新课程师资培训系列教材

主审 张贞伦 李学军

新课程 资源拓展与探索

（高中数学）

◇陈　辉 叶立军 主编

浙江大學出版社

新课程

资源拓展与探索

（高中数学）

●新课程师资培训系列教材

主审　张贞伦　李学军

新课程资源拓展与探索

（高中数学）

陈　辉　叶立军　主编

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

新课程资源拓展与探索. 高中数学 / 陈辉，叶立军主编. —杭州：浙江大学出版社，2005.5
（新课程师资培训系列教材）
ISBN 7-308-04163-8

Ⅰ. 新... Ⅱ. ①陈...②叶... Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 021819 号

责任编辑 阮海潮 郑金松
出版发行 浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027）
（电话：0571-88273329 88273761（传真））
（网址：http://www.zjupress.com）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江省良渚印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 22.00
字　　数 443 千
版 印 次 2005 年 5 月第 1 版 2005 年 5 月第 1 次印刷
印　　数 0001—5000
书　　号 ISBN 7-308-04163-8/G・850
定　　价 33.00 元

前　言

时代已经步入21世纪，义务教育阶段的数学课程标准已经开始全面实施，《普通高中数学课程标准（实验）》也已经于2003年制订，并于2004年9月在山东、海南、宁夏、广东开始实验。在这场史无前例的课程改革中，数学教师是实施数学新课程标准的主体，是推行数学课程改革的关键。新的数学课程需要新型的数学教师。教师教育要为基础教育课程改革与发展提供良好的师资保证。2001年6月，教育部颁布的《基础教育课程改革纲要（试行）》特别强调，“承担基础教育师资培养和培训任务的高等院校和培训机构应根据基础教育课程改革的目标与内容，调整培养目标、专业设置、课程结构，改革教学方法”。

因此，为了保证这场基础教育改革的顺利进行，有必要对在职教师进行数学课程改革的培训，进一步推进中小学教师继续教育工作，也有必要根据数学新课程改革的目标与内容，重新调整各级各类师范院校的培养目标、专业设置、课程结构，改革教学方法，对师范生进行有关数学新课程的专题教育，使这些未来的教师们了解数学新课程、理解数学新课程，掌握数学新课程的理念和实施方法，不断提升自身素养，为今后在教师岗位上实施数学新课程做好观念、知识和能力上的准备。

杭州师范学院数学系历来十分重视教学为基础教育服务，自2000年先后在杭州市康桥中学、乐清虹桥中学等学校建立了数学新课程改革的实验基地，开展了一系列新课程实验。为了充分体现师范教育为基础教育服务，我们在研究《义务教育阶段的数学课程标准》和《高中数学课程标准（实验）》的基础上，组织编写了这本《新课程资源拓展与探索（高中数学）》。本书针对《普通高中数学课程标准（实验）》中的选修模块内容，并对这些内容进行了资源的拓展与探索，为广大数学教师讲授这些模块时提供了必需的资源，而这些选修模块中有不少内容，数学教师以前是没有涉及的，因此，对教师来说很有学习的必要；同时，也为师范生了解数学课程改革的基本精神，把握基础教育课程改革的基本理念打开了一个窗口。通

过本书的学习，广大数学教师和师范生，能够把这些基本精神和理念创造性地落实到今后的教育教学实践中去，能够从时代所赋予的历史使命出发，切实理解基础教育课程改革的精神，努力学习新课程的内容，为开创基础教育课程改革和教师教育改革发展的新局面作出自己应有的贡献。

本书在框架设计、内容安排、呈现方式及陈述方式等方面均体现了数学新课程标准的理念，内容既反映数学理论前沿，初步形成了一定的理论体系，又包含许多新的改革实验成果，贴近课堂教学。在编写过程中，努力形成三个特色：一、深入浅出地介绍了数学新课程的思想创新，有利于广大数学教师形成先进的教育理念；二、全面展示数学新课程的实施思路，有利于培养广大数学教师的教育实践能力；三、着力反映数学课程改革中的问题和探索方向，有利于打造数学教师反思和探究的品质。

本书由陈辉、叶立军任主编，全书各章的编写分工如下：王学武（第1、2章）、叶立军（第3章）、沈忠华（第4、14章）、蔡开仁（第5、6章）、陈辉（第7、8、11章）、田正平（第9章）、沈传龙（第10、12章）、唐少芳（第13、17章）、林永伟（第15章）、杜玲玲（第16、18章）。乐清虹桥中学校长张贞伦先生、杭州市教研室李学军先生审阅了全书，提出了许多具体的修改意见。在本书的编写过程中，得到了乐清虹桥中学、杭州市康桥中学、杭州市洪家中学等学校的大力支持，在此深表感谢。同时，感谢责任编辑阮海潮先生为本书的出版所付出的辛勤劳动。

