

古典概率习题分类解答

任 毅 编

安徽省数学会
芜湖教育学院

一九八四年三月

前 言

应用组合数学知识解答的古典概率问题，虽然内容独特，思维抽象，题目多变，自成体系，难度较大，但是王祥坤教授在“概率论基及其应用”中曾经一针见血地指出，实际中许多具体古典型概率问题，可大致归并为三类：（Ⅰ）抽球问题；（Ⅱ）分房问题；（Ⅲ）随机取数问题。正是在这一精辟见解的启发下，我在担任77、78级师范专科“概率论与数理统计”课程的教学工作时，利用教学工作之余，搜集了一些古典概率问题，在当时的各级领导及同学们支持下，油印了一份“古典概率习题分类解答”。其目的：一是帮助初学古典概率的同志提高分析解决古典概率问题的能力，克服解题困难，二是为这些同志毕业后走上工作岗位，担任此项教学工作时提供一点手头可翻阅的资料。

去年十一月，我省合肥、蚌埠、淮南、阜阳、芜湖五所教育学院在淮南市举行第四次教材会议，会上概率统计组全体同志一致希望我将这个材料重印一下，发给五院校学习这门课的学员作为课外阅读材料。根据大家的意见，我将原题解重新修订，选编成现在这个样子，共选编了近三百三十道古典概率习题，分成投球模型，抽球模型，随机取数模型，几何概率模型，独立试验序列模型，间接概率计标模型六大类，和一个模型的活用与一题多解例选。这些习题，根据难易程度的不同，有的给出详细解答，有的略解，有的只给出答数。这样编选分类题解的方法在本人说来，尚属初次尝试，由于本人学识水平有限，手头资料不全，这份材料中可能有很多缺点、错误和不足之处，热忱欢迎看到这份材料的同志们给予批评指正。

衷心感谢对这次重印材料给予极大支持的张福仁、张振龙、杨汉云、罗季重等同志！

安徽省芜湖教育学院 任毅

1984. 3.

目 录

一、投球模型 (又称分房问题, 占位问题)	1
(1) 基本投球问题 (31 题)	2
(2) 两盒问题 (8 题)	13
(3) 有限个编号盒问题 (16 题)	14
(4) 第一类等待时间问题 (3 题)	19
(5) 第二类等待时间问题 (5 题)	19
(6) 连贯问题 (15 题)	21
二、抽球模型	25
(1) 直接计标 (37 题)	26
(2) 加法定理 (18 题)	37
(3) 乘法定理 (15 题)	44
(4) 全概率公式和贝叶斯公式 (8 题)	51
三、随机取数模型	54
(1) 直接计标的问题 (19 题)	54
(2) 利用概率性质定理的问题 (8 题)	60
(3) 较复杂的问题 (6 题)	63
四、几何概型 (14 题)	65
五、独立试验序列模型	71
(1) 独立重复试验 (31 题)	71
(2) 独立试验的一般情形 (2 题)	80
(3) 独立试验概率计标公式与全概率公式, 贝叶斯公式的综合应用 (8 题)	81
(4) 独立试验序列中的等待时间问题 (6 题)	84
六、间接概率计标模型	85

(1) 利用概率运算定理解决的问题 (35 题)	86
(2) 利用母函数 (生成函数) 解决的问题 (12 题)	97
(3) 利用递推关系 (差分方程) 解决的问题 (3 题)	102
(4) 简单微分方程问题 (4 题)	104
(5) 证明恒等式的概率论方法 (6 题)	105
(6) 无限维空间中的概率问题 (9 题)	107

七、模型的活用与一题多解 (8 例)	110
--------------------	-----

八、练习题 (35 题)	115
--------------	-----

一 投球模型

(又称分房问题, 占位问题)

