TANXING LIXUE

LILUN GAIYAO YU DIANXING TIJIE

弹性力学

理论概要与典型题解

王光钦　编著

西南交通大学出版社

Http://press.swjtu.edu.cn

弹性力学理论概要与典型题解

王光钦　编著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学理论概要与典型题解 / 王光钦编著. —成都：西南交通大学出版社，2009.7

ISBN 978-7-5643-0287-0

Ⅰ. 弹… Ⅱ. 王… Ⅲ. 弹性力学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 106720 号

弹性力学理论概要与典型题解

王光钦 编著

责任编辑	张宝华
封面设计	本格设计
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮编	610031
网址	http: //press.swjtu.edu.cn
印刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印张	23.375
字数	584 千字
印数	1—3 000 册
版次	2009 年 7 月第 1 版
印次	2009 年 7 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-0287-0
定价	39.50 元

前　言

弹性力学是工科力学及工程类相关专业的重要技术基础课程，它有两种基本描述方法，即微分方程方法和变分方法。弹性力学的15个基本方程和相应的边界条件构成了弹性力学微分方程边值问题的数学提法，由此又演绎出其他的描述方法及与各类问题相对应的各种求解方法。变分法是求泛函的极值，在弹性力学中，它是作为基本原理提出来的，可见它在弹性力学中的重要地位。同时，运用变分法的直接解法又可以求解出各种载荷和复杂边界的弹性力学问题，特别是在有限单元法出现以后，而有限单元法的数学基础就是变分法。微分方程边值问题和泛函的极值问题构成了弹性力学理论的最主要内容。

本书在阐述弹性力学微分方程边值问题和泛函极值问题的基础上，分章节对各类常见典型问题进行了求解。其实，基本理论本身就是一个经典的弹性力学问题，而典型问题的编列常常又离不开经典的弹性理论内容。还有，经典理论中往往伴随着弹性力学的许多基本概念，而这些正是本书将弹性力学基本理论列为主要内容的一部分的重要原因，而不像一般的习题指导和题解那样只列出其基本公式。

本书的主要特点：

（1）在内容体系的安排上采用了从一般到特殊的方法，将应力、应变张量特性及应力-应变关系单独列为一章，以适当分散难度，达到循序渐进之目的。

（2）在概要阐述基本理论的同时，侧重于基本概念和基本方法的介绍。问题求解时，一般既有解题分析，又有对解题方法的注释与评述，以期达到举一反三的效果。

（3）张量作为一种数学工具，在弹性力学中已有越来越广泛的应用，使一些理论问题的分析可以简单明晰。笛卡儿张量相对较简单，读者容易掌握，因此，本书部分问题的分析采用了张量方法。

（4）本书在内容上自成一体，在阐述基本理论时又比较注重它的基本概念和推导过程，同时又编列了较多的典型问题，因此，既可以把它看成阐述弹性力学基本理论的一本入门教材，又可以把它视为一本题解类的弹性力学辅导读物。

本书共分十一章，内容包括：弹性力学基本方程、一般原理、应力应变张量特性及应力-应变关系、空间问题求解及其解答、平面问题（直角坐标与极坐标）、扭转问题、弹性力学问题的变分解法等。考虑到部分读者的需要，还编写了笛卡儿张量、变分法基础等四个附录，并建议这部分读者在阅读本书前先熟悉附录A和B。

本书可作为力学专业本科生、研究生及工程类相关专业的本科生和研究生的教学参考书，亦可供相关教师参考。由于本书在内容上自成一体，因此也可以作为学习弹性力学的基础教材，且适合读者自学。

本书在编写过程中得到了西南交通大学教务处、应用力学与工程系及工程力学教研室的大力支持，并获西南交通大学教材列项，特此鸣谢。

由于编者水平所限，错误之处在所难免，敬请有关专家及读者批评指正。

编著者

二〇〇八年八月

目　录

1　弹性力学研究的对象、基本假设和研究方法

1. 弹性力学研究的对象

弹性力学研究的对象包括：杆件、板、壳和实体结构（如挡土墙、水坝、地基等）。

杆件是材料力学的主要研究对象，具有细而长的几何特征。杆件的拉压、弯曲、扭转是材料力学研究的几个主要内容。为了简化问题，根据实验观察，在材料力学中除了必要的基本假设以外，还引用了附加的变形假设或应力假设。这样，必然会在结果中产生误差。弹性力学求解这类问题不引进任何附加假设，只按照严格的微分方程的边值问题进行求解，所得的解是精确解。对比弹性力学与材料力学的结果，可以确定出材料力学附加假设可带来的局限性。工程上常常遇到的板、壳及实体结构已超出了材料力学的研究范围，只能在弹性力学中加以解决。