在本书的编写过程中参阅了许多专家学者的著作和研究成果，在此表示衷心的感谢。

由于本书作者学识有限，时间仓促，书中难免有错漏之处，恳请各位专家、广大师生批评指正。

主　编

于西子湖畔

2005年4月

目　录

第 1 章　坐标系与参数方程

坐标系是解析几何的基础.在坐标系中,可以用有序实数组确定点的位置,进而用方程刻画几何图形.为便于用代数的方法刻画几何图形或描述自然现象,我们需要建立不同的坐标系.极坐标系、柱面坐标系、球面坐标系等是不同于直角坐标系的坐标系,对于有些几何图形,选用不同的坐标系可以使建立的方程更加简单、方便.

参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程,是曲线在同一坐标系下的又一种表示形式.某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便.学习参数方程有助于学生进一步体会解决问题时数学方法的灵活多变.

1.1　平面直角坐标系与极坐标系

定义 1.1　把平面上的两条互相垂直的且有方向和长度单位的直线称为一个直角坐标系,记为 Oxy,O 是两直线的交点,也称为平面直角坐标系的原点,数对 (x,y) 为平面上点的坐标,x 为横坐标,y 为纵坐标.

在平面上取定了直角坐标系以后,平面上的点便与全体有序实数对之间建立了一一对应关系,也就是说,在给定坐标系下,平面上的点确定了惟一的一对有顺序的实数对;反之,任意给一对有顺序的实数对,它也确定了平面上惟一的一个点.

平面上的直角坐标系按 x 轴和 y 轴的选取方向不同可以分成两大类:右手系和左手系.

右手系:如果把 x 轴按逆时针方向绕 O 点转 $90°$ 而与 y 轴重合,且它们的方向一致,那么这样的坐标系就称右手系.

左手系:如果把 x 轴按逆时针方向绕 O 点转 $90°$ 而与 y 轴重合,它们的方向相反,那么这样的坐标系称左手系.

坐标轴把平面分成四部分,称为四个象限.按在其中的坐标的符号 $(+,+)$,$(-,+)$,$(-,-)$,$(+,-)$ 分别称为第一、第二、第三和第四象限,坐标轴上的点不属于任何象限.

定理 1.1　坐标平面上全体点的集合与全体有序实数偶的集合之间存在一一对应关系.

有了这个定理，才能给出平面上的（笛卡儿）直角坐标的概念.

定理 1.2 设 $M(a,b)$ 是平面上的任意一点，则 M 关于 x 轴的对称点 M_1 的坐标为 $(a,-b)$，关于 y 轴的对称点 M_2 的坐标为 $(-a,b)$，关于原点 O 的对称点 M_0 的坐标为 $(-a,-b)$，关于平分坐标轴的夹角并且位于第一、第三象限的直线的对称点 M' 的坐标为 (b,a).

定义 1.2 在平面上取一定点 O，以 O 为端点引射线 Ox，在 Ox 上取定一点 E，把 $|OE|$ 作为长度单位，E 叫做单位点，再确定度量角度的正方向（通常取逆时针方向）. 这样就说在平面上建立了一个极坐标系. 定点叫做这个极坐标系的极点，定射线 Ox 叫做这个极坐标系的极轴.

设 M 为极坐标平面上的一点，(1) 若 M 不重合于极点 O，作射线 OM，设 $|OM|=\rho$，这里 $\rho>0$. Ox 与 OM 的夹角有无限多个值，其中的一个值为 θ（弧度），则这个无限多个值可表示为 $\theta+2n\pi$（n 为整数）.

令无限多个有序实数偶 $(\rho,\theta+2n\pi)$ 和点 M 对应. 不仅如此，作出射线 OM 的反向延长线 OM'，Ox 和 OM' 的夹角有无限多个值，其中的一个值为 $\theta+\pi$，则这无限多个值可表示为 $\theta+(2n+1)\pi$（n 为整数）. 令无限多个有序实数偶 $(-\rho,\theta+(2n+1)\pi)$ 和点 M 对应. 和点 M 对应的这两组有序实数偶的表达式也可合并为一个：$((-1)^k\rho,\theta+k\pi)$（k 为整数）.

(2) 若点 M 重合于极点 O，则 $|OM|=0$，射线 OM 方向不定. 令有序实数偶 $(0,\theta)$（θ 为任意角度）和点 M 对应. 在以上的讨论中，和点 M 对应的每个有序实数偶都叫做点 M 的极坐标. 数偶中的第一个数叫做点 M 的极径（极半径），数偶中的第二个数叫做点 M 的极角.