这个模型与各种不同的排列、组合问题联系十分密切, 例如

(1) 将 r 只不同的球投到 n 个不同编号的盒子中, 每个盒子只能进一只球, 不同投法的总数恰为 n 个相异物每次取 r 个不许重复的排列数

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

这里 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$, 并规定 $0! = 1$

(2) 如果每个盒子都可以进任意多只球, 那么将 r 只不同的球投到 n 个不同编号的盒子中, 不同投法的总数就与重复排列数相同, 恰为 n^r 。

(3) 将 r 只 t 种颜色的球投到 n 个不同编号盒子中去, 每盒只能进一球的投法总数恰为 n 个不尽相异物每次取

$r = q_1 + q_2 + \cdots + q_t$ 个的排列数 ($r \leq n$)

$$\frac{n!}{(n-r)! q_1! q_2! \cdots q_t!}$$

其中 q_i 是 r 只球中第 i 种颜色的球只数。

$n = r$ 时, $\frac{n!}{q_1! q_2! \cdots q_t!}$

(4) 将相同颜色的 r 只球投到 n 个不同编号的盒子中, 每个盒子只能进一球, 不同投法的总数恰为 n 个相异物每次取 r 个不许重复的组合数

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(5) 如每个盒子可以进任意多只球, 则 r 只相同颜色的球投到 n 个不同编号盒子中的投法总数恰为 n 个相异物每次取 r 个允许重复的组合数

$$H_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

(6) 将 n 只不同的球投到 n 个不同编号的盒中, 第 t 盒恰有 r_t 个球, ($t=1, 2, \dots, n$, $r_1+r_2+\dots+r_n=n$), 投法总数恰为 n 个相异物的非均匀不编号分组数或均匀编号分组数:

$$C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} \dots C_{n-(r_1+\dots+r_{k-1})}^{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

模型 1. 基本投球问题: 这里介绍直接应用上述 6 个公式来计算概率的基本问题.

1. 将 3 个不同的球 (或称可辨的球) 投入 5 个匣中, 每个球都以 $\frac{1}{5}$ 的概率进入每一个匣中, 且每匣中进球个数不限, 求下列各事件的概率.

(i) 指定某匣是空的; (ii) 某指定 3 匣中各有一球;

(iii) 恰有 3 匣, 其中各有一球; (iv) 某指定匣中恰有 2 个球; (v) 恰有三匣空着; (vi) 恰有一匣空着.

解. (i) 即 3 球落入其余 4 匣的概率, $P = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$.

(ii) 3 个球落入指定 3 匣中的情况数为 $3!$, 故该事件概率 $P = \frac{3!}{5^3} = \frac{6}{125}$.

(iii) 先选定 3 匣, 有 C_5^3 种选法, 对于每一种选法, 3 球落入其中的方式数有 $3!$, 故所求的概率 $P = \frac{C_5^3 3!}{5^3} = \frac{12}{125}$.

(iv) 先选定 2 球投入指定匣中, 有 C_3^2 种选法, 再将剩下的一球投入其余 4 匣中, 有 4 种投法, 故有 $P = \frac{C_3^2 4}{5^3} = \frac{12}{125}$.

(v) 先选定 3 个空匣, 有 C_5^3 种选法, 3 球落入其余 2 匣, 每匣至少进一球, 即一匣进入 2 球, 另一匣进一球, 先要从 2 匣中确定一匣进 2 球, 有 2 种方法, 再从 3 球中选 2 球投入此匣中, 有 C_3^2 种方法, 故恰有 3 匣空着的概率 $P = \frac{C_5^3 C_3^2 2}{5^3} = \frac{12}{125}$.

(vi) 恰有一匣空着是不可能事件, 概率为零.

2. 如限定每匣只能进一球, 求上题中各事件的概率.

解. 事件 (iv), (v), (vi) 都是概率为零的不可能事件. 其余各事件中, 事件 (i) 的概率 $P_1 = \frac{A_5^3}{A_5^3} = \frac{2}{5}$, 事件 (ii) 的概率 $P_2 = \frac{3!}{A_5^3} = \frac{1}{10}$, 事件 (iii) 的概率 $P_3 = \frac{C_5^3 3!}{A_5^3} = 1$.

3. 在题1中如限定每匣只能进一球且3个球是相同颜色的(即不可辨的球), 求上述各事件的概率.

解: 事件(iv), (v), (vi)的概率都为零. 事件(i)的概率 $P_1 = \frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{2}{5}$, 事件(ii)的概率 $P_2 = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$, 事件(iii)的概率 $\frac{C_5^3}{C_5^3} = 1$.

