ 2^{Z+s} - 2^{(1-s)n+Z+s-1} \} \\
 &\geq \frac{2^{(s-2)n-i}}{1-2^{s-1}} \{ 2^{(s-1)i}(-2^{Z+(s-1)(2-Z)} \\
 &+ \frac{2^{(s-2)}(2-Z)+1(1-2^{(s-2)(Z-2)})(1-2^{s-1})}{1-2^{s-2}}) \\
 &+ 2^{Z+s} - 2^Z \} \\
 &= 2^{(s-2)n-i} \cdot A(i) \quad (6)
 \end{aligned}$$

显然  $A(i)$  是  $i$  的增函数, 从而可取适当的  $i(s)$  使得当  $i > i(s)$  时  $A(i) \geq 1$ , 从而(6)式变为

$$b_{n,p} - a_{n,p} \geq 2^{(s-2)n-i}$$

2°. 令  $2^{-Z-1} < \varepsilon < 2^{-Z}$  ( $Z$  条件同上)

考虑  $2^{m-i-1} < 2^{-Z-1}$  及  $2^{m-i-1} \geq 2^{-Z}$ , 得

$$m < i - Z \text{ 及 } m \geq i + 1 - Z$$

从而有

$$\begin{aligned}
 b_{n_1 p} - a_{n_1 p} &\geq \sum_{m=1}^{i-Z} 2^{(s-2)(m+a)} \cdot 2^{m-i+Z} \\
 &\quad + \sum_{m=i+1-Z}^{i-1} 2^{(s-2)(m+a)+1} \\
 &\quad - \sum_{k=1}^s 2^{(s-2)k} \cdot 2^{k-s-i+Z+1}
 \end{aligned}$$

与  $1^\circ$  类似的计算得表达式 (7)。

由  $1^\circ, 2^\circ$  对  $\epsilon \in (0, \frac{1}{4})$  及适当的  $i$ , 总有 (7) 成立。

因  $f(x)$  连续, 任取  $y \in [a_{n,p}, b_{n,p}]$ , 有  $x \in J(p, n)$  使得  $f(x) = y$  成立。令

$$J_{p,n}(y) = [x - 2^{-s-1}, x + 2^{-s-1}] \cap J(p, n)$$

则

$$\begin{aligned}
 |G(n, p)|_2 \int_{a_{n,p}}^{b_{n,p}} |J_{p,n}(y)|_1 dy \\
 &\geq 2^{-s-2} (b_{n,p} - a_{n,p}) \\
 &\geq 2^{-s-2} \cdot 2^{(s-2)s-i}
 \end{aligned}$$

其中,  $|J_{p,n}(y)|_1$  表示区间的长度。从而

$$\begin{aligned}
 |G(2^{-s-1})|_2 &\geq (2^s - 1) \cdot 2^{-s-2} \cdot 2^{(s-2)s-i} \\
 &\geq 2^{(s-2)s-i-3}
 \end{aligned}$$

$$\dim_B G_s(f) = 2 + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-\log |G(2^{-s-1})|_2}{-\log(2^{-s-1})}$$

$$2 + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-\log 2^{(s-2)s-i-3}}{-\log(2^{-s-1})}$$

$$= s$$

由一、二可知

$$\dim_B G_s(f) = s.$$

成立。

### 参考文献

1. Mandelbrot, B. B. The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982.
2. Tricot, C. Fractal Geometry and Analysis (eds. Blair, J. Dubuc, S.), 1989, 367—404.
3. 孙道椿, 余家荣, 缺项或随机三角级数所表示的断的 Bouligand 维数 中国科学 A<sub>2</sub> (1992) 113—121.
4. K. 法尔科内著 曾文曲, 刘世耀译 分形几何—数学基及其应用, 1991.

# The Bouligand Dimension of a class Function

Zhang Yumin

## Abstract

In this paper, a class of periodic function series is defined by using some piecewise function, then a computational formula of bouligand dimension of graph as above defined periodic function series is given.

**Keywords:** Bouligand dimesion, Periodic function series, Piecewise function, Basis function.

# 一种用于有限元分析中的快速消隐的画家算法

刘理

(力学系)

## 摘 要

本文研究并实现了有限元分析<sup>[1]</sup>中隐藏面消隐的画家算法,这一算法通过各单元面的点集排序,迅速找出整个模型的可见边界面,然后采用了一种动态的排序算法实现快速消隐。

关键词:隐藏面 优先级 消隐 画家算法

## 1 引言

消隐问题在计算机图形学发展中占有重要的地位,要得到三维物体的真实图形,常常需要隐去消隐线或消隐面。目前提出的数百种消隐算法,主要可分为两大类<sup>[5]</sup>,即象空间算法和物体空间算法。