说明 1.1 点 M 的极坐标表达式中的 ρ 不限于是正数，可以是负数.

再看反面的问题. 设已知一点 M 的极坐标 (ρ,θ)，怎样确定点 M 的位置.

分三种情形：

(1) 当 $\rho>0$ 时，作射线 OM，使 Ox 与 OM 的夹角为 θ，在射线 OM 上取点 M，使 $|OM|=\rho$，则 M 的极坐标为 (ρ,θ)，M 为所求的点.

(2) 当 $\rho<0$ 时，作射线 OM'，使 Ox 与 OM' 的夹角为 θ，在射线 OM' 的反向延长线上取点 M，使 $|OM|=\rho$，则 M 的极坐标为 (ρ,θ)，M 为所求的点.

(3) 当 $\rho=0$ 时，不论 θ 的值如何，极坐标 (ρ,θ) 确定的点 M 重合于极点 O.

几个基本公式：

1. 平面直角坐标系下的两点间的距离

定理 1.3 点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 间的距离为

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

2. 平面直角坐标系下的线段的定比分点

定理 1.4 设有向线段$\overline{AB}$的起点 A 和终点 B 的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，分点 M 分$\overline{AB}$的比为 $\lambda=AM:MB$,则分点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{2},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{2}.$$

3. 平面直角坐标系下的三角形的面积

定理 1.5 若三角形的三个顶点的坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),则这个三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值.

定理 1.6 三个点的坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),这三点共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4. 极坐标下的两点间的距离

定理 1.7 在极坐标系中,点 $A(\rho_1,\theta_1)$和 $B(\rho_2,\theta_2)$间的距离为

$$|AB|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}.$$

5. 极坐标下的三角形的面积

定理 1.8 若三角形的三个顶点的极坐标分别为(ρ_1,θ_1),(ρ_2,θ_2),(ρ_3,θ_3),则这个三角形的面积为

$$\frac{1}{2}[\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)]$$

的绝对值.

说明 1.2 由于平面直角坐标系与极坐标系是中学生熟悉的内容,所以该部分不再花更多篇幅论述.

说明 1.3 如果约定 $\rho>0$,且 $0\leqslant\theta<2\pi$ 或 $-\pi<\theta\leqslant\pi$,那么除了极点外,平面内的点和极坐标是一一对应的.

1.2 极坐标和直角坐标的互化

前面我们学习了直角坐标系和极坐标系,这是两种不同的坐标系,但是它们在一

定的条件下可以互化.

如图 1-1 所示，使直角坐标系的原点和极坐标系的极点重合，x 轴的正半轴和极轴重合，并且在两个坐标系中取相同的长度单位. 设 P 是平面内任意一点，P 点的直角坐标是(x,y)，它的极坐标是(ρ,θ). 过 P 作 PM 垂直 Ox，则 $OM=x$，$MP=y$，$OP=\rho$，$\angle xOP=\theta$，由此可得到由极坐标化为直角坐标的公式

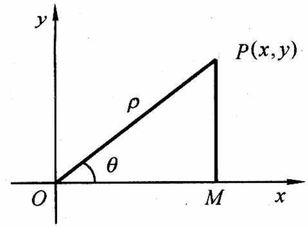

图 1-1

$$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta; \tag{2.1}$$

反过来，从公式(2.1)可以得到由直角坐标化为极坐标的公式

$$\rho^2=x^2+y^2, \tan\theta=\frac{y}{x}. \tag{2.2}$$

说明 1.4 在公式(2.2)中，一般情况下，ρ 取正值，由 $\tan\theta$ 确定 θ 角时，根据 P 所在的象限取最小正角.

【例 1.1】 把 P 和 Q 两点的极坐标$(8,\frac{\pi}{3})$和$(-4,-225°)$化为直角坐标.

解 设 P 和 Q 两点的直角坐标分别是(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，由公式(2.1)，得

$$x_1=8\cos\frac{\pi}{3}=4, y_1=8\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3},$$

所以 P 点的直角坐标为$(4,4\sqrt{3})$.

同理

$$x_2=-4\cos(-225°)=2\sqrt{2}, y_2=-4\sin(-225°)=-2\sqrt{2},$$

所以 Q 点的直角坐标为$(2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$.

【例 1.2】 在直角坐标系中有 $M(-3\sqrt{3},3)$，$N(-4,-3)$两点，求它们相应的极坐标.