2. 弹性力学的基本假设

(1) 连续性假设：认为组成物体的介质充满了物体所占的空间，物体中不存在任何间隙。

按照连续性假设，介质连续化以后，赖以进行强度、刚度和稳定性分析的各种力学参量，比如应力、应变、位移、能量密度等都可以写成坐标的连续函数，可以运用数学分析中的连续和极限概念。

(2) 均匀性假设：指物体内的每一点都具有相同的力学性质。

显然，满足均匀性假设的物体，其材料的力学性质与坐标无关。这样，由物体的某一部分测得的材料性能，对整个物体都适用。这里所谓的点是指宏观上的“点”，应理解为一个体元，具有宏观无限小而微观无限大的几何特征。因此，在实用上可以采用在足够大的材料试件上所测得的材料参数作为物体的该参数值。

(3) 各向同性假设：指物体内一点的各个方向上的力学性质相同。

这里要注意：① 以上连续性假设、均匀性假设和各向同性假设都有一个共同点，即代表材料宏观性质的体元尺寸应该足够大。② 构成物体的介质粒子之间往往是存在间隙的，当这种间隙的尺寸远小于物体尺寸时，宏观上可以认为物体是连续的。③ 关于均匀性假设，如果物体由同一种材料组成，显然，物体是均匀的；如果物体由两种或两种以上材料组成，只要混合均匀，而且每种材料的颗粒尺寸远小于物体尺寸，则宏观上可以认为每点均具有相同的力学性质，即宏观上，它是均匀的。④ 均匀性是在点和点之间进行比较的，而各向同性是在同一点对各个方向进行比较的。

(4) 完全弹性假设：所谓完全弹性就是物体在载荷作用下发生变形，当这些载荷拆除以后，物体能完全恢复到原来的形状和大小，而没有任何残余变形。其应力、应变是一一对应的。

凡符合以上 4 个假设的物体，称为理想弹性体。

(5) 小变形假设：假定物体内各点在载荷作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变分量和转角都远小于 1。

应用这一假设，可使问题大为简化。例如，在研究物体受力平衡时，可以不考虑由于变形引起的物体尺寸和方位的变化，即按变形前的几何尺寸及载荷状态进行计算。又如，在研究物体的形变和位移时，可以略去应变和转角的二次幂或二次乘积及其以上的项。这样，在小变形条件下，弹性力学的全部基本方程及控制方程都是线性方程。因此，在求解弹性力学问题时，不需要去跟踪加载过程，只需对最终状态进行求解即可。

(6) 无初应力假设：假定物体的初始状态为自然状态，即载荷作用以前物体内没有应力。

由载荷引起的应力称为附加应力，弹性力学只研究这部分附加应力，为了方便，一般简称为应力。当有初应力存在时，在不违反叠加原理的前提下，物体内实际应力等于初应力加上附加应力。

以上述基本假设为基础建立的固体力学理论，称为线性弹性理论，简称弹性理论或弹性力学。

3. 弹性力学的研究方法

弹性体是可变形固体，弹性体的机械运动必须遵从机械运动的普遍规律。如果把弹性体视为由无穷多个质点组成的质点系，那么，在机械运动中的力就应该包括质点与质点相互作用的内力。作为物体变形的描述，在变形体力学中引入了应变的概念，则内力与变形之间应该满足的关系，就成为变形体力学必须满足的基本关系之一。因此，变形体机械运动应该满足的基本方程包括静力学（动力学问题可根据达朗伯原理转化为静力学问题处理）、几何学、物理学三个方面。

根据上面的基本假设，用严格的数学推演方法来建立理论体系和求解弹性力学问题，这样的弹性力学称为数学弹性力学。如果在引入基本假设的同时，还引入变形和应力附加假设的，称为应用弹性力学。比如，在薄板、薄壳问题中有直法线假定。附加假设的引入，使得由数学弹性力学建立的基本方程得到简化。

弹性力学以一点处的变形、一点处力的平衡及一点处力与变形的关系为出发点，在几何方面，根据运动变形分析得到一点处的几何方程；在静力学方面，则是在一点附近取出一个微元体，研究微元体的平衡，得到该点处的微分形式平衡方程；而在物理方面，则引用广义 Hooke 定律。由此建立的一组方程，称为弹性力学的基本方程，它是一组偏微分方程。按照数学理论，可以在给定的边界条件下进行求解。这就是所谓的微分方程边值问题，是弹性力学问题的一种提法。弹性力学问题的另一种提法是泛函的极值问题，即所谓的变分问题。