象空间算法中有代表性的为 Warnock 面积细分算法, Z-buffer 算法, 扫描线算法及光线追踪算法, 此算法的计算与检验都相当复杂, 故非常耗时, Z-buffer 算法和光线追踪法, 对象空间的每一个像素都计算出各显示对象的优先级, 需要大量的内存空间和计算时间, 通常要靠硬件实现。扫描线延算法则利用显示对象在扫描线方向的相关性, 只需计算各多边形与扫描线交点上的优先级即可, 故效率比 Z-buffer 算法有所提高。

物体空间算法<sup>[4]</sup>中具有代表性的有 Roberts 算法。物体空间算法适用于矢量图形消隐, 但由于需精确地直接确定组成物体的多边形的各棱边之间的遮挡关系及遮挡量, 因此计算量大, 效率低。

画家算法属于上述两类算法混合而成的消隐面消隐, 此算法以某些步骤在象空间中完成, 另一些步骤是在物体空间中进行的。画家算法充分利用显示对象的区域相关性, 即对可见性的判断不是以像素为单位, 而是以多边形为单位, 对各面进行排序以决定显示顺序, 由合理的显示顺序实现自动隐藏面消隐, 得到经过消隐处理的立体真实图形。

在有限元分析中, 显示消隐的三维实体, 对有限元前处理的网格划分, 数据的正确性检验和有限元后处理中的结果合理性检验都是非常有效的方法。对于三维物体, 离散后的单元多, 所含的点、线、面的数量远远超过一般实体造型的情况, 这就使消隐算法的效率问题显得十分重要。本文针对有限元分析中的特点, 提出并实现了一种适用于有限元三维实体和三维空间曲面隐藏面消除的画家算法。

## 2 画家算法的实现

对有限元分析中的各单位进行隐藏面消隐算法,实质上只需对边界面或可见边界面进行动态排序。因此应先将全部边界面搜索出来,为了提高搜索效率,本文采取了可见面,不可见面,单元面点集集合运算的高效边界面搜索方法,该算法的实现是:先将所有单元按表面外法矢区别为可见面和不可见面,设单元的可见面集合为  $f_s$ ,不可见面集合为  $f_n$ ,边界面集合为  $f_b$ ,如果某面  $P \in f_b$ ,则对于  $P \in f_n$ ,必有  $P \in f_s$ 。在运算时,需先对单元体表面上的点集按节点号作由小到大的排序,再对单元面的排序点集作上述判断,即可很快完成边界面的搜索工作。本文的消隐面动态排序只需处理  $f_b$  中的可见面,因而可使消隐计算量大为减少。

Newell<sup>[3]</sup>算法经过改进后用于有限元单元的动态排序算法如下:(假定视点在 Z 轴正方向无穷远)

1. 按多边形的 Zmin 对多边形作初始排序,使 Zmin 最小者排在首位。
2. 在初始排序表上,对一个单元体表面 P 在 Z 方向上剔除不可能被 P 遮挡的表面,而剩下的是可能被 P 遮挡的多边形集合  $\{Q\}$ :  $Q = \{Q_i | Z_{\max}^P < Z_{\min}^Q\}$ ,  $Z_{\max}^P$ : 面 P 的距视点的最近点,  $Z_{\min}^Q$  是面  $Q_i$  的距视点的最近点。
3. 对上一步选出的  $\{Q\}$  进行动态排序,由于  $\{Q\}$  中的元素可能被 P 遮挡,为了确定实际上是否遮挡,需进行下述计算:
  - (a) P 和 Q 的最小方盒子是否在 x 方向分离
  - (b) P 和 Q 的最小方盒子是否在 y 方向分离
  - (c) P 上各点是否在 Q 所在平面的远离视点一侧
  - (d) Q 上各点是否在 P 所在平面的靠近视点一侧
  - (e) P 和 Q 的投影是否分离

对集合  $\{Q\}$  中的每一个元素进行上述测试,如果有一步测试成功,则停止测试,即 P 不会遮挡  $\{Q\}$  中的元素,排序成功。若 P 和  $\{Q\}$  中的某个元素不能通过上述测试,就交换 P、Q,并将在表中的 Q 作上标记。

4. 若执行(3)以后仍需要交换 P、Q,则说明交叉覆盖的情况可能发生,这时将 P 沿 Q 所在平面分成两个平面(此时 P 必在 Q 平面两侧),去掉原来表中的 P,将这两个新的平面插入到表中适当位置,使其保持 Zmin 排序的性质,对重新形成的表,重新执行(2)。

5. 按照动态排序最后生成的显示顺序面表进行显示,即可完成消隐。

步骤(3)中的第(e)类测试计算工作量较大,本文利用有限元的外表面一般情况下为三角形或四边形的特性,可以减少求交的计算量和复杂性。在某些特殊复杂的变形情况下,动态排序中可能经常碰到交叉覆盖的情形,此时就需进行步骤(四),先计算出两个平面的交线,将其中的 P 面沿 Q 所在平面一分为二,动态排序就可以成功。