有趣的是题1中各事件在题2的条件下与在题3的条件下, 分别有着同样的概率. 这是因为概率值是一种比值, 在这类问题中二个排列数的比值和二个组合数的比值是相同的.

4. 在题1中如果每匣进球数不限且3球颜色相同, 上述各事件的概率又是什么呢?

解: (i) $P_1 = \frac{H_4^3}{H_5^3} = \frac{C_{4+3-1}^3}{C_{5+3-1}^3} = \frac{C_6^3}{C_7^3} = \frac{4}{7}$,

(ii) $P_2 = \frac{1}{H_5^3} = \frac{1}{C_7^3} = \frac{1}{35}$,

(iii) $P_3 = \frac{C_5^3}{H_5^3} = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{2}{7}$,

(iv) $P_4 = \frac{4}{H_5^3} = \frac{4}{C_7^3} = \frac{4}{35}$,

(v) $P_5 = \frac{C_5^3 \cdot 2}{H_5^3} = \frac{2C_5^3}{C_7^3} = \frac{4}{7}$,

(vi) $P_6 = 0$.

5. 将5个相同的球(即不可辨的球)投入3个盒子, 每一种投法是等概率的, 求下列各事件的概率.

(i) 没有空盒 (ii) 正好有两个空盒

(iii) 指定2个空盒中正好有3个球.

解: (i) 先将每个盒中放入一球, 余下的2球有 $H_3^2 = C_4^2 = 6$ 种投法, 故概率 $P_1 = \frac{H_3^2}{H_5^3} = \frac{6}{C_7^3} = \frac{6}{21}$.

(ii) 5个球同时放入3盒中的一个, 有3种放法, 故概率 $P_2 = \frac{3}{H_5^3} = \frac{3}{21}$.

(iii) 指定两盒中有3球可有2种投法: (2, 1) 和 (1, 2).

故概率 $P_3 = \frac{2}{H_3} = \frac{2}{21}$

6. 将4个红球, 3个白球, 2个黑球投入几个不同的盒中, 求: 指定的三盒投入红、白、黑球各一个的概率.

解: 在指定的三盒投入红、白、黑球各一个后, 剩下的3个红球, 2个白球, 一个黑球投入 $(n-3)$ 个不同盒中, 每盒只能进一球, 共有 $\frac{(n-3)!}{3!2!1!}$ 种投法, 故所求的概率

$$P = \frac{(n-3)!}{3!2!1!} \div \frac{n!}{4!3!2!} = \frac{24}{n(n-1)(n-2)}$$

评注: 可用模型 I 给出的各个例子作此模型而得到解答启示的各种实际问题如下:

7. 某小组有成员4人, 每人在星期一至星期六共计六天中要参加劳动一天. 如果劳动日期可随机安排, 求4人在不同的4天参加劳动的概率.

提示: “人”理解为“球”, “星期几”理解为“盒子”,

$$P = \frac{A_6^4}{6^4} = \frac{5}{18}$$

8. 设有经紫外线消毒的水 n 升, 其中含有 r 个大肠菌,
(i) 从中任抽一升水化验, 求基个大肠菌恰好落在该升中的概率;
(ii) 每次抽一升, 连续抽 r 次, 求每次恰有一个大肠菌的概率;
(iii) 把该 n 升水分成 n 等分, 求恰好在 r 份水中各有一个大肠菌的概率.

提示: 大肠菌 $\longleftrightarrow$ 球; 一升水 $\longleftrightarrow$ 一个盒子;

$$(i) \frac{1}{n}; \quad (ii) \frac{r!}{n^r}; \quad (iii) (C_n^r - r!)/n^r$$

9. 12块虫卵可任意地产在3块田中, 第一块田中有3块虫卵的概率是多少?