由于实际结构和载荷的复杂性，能够用严格的数学方法求解的问题非常有限，因此，在求解方法上除了解析法以外，还广泛采用了有限差分法、有限单元法、加权残值法、边界单元法等数值方法，以及电测法、光测法等实验方法。

问题【1.1】

1. 在弹性力学研究的范围内，变形前连续的物体在变形后是否允许出现重叠或产生裂缝？

答 在一般情况下，真实的物体其组成部分在变形后是满足变形相容条件的，即变形前连续的物体在变形后不允许出现重叠或产生裂缝。重叠或产生裂缝，在数学上意味着位移的不连续性。

2. 土体是由固体颗粒、水和气体三相物质组成的碎散颗粒集合体，是不是连续介质？在建筑物地基沉降问题中，可否作为连续介质处理？

答 土体是由固体颗粒、水和气体三相物质组成的碎散颗粒集合体，水和气体都充斥在固体颗粒之间所形成的间隙中，当然不是连续体。因此，在研究土体内部微观受力时，例如，颗粒之间的接触力和颗粒间的相对位移，必须把土当成散粒状的三相体来看待。而建筑物地基沉降问题是宏观土体的受力问题，土体的尺寸远远大于土颗粒的尺寸，这时就可以把土颗粒和孔隙混在一起，将土体当作连续介质来处理。

3. "单一材料构成的物体是均匀体，也是各向同性体"，此话是否正确？

答 单一成分构成的物体是均匀体，但未必是各向同性体。认为是均匀体，也是各向同性体者，一是缺乏对材料微观或细观结构的认识，二是混淆了均匀性与各向同性两者间的区别。比如，单晶体由于原子排列的方向性，其物理性质是有方向性的。对于多晶体，由于晶粒的排列杂乱无章，其物理性能在宏观上表现为单个晶粒的统计平均值，故微元体的性能是各向同性的。钢材是多晶体，经轧制，晶粒沿轧制方向拉长，形成"纤维组织"或"层状组织"，从而使材料性能也具有一定的方向性。又如，木材在每一点的顺纹和横纹的材料性质是不同的。这里应该注意，均匀性是在点和点之间进行比较的，而各向同性是在同一点对各个方向进行比较的，它们是两个不同的概念。

4. 一般混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

答 混凝土是由水泥、沙和骨料组成的混合体。由混凝土做成的构件，其机械性能由比骨料大许多的体元实验确定。实验结果表明，当$\sigma \leqslant 0.3f_c$（f_c为混凝土的轴心抗压强度）时，应力-应变关系接近于直线，表现为理想的弹性性质。随着应力的升高，混凝土表现出越来越明显的非弹性特征。这是由于水泥胶凝体的黏结流动以及混凝土中微裂缝的扩展和新的微裂缝产生的结果。微裂缝随荷载的增加而发展，混凝土塑性变形亦逐渐增加。钢筋混凝土构件是在混凝中沿某一方向加入钢筋做成，从而导致构件具有非均匀性和各向异性的特性。但工程上，对构件进行受力分析时，常常按两种材料来处理，并考虑它们之间的相互约束。材料的应力-应变关系，当载荷不大时，仍然可以采用线性弹性来近似描述。

一般的岩质地基和土质地基，由于岩体的尺寸远远大于岩体中存在的各种不连续面以及土体的尺寸远远大于土颗粒的尺寸，这时虽然可以把它们当作连续介质来处理，但天然地基往往是由成层土所组成，具有非均匀性和各向异性的特性；而岩体也往往是横观各向异性的，显然，作为理想弹性体将带来一定误差。

5. 在材料力学问题中，有一类材料称为弹塑性材料，其应力-应变关系也是非线性的，它与非线性弹性有何区别？理想化的弹塑性材料模型主要有哪几种？

答 非线性弹性与弹塑性材料，其应力-应变关系都是非线性的，前者加载时变形沿曲线增加，卸载时沿加载曲线返回，没有残留应变；而后者在加、卸载时沿着不同的路径，卸载后有残留变形。理想化的弹塑性材料模型主要有以下几种：理想线性弹性、理想弹性-线性强化、理想刚性-线性强化、理想刚性-塑性、理想弹性-塑性等，如图 1.1 所示。