解 设 M 和 N 两点的极坐标分别为(ρ_1,θ_1)，(ρ_2,θ_2)，由公式(2.2)得

$$\rho_1=\sqrt{(-3\sqrt{3})^2+3^2}=6, \tan\theta_1=\frac{3}{-3\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

因为 M 点在第二象限，所以 $\theta_1=\frac{5\pi}{6}$. 因此，M 点的极坐标为$(6,\frac{5\pi}{6})$.

同理

$$\rho_2=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5, \tan\theta_2=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4},$$

因为 N 点在第三象限，所以 N 点的极坐标为$(5,\pi+\arctan\frac{3}{4})$.

【例 1.3】 把下列直角坐标方程化为极坐标方程：

(1)$x^2+y^2-4x=0$，　　　　　　　　(2)$\sqrt{3}x-y=0$，

(3)$y^2=6x$，　　　　　　　　　　(4)$x^2-y^2=25$.

解　(1)将公式(2.1)代入方程，得

$$(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2-4\rho\cos\theta=0,$$

整理得

$$\rho(\rho-4\cos\theta)=0\text{，即 }\rho=0, \rho=4\cos\theta,$$

这里 $\rho=0$ 表示极点，而极点的坐标也满足方程 $\rho=4\cos\theta$，所以得到的极坐标方程为

$$\rho=4\cos\theta.$$

说明 1.5　第(2)、(3)、(4)题的解法和第(1)题解法相同，所以略.

【例 1.4】　把下列极坐标方程化为直角坐标方程

(1)$\rho=10\sin\theta$，　　　　　　　　(2)$\rho^2=a^2\cos2\theta$，

(3)$\rho=\dfrac{4}{1-3\cos\theta}$，　　　　　　　(4)$\rho=a\sec\theta+b$.

解　(1)由公式(2.1)可知，$\sin\theta=\dfrac{y}{\rho}$，代入原方程，得 $\rho=10\dfrac{y}{\rho}$，就是 $\rho^2=10y$，又因为 $\rho^2=x^2+y^2$，所以所求方程是

$$x^2+y^2-10y=0.$$

说明 1.6　第(2)、(3)、(4)题解略.

1.3　空间直角坐标系、柱面坐标系、球面坐标系

定义 1.3　过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般有相同的度量单位，这三条数轴分别叫做 Ox 轴(横轴)、Oy 轴(纵轴)、Oz 轴(竖轴)，这就建立了空间直角坐标系. 点 O 叫做坐标原点，数轴 Ox，Oy，Oz 统称为坐标轴. 根据方向不同分为左手系、右手系.

左手系：如果将左手的拇指和食指分别指向 Ox 轴、Oy 轴的正方向，则中指所指的方向为 Oz 轴的正方向，这样的坐标系叫做左手坐标系.

右手系：如果将右手的拇指和食指分别指向 Ox 轴、Oy 轴的正方向，则中指所指的方向为 Oz 轴的正方向，这样的坐标系叫做右手坐标系.

说明 1.7　通常所说的空间直角坐标系都是右手系，如图 1-2 所示.

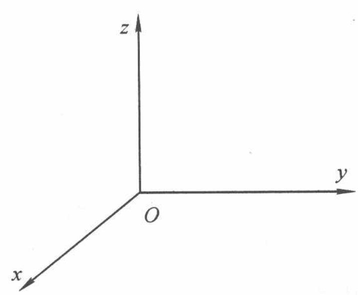

图 1-2　右手系空间直角坐标系

任意两个坐标轴可以确定一个平面，如 Ox 轴和

Oy 轴确定 xOy 平面，Oy 轴和 Oz 轴确定 yOz 平面，Ox 轴和 Oz 轴确定 zOx 平面. 这三个面统称为坐标面. 三个坐标面将空间分成八个部分，每个部分称为一个卦限，把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第Ⅰ卦限，在 xOy 平面的上部，依反时针顺序得第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，在 xOy 平面的下部与第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，依反时针顺序得第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限(图 1-3). 取定空间直角坐标系后，就可以建立空间的点和数组之间的一一对应关系，在 M 点作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴，y 轴及 z 轴的交点依次为 P,Q,R，设 P,Q,R 在三个坐标轴上的坐标依次为 x,y,z，这样，空间一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 (x,y,z)，该有序数组称为 M 的直角坐标，其中 x 称为点 M 的横坐标，y 称为点 M 的纵坐标，z 称为点 M 的竖坐标，记为 $M(x,y,z)$.