提示: 一块虫卵 $\longleftrightarrow$ 一个球, 一块田 $\longleftrightarrow$ 一个盒子

$$P = C_{12}^3 \cdot 2^9 / 3^{12}$$

10. 有 n 个工人, 每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配在 N ($n \leq N$) 间房中的每一间中, 试求下列各事件的概率

(i) 某指定 n 间房中各有一人, (ii) 恰有 n 间房, 其中各

有一人；(iii) 某指定房中恰有 m ($m \leq n$) 人。

答：(i) $\frac{n!}{N^n}$ ；(ii) $C_N^n n! / N^n$ ；(iii) $C_n^{m(N-1)} \frac{n!}{N^n}$

11. (i) 有 8 个质点，每个都以同样的概率 $\frac{1}{12}$ 落于 12 个格子中的每一格中，试求每一格至多只含一点的概率。

(ii) 有 8 个人，每个人的生日是一年 12 个月中任何一月的概率为 $\frac{1}{12}$ ，求此 8 人生日月份互不相同的概率。

(iii) 有 8 个旅客乘火车途经 12 站，每人在每站下车的概率为 $\frac{1}{12}$ ，求没有一人以上同时下车的概率。

提示：“人”“质点”“旅客” $\longleftrightarrow$ 球

“房”“格子”“月”“站” $\longleftrightarrow$ 盒

这三小题答案相同， $P = \frac{A_{12}^8}{12^8}$

12. 在某三年制专科学校数学科，各年级都有 A、B、C、D、E 五个班，每年都改变班的编成，1 年级生有 250 名，假定全体都升入 2 年级，3 年级，试回答：

(i) 某指定学生 3 年间 1 次也没有在 A 班的概率。

(ii) 3 年间，至少有 1 次在 A 班的学生，在 250 名学生中能有多少人？

提示：学生 $\longleftrightarrow$ 球，班 $\longleftrightarrow$ 盒，3 次编班 $\longleftrightarrow$ 1 球投 3 次。

(i) $(\frac{4}{5})^3$ ；(ii) $250 \times \left\{ 1 - (\frac{4}{5})^3 \right\}$ 人

13. 设有 1 升经过紫外线消毒的自来水，其中含有 n 个大肠菌，今从其中任取一升水检验，问在取出的一升水中含有 K ($= 0, 1, \dots, n$) 个大肠菌的概率是多少？

提示：大肠菌 $\longleftrightarrow$ 球，1 升水 $\longleftrightarrow$ 1 个盒子。

每个大肠菌落入取出的一升水的概率为 $\frac{1}{l}$ ， K 个大肠菌落入该升水的概率： $C_n^K (\frac{1}{l})^K (1 - \frac{1}{l})^{n-K}$

14. 某家有四个女孩去洗食具，在打破的四个食具中有三个是最小的女孩打破的，因此人家说她笨拙，她是否有理由申辩这完全是碰巧。

解：把四个女孩譬成甲、乙、丙、丁四个盒，四个破碗比成四个球，哪一个盒内有几个球就相当于哪一人打碎了几个碗：假定碗被哪一个打碎具有随机性，三个或四个碗都是某一个女孩打破的概率，

$$P = \frac{A_4^1 + A_4^2 \cdot C_4^3}{4^4} = \frac{4(1+12)}{4^4} = \frac{13}{43} \approx 0.2$$

都是最年轻的女孩打破的概率，

$$P^* = \frac{1 + C_4^3 \cdot A_3^1}{4^4} = \frac{1 + 4 \times 3}{4^4} = \frac{13}{256} \approx 0.05$$

最小的女孩打破的可能性很小，似有理由认为她笨拙。

15. 一座楼房有四个大门，两人住在此楼内，恰好住在同一大门内的概率是多少？

答： $\frac{C_4^1}{4^2} = \frac{1}{4}$

16.

红	红	红
兰	兰	兰
黄	黄	黄

左图是表示红、黄、兰各有三个，一共9个电灯泡点灭的装置，利用这个装置点着3个电灯泡时，假定颜色、位置只要有一个不同，就作为不同的点法来数

例：

红		
	兰	兰

和

	红	
	兰	兰

便看作不同的点法，假定每种点法都是等可能的，试求下列各事件的概率：

(i) 点亮一个红灯泡和2个兰灯泡

(ii) 三种颜色的灯泡各点亮一个

解：因颜色和位置的差别都要考虑，本题中9个灯泡的点灭装置可看成9个不同的盒子分成红、黄、兰三组，每组三个，点亮灯的动作相当于投球，点亮三盏灯，就是投三个颜色相同的球，且限制每盒只能进一球，故有

(i) 1球投入红灯组，2球投入兰灯组，共有 $C_3^1 C_3^2$ 种投法，故概率

$$P_1 = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_9^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{3}{28}$$

(ii) 三组各投入一球，有 $C_3^1 C_3^1 C_3^1$ 种投法，故概率

$$P_2 = \frac{C_3^1 C_3^1 C_3^1}{C_9^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{9}{28}$$

17. 谣言的传播。在一个拥有 $n+1$ 个居民的城市里，某一个人告诉第二个人一个谣言，而第二个人又把谣言告诉第三个人，如此等等。在每一步中，谣言的接收者都是随机从 n 个居民中挑选的，求下述两事件的概率：谣言传播了 r 次后

(a) 还没有回到第一个造谣者，(b) 没有一个人两次地听到谣言，当每一次都把谣言同时告诉由城市中随机选取的 N 个居民时，问上面两事件的概率等于多少？

解： r 次传播谣言看成投 r 个不同的球，谣言的 n (或 N) 个可能的接受者看成 n (或 N) 个不同的盒子。第一个人传播谣言时，有 n 个可能的接受者，欲使以后 $r-1$ 次谣言传播都不回到第一人，从第二次起，各次谣言的传播者都只有 $n-1$ 个可能的接受者；没有一个人两次听到谣言相当于限定每盒只能进一球，故有：

$$(a) \quad p = \frac{n \cdot (n-1)^{r-1}}{n^r} = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{r-1} = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{r-1}$$

$$(b) \quad P = \frac{A_n^r}{n^r}$$

每一次都把谣言告诉 N 个居民时

$$(a') \quad p = \frac{C_n^N (C_{n-1}^N)^{r-1}}{(C_n^N)^r} = \left(\frac{n-N}{n} \right)^{r-1} = \left(1 - \frac{N}{n} \right)^{r-1}$$

$$(b') \quad P = \frac{1}{(C_n^N)^r} \left[C_n^N \cdot C_{n-N}^N \cdot C_{n-2N}^N \cdots C_{n-(r-1)N}^N \right]$$

$$= \frac{A_n^{rN}}{(A_n^N)^r}$$

例 18. 从一副扑克牌中取出黑桃和红心，并将它们朝上排成一行，剩下的扑克牌洗匀后也朝上靠着黑桃和红心排成一行。问所有的方块都靠着黑桃的概率是什么？在 26 对牌中，有 16

对是由颜色相同的牌组成的概率是什么？

解：剩下的26张牌靠上去排有 $26!$ 种方法，而所有的方块都靠着黑桃的方法有 $13!$ ，但是对应于每种方法，梅花靠着红心的方法有13种，故所求的概率是

$$P = \frac{(13!)^2}{26!}$$

显然，在26对牌中，有16对是颜色相同的品种是8张，一种花色8张一张花色（否则总不仅是16对），同样每种花色剩下的5张可以任意调换位置，于是：

$$P = \frac{(8!)^2 (5!)^2}{26!}$$

19. (1) 将 r 只相同的球，投入 n 个不同的盒子中，($r \geq n$)，每个盒子进球数不限，求每个盒子都不空的概率。

(2) 一个学生要在相继的五天内安排15个小时的学习时间，假定每小时学习时间安排在五天中任何一天的可能性是相等的，求该生每天至少有一个小时学习时间的概率。

(3) 在(1)中求每个盒子至少进 q 只球的概率。

(4) 在(2)中求该生每天至少学习2小时的概率。

解：(1) 先在每个盒子中投入一只球，剩下 $r-n$ 只球，再投入 n 个编号不同的盒子中且每个盒子进球数不限，投法有

$$H_n^{r-n} = C_{n+r-n-1}^{r-n} = C_{r-1}^{r-1-r+n} = C_{r-1}^{n-1}, \text{ 故所求的概率为}$$

$$P = \frac{H_n^{r-n}}{H_n^r} = \frac{C_{r-1}^{n-1}}{C_{n+r-1}^r}$$

(2) 这相当于(1)中 $r=15$ ， $n=5$ 的情形，故所求的概率

$$P = \frac{C_{14}^4}{C_{19}^5}$$

(3) 因每个盒子至少进 q 只球，故先在每个盒子中各投进 q 只球，一共投掉 nq 只球，剩下 $r-nq$ 只球再投入 n 个不同的盒子中且每个盒子进球数不限，投法总数是 H_n^{r-nq} ，所求的

$$\text{概率 } P = \frac{H_n^{r-nq}}{H_n^r} = \frac{C_{n+r-nq-1}^{n-1}}{C_{n+r-1}^{n-1}}$$