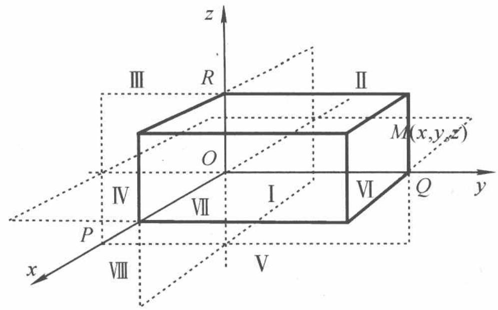

图 1-3

反过来，给定了数组 (x,y,z)，我们依次在 x 轴，y 轴及 z 轴上取与 x,y,z 相应的点 P,Q,R，然后过点 P,Q,R 分别作平面分别垂直于 x 轴，y 轴及 z 轴，这三个平面的交点 M，就是以数组 (x,y,z) 为坐标的点.

定义 1.4 如图 1-4 所示，空间的点 $M(x,y,z)$ 可以用另一种坐标 (r,θ,z) 来表示，此时称 (r,θ,z) 为点 M 的柱面坐标.

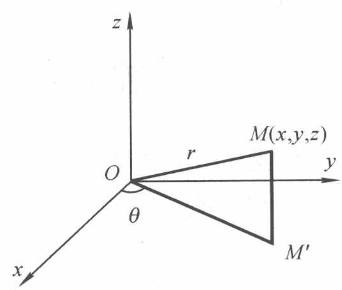

图 1-4 柱面坐标

1. 空间直角坐标和柱面坐标的关系

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \qquad 0\leqslant\theta<2\pi, \\ z=z \end{cases}$$

其中，r 是原点到 M 的距离，θ 是点 M 在 xOy 平面上的投影 M' 与原点的连线与 x 轴的正向所成的夹角(一般限定在 $0\leqslant\theta<2\pi$)，z 是竖坐标，和空间直角坐标系中的 z 相同，具体见图 1-4 所示.

从上面可以看出，空间任意一点都有惟一的柱面坐标与之对应；反之，任意给出的柱面坐标，都可以找到惟一的一点与之对应. 所以在某种意义下，它们的作用是等同的.

我们常见的圆形体育看台，就可以看成一个柱面坐标，排数就是变量 z 的取值，由于是圆形，或者说每个坐位都在看台上，所以 r 可以不予以考虑，θ 是方向或说具

体的某个位置.

定义 1.5 如图 1-5 所示,空间的点 $M(x,y,z)$可以用另一种坐标(r,θ,φ)来表示,此时称(r,θ,φ)为点 M 的球面坐标.

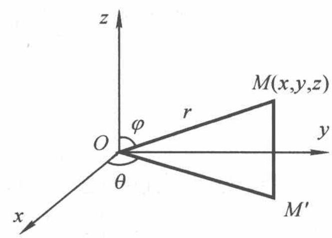

图 1-5 球面坐标

2. 空间直角坐标和球面坐标的关系

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases} \quad 0\leqslant\theta<2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$

其中,r 是原点到 M 的距离,θ 是点 M 在 xOy 平面上的投影 M' 与原点的连线与 x 轴的正向所成的夹角,φ 是 OM 与 z 轴的正向所成的夹角,具体见图 1-5 所示.

用经度和纬度来描述地球的位置就是利用球面坐标,尽管球面坐标由三个量来刻画,但是可以将地球看成一个球,那么 r 相等,所以只要确定 φ,θ,即经度和纬度就可以了.或者所描述的位置都在地球的表面上,所以 r 的大小可以不予以考虑.

说明 1.8 由柱面坐标和球面坐标转化为空间直角坐标相对是容易的;反之,若根据方程组

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$$

解方程中的 r,θ,φ 是难以想像的.通常情况下,我们根据点所处的位置来求柱面坐标或球面坐标系中的坐标.

3. 由空间直角坐标确定柱面坐标和球面坐标的具体方法

由空间直角坐标确定柱面坐标的方法:设空间直角坐标的点是 $M(x,y,z)$,则球面上 M 点的柱面坐标讨论如下(M' 是 M 在 xOy 平面的投影点):

当 M' 落在第一象限: $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arccos\dfrac{|x|}{r},z=z$;

当 M' 落在第二象限: $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\pi-\arccos\dfrac{|x|}{r},z=z$;

当 M' 落在第三象限: $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\pi+\arccos\dfrac{|x|}{r},z=z$;

当 M' 落在第四象限: $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=2\pi-\arccos\dfrac{|x|}{r},z=z$.

说明 1.9 确定球面坐标和柱面坐标的方法相同,这里不再论述.

说明 1.10 关于柱面坐标和球面坐标的作用在求重积分中得以充分体现.

说明 1.11 之所以称上述两个坐标系是柱面坐标和球面坐标,是因为柱面坐标