(4) 这相当于(3)中 $r=15$, $n=5$, $q=2$ 的情形, 故所求

概率
$$P = \frac{C_{5+15-5 \times 2-1}^{5-1}}{C_{5+15-1}^{5-1}} = \frac{C_9^4}{C_{19}^4}$$

20. (1) 在字母 $a, a, a, a, a, b, c, d, e$ 的所有排列中去现任何两个 a 都不相邻的排列有多大的概率?

(2) 在(1)中如要求 b, c, d, e 中任何两个字母都不相邻, 概率又有多大呢?

解 (1) 先把 5 个 a 排在一起, 再把每两个 a 之间的空位置看作编了号的盒子。依题意, 每个盒子必须且只须放进 b, c, d, e 中的一个字母, 故有 $4!$ 种放法, 因此, 所求的概率

$$P = \frac{4!}{9!} = \frac{1 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{1}{21}$$

(2) 将 5 个 a 排在一起后, 每两个 a 之间及首末两个 a 的外侧共有六个空位置, 依题意, 只须把 b, c, d, e 投向这六个位置, 使每个位置至多放一个字母, 就能使它们中任何两个都不相邻, 这相当于把四个球投入六个不同的盒子每个盒子只能进一球, 故有 A_6^4 种投法, 因此所求的概率

$$P = \frac{A_6^4}{9!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{5}{42}$$

21. 由英语字母连成的字母串, 如正读和反读都一个样, 就称它为回文, 象 *madam* (太太) 便是一个回文, 在由 7 个字母组成的所有字母串中任取一个得到回文的概率是多少?

解: 7 个字母组成的回文可由其中偏向一侧的 4 个字母完全确定, 且这 4 个字母允许有重复字母出现, 这相当于把 4 只不同的球投入 26 个不同的盒子, 共有 26^4 种投法, 而由 7 个字母组成的字母串, 又相当于把 7 个不同的球放进 26 个不同的盒子, 有 26^7 种投法, 故所求的概率

$$P = \frac{26^4}{26^7} = \frac{1}{26^3}$$

22. 用 0 和 1 组成如图 1 所示的模式, 假定每一种组成方

法都是可能的，求出现关于垂直轴非对称的模式概率有多大？

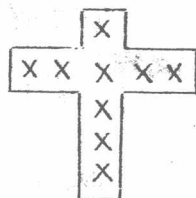


图 1

解：把 0 和 1 看作两个不同的盒子，各个 X 看作不同的球，先求所有可能的模式个数：如把垂直方向的五个 X 先填 0, 1，则相当于把 5 个球投入 2 个不同的盒子中，这有 2^5 种投法，此时，水平方向剩下 4 个 X，故有 2^4 种填 0, 1 的方法，总的模式个数是 $2^5 \times 2^4$ 。

又关于垂直轴对称的模式个数是 $2^5 \times 2^2$ ，所以关于垂直轴非对称的模式个数是 $2^9 - 2^7$ 。因而所求的概率

$$P = 1 - \frac{2^5 \times 2^2}{2^5 \times 2^4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

23. 有 20 个座位，5 个座位一组，从这 20 个座位中任选 15 个座位，恰好得到分别连在一起的三组座位的概率有多大？

解：设 Δ 代表连在一起的一组 5 个座位， $\bigcirc$ 代表空位置，则符合题目要求的选法具有形 $\bigcirc \Delta \bigcirc \Delta \bigcirc \Delta \bigcirc$ ，四个 $\bigcirc$ 容纳选剩下的五个空座位，把这 5 个空座位插到四个空位置上的种数相当于 5 只颜色相同的球投入四个不同的盒子，每只盒子进球数不限的种数 H_4^5 ，所求的概率是

$$P = \frac{H_4^5}{C_{20}^{15}} = \frac{C_{4+5-1}^{4-1}}{C_{20}^5} = \frac{C_8^3}{C_{20}^5}$$

24. 如汽车牌照由两个英语字母及数字组成，假定某十字路口每种牌照汽车出现的可能性相等，求在该路口遇到一辆汽车，其牌照上有两个不同字母的概率。

解：两个英语字母取自 26 个英语字母（允许重复取，但取出后排列成一定顺序，相当于 2 个不同的球投入 26 个不同的盒子，每个盒子进球数不限，故有 26^2 种投法，同样，取 4 个数字则有 10^4 种取法，牌照总可能数是 $26^2 \times 10^4$ ，牌照上限定用两个不同字母，相当于 26 个盒子中，每个盒子只能进一球，投 2 球共有 26×25 种投法，所求的概率

$$P = \frac{26 \times 25 \times 10^2}{26^2 \times 10^2} = \frac{25}{26}$$

25. (1) 10个男孩和5个女孩排成一行, 任何两个女孩都不相邻的概率是多少?

(2) 在(1)中若这15个孩子排成圆圈, 任何两个女孩都不相邻的概率呢?

解: (1) 10个男孩排成一行共有 $10!$ 种排法, 其中每一种排法里, 两头及每两个男孩之间共有11个空位置, 依题意, 需将5个女孩插入其中, 这相当于把5个不同的球投入11个不同的盒子, 每盒只能进一球, 故有 A_{11}^5 种插法, 所以事件任何两个女孩都不相邻共有 $10! A_{11}^5$ 种可能. 所求的概率

$$P = \frac{10! A_{11}^5}{15!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11} = \frac{12}{143}.$$

(2) 根据环形排列公式, 10个男孩排成一圈共有 $9!$ 种排法, 其每种排法里每两个男孩之间有10个空位置, 此时, 事件任何两个女孩都不相邻共有 $9! A_{10}^5$ 种可能, 而15个孩子排成一圈, 共有 $14!$ 种排法, 故所求的概率

$$P = \frac{9! A_{10}^5}{14!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10} = \frac{18}{143}.$$

26. 从大号的壹分, 贰分, 伍分, 伍角, 壹圆五种硬币中抽取六枚硬币, 恰有壹枚壹圆硬币的概率是多少?

解: 从这五种硬币中选出六枚相当于六只相同的球投入五个不同的盒子, 每盒进球数不限, 共有 $H_5^6 = C_{5+6-1}^6 = C_{10}^6$ 种. 符号题意的事件限定代表壹圆的盒子^有且仅有一个球, 问题转变为求五个相同的球投入四个不同的盒子, 每盒进球数不限, 故有 $H_4^5 = C_{4+5-1}^5 = C_8^5$, 因此所求的概率

$$P = \frac{C_8^5}{C_{10}^6} = \frac{1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{15}.$$

注: 本题显然也可比拟为抽球模型

27. 将26个英文字母排成一行, 求字母a和b间恰有7个字母的概率.

解: 把除a, b之外的24个字母先进行排列, 有 $24!$ 种排法, 对其中每一个排列, 把各字母之间及两侧的25个空位置看成25个不同的盒子, 先把a, b看成2个相同的球, 投

入这 25 个盒子，要 a, b 间恰有 7 个字母，必须 a, b 分别落入的两个盒子间有六个空盒子，故有 18 种投法，再考虑 a, b 是两个不同的字母，所以总的排列数有 $24! \times 18 \times 2$ 种，所求的概率

$$p = \frac{24! \times 18 \times 2}{26!} = \frac{18}{325}.$$

28. 设一本书共 n 页，每一页中有 N 个印刷符号（包括空格），若全书共有 r 个符号被印错，试求在第 $1, 2, \dots, n$ 页中分别有 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 个符号被印错的概率。

提示： $C_N^{r_1} C_N^{r_2} \dots C_N^{r_n} / C_{Nn}^r$ 其中 $r = r_1 + \dots + r_n$

29. (1) 某工作人员在某一星期里曾经接见访问 12 次，所有这 12 次访问恰巧都是在星期一或星期四，是否可断定接待时间是有规定的？(2) 这 12 次访问都不在星期三，是否可断定星期三不接待？

提示：来访者相当于“球”，星期几相当于“盒”，假定每天都接待来访者，即“球”“落入”7个“盒”中任一个是等可能的，(1)

$p = \frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003$ ，这种小概率事件的出现表明原假定可怀疑，从而推断接待时间只规定在星期一或四；(2) $p = \frac{6^{12}}{7^{12}} = 0.157$ ，这个概率并不小，因此不能断言星期三不接待来访。

30. 一座十层楼的电梯从底层开始时有 6 位乘客，假定乘客在每一层楼离开电梯的可能性是相等的，求下列事件的概率

(1) 没有两位及两位以上乘客在同一层离开

(2) 恰有两位乘客在同一层离开，

(3) 至少有两位乘客在同一层离开。

提示：乘客 $\longleftrightarrow$ 球，各楼层 $\longleftrightarrow$ 盒，(1) $p = \frac{A_{10}^6}{10^6} = 0.1512$,

$$(2) p = \frac{C_{10}^1 C_6^2 [C_9^1 C_4^3 C_8^1 + A_9^4]}{10^6} = 0.4982.$$

(3) 为(1)的逆事件，故 $p = 1 - 0.1512 = 0.8488$ 。

31. (1) 甲乙丙三个工厂生产日光灯，每个工厂都有 N 个日光灯可能是废品，求甲乙丙三个工厂分别有 r_1, r_2, r_3 ($r_i \leq N, i = 1, 2, 3, r_1 + r_2 + r_3 = r$) 个废品的概率 P_N

(2) 将 r 个球随机地投入甲乙丙三个盒子，求使甲乙丙三

个盒子分别有 r_1, r_2, r_3 ($r_1 + r_2 + r_3 = r$) 个球的概率

(3) 在 (1) 和 (2) 中, 固定 r_1, r_2, r_3 , 求 $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$

解: (1) $P_N = \frac{C_N^{r_1} C_N^{r_2} C_N^{r_3}}{C_{3N}^r}$, (2) $P = \frac{r!}{r_1! r_2! r_3!} / 3^r$

$$(3) P_N = \dots = \frac{r!}{r_1! r_2! r_3!} \cdot \frac{N! N! N!}{(N-r_1)! (N-r_2)! (N-r_3)!} \cdot \frac{(3N-r)!}{(3N)!}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{r!}{r_1! r_2! r_3!} / 3^r$$

模型 2 两盒问题 两盒问题的典型, 直观的例子是掷钱币。每掷一个钱币, 相当于投一个球, 掷 r 个钱币看成掷 r 个不同的球, 钱币掷出后, 正面向上或反面向上两种不同结果, 相当于落入两个不同盒子。很多只具有两种可能结果的或者虽有多种结果但能分成两大类, 先只要认识哪一类结果出现可能性大小的古典概率问题, 都可用这里的例子作为比拟模型。

掷三枚硬币, 求下列事件的概率。

- (i) 出现三个正面; (ii) 至少有一个正面;
(iii) 恰有一个正面; (iv) 至少有一个反面;
(v) 不多于两个反面; (vi) 恰有两个正面

答: (i) $\frac{1}{8}$; (ii) $\frac{7}{8}$; (iii) $\frac{3}{8}$; (iv) $\frac{1}{2}$

(v) $\frac{7}{8}$; (vi) $\frac{3}{8}$

2. 当抛五枚钱币时, 已知至少出现两个正面, 正面数刚好为三的概率是什么?

提示: A: 至少出现两个正面, H: 刚好出现三个正面,

所求概率 $P = (H/A) = \frac{P(HA)}{P(A)} = \frac{P(H)}{P(A)}$

$$= \frac{C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]} = \frac{5}{13}$$

3. 求 n 次掷钱币中出现正面次数为奇数的概率。

提示: 设 K 次投掷中, 正面次数为奇数的概率为 P_K ,

则 $P_K = P_{K-1} \cdot \frac{1}{2} + (1 - P_{K-1}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

与 K 无关, 故对任何 n , $P_n = \frac{1}{2}$