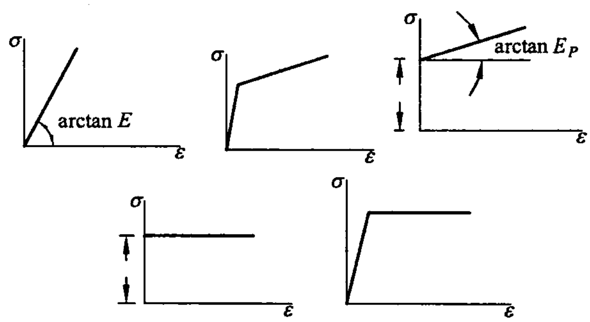

图 1.1

2　弹性力学的基本方程

2.1　载荷　应力

1. 载荷及其分类

凡是能导致物体变形和产生内力的物理因素都称为载荷。载荷可分为两大类:

第一类载荷: 如重力、机械力和电磁力，称为外力。它直接施加在物体上引起物体的变形与内力。按作用区域的不同，外力又分为体积力和表面力。体积力，简称体力，分布在物体的体积内，作用在物体内的所有质点上，例如重力、惯性力、电磁力等。物体内部各质点受到的体力，一般来说是不同的，即体力是空间点位的函数，通常用体力矢量 $\boldsymbol{F}$ 来表示，F_x、F_y、F_z 表示体力矢量沿坐标轴 x、y、z 方向的分量，并规定沿坐标轴的正方向为正，反之为负。由体力的定义可知，体力的量纲是[力][长度]$^{-3}$。表面力，顾名思义，是作用在物体表面上的外力，简称面力。例如，液体或气体的压力，固体间的接触力等，通常用面力矢量 $\bar{\boldsymbol{T}}$ 来表示，$\bar{T}_x$、$\bar{T}_y$、$\bar{T}_z$ 表示 $\bar{\boldsymbol{T}}$ 沿坐标轴 x、y、z 的分量，并同样规定沿坐标轴正方向为正，反之为负。面力的量纲为[力][长度]$^{-2}$。

第二类载荷: 如温度、中子辐照等物理因素，它直接引起物体变形，仅当变形受到约束（物体内部自身的约束或外部约束）时，物体内才产生内力。

2. 应　力

在载荷的作用下，物体的各部分之间要产生相互作用，这种物体内的一部分对另一部分的相互作用力，称为内力。

为了研究物体内部某点 P 处的内力，假想由一个过 P 点的截面 π 将物体分为 A、B 两部分。在截面 π 上作用有一部分对另一部分的作用力。内力在 P 点的集度，称为点 P 在 π 平面上的应力矢量，记为 $\overset{v}{\boldsymbol{T}}$，字母上方的 v 表示应力作用面的法线方向。显然，这个应力矢量的大小和方向除了与点的位置有关外，还与过该点的截面方向有关。

对于应力矢量，通常采用两种分解方法: 一是沿坐标轴方向分解，其分量分别用 T_x、T_y、T_z 表示，在推导某些公式的过程中使用。二是沿作用面的法线方向和切线方向分解: 前者与作用面垂直，称为正应力 (σ_v)；后者在作用面内称为剪应力 (τ_v)，这些分量常常与物体的变形和材料强度相关联，如图 2.1 所示。应力及其分量的量纲是[力][长度]$^{-2}$。

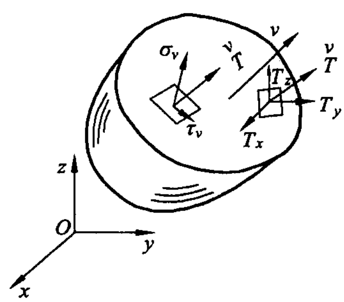

图　2.1

应力矢量与面力矢量的数学定义和物理量纲都相同，区别仅在于，应力是作用在物体内截面上的未知内力，而面力是作用在物体表面上的已知外力，当内截面无限趋近于外表面时，应力也趋于外加面力值。明确这一点，对于列出边界条件是十分重要的。

为了问题的描述，我们常常需要给出过一点的与三个坐标面平行的微分面上的应力。我们称外法线平行于 x 轴的微分面为 x 面。同样，外法线平行于 y 轴和 z 轴的微分面分别称为 y 面和 z 面；而将外法线与坐标轴正方向一致的微分面又称为正面，反之为负面。设 x 面上作用的应力矢量为 $\overset{x}{T}$，沿三个坐标方向分解为一个正应力和两个剪应力，分别用 σ_{xx}、τ_{xy} 和 τ_{xz} 表示，如图 2.2 (b) 所示。同样，y 面和 z 面上作用的应力矢量为 $\overset{y}{T}$ 和 $\overset{z}{T}$，其相应的沿坐标轴方向的分量分别为 σ_{yy}、τ_{yx}、τ_{yz} 和 σ_{zz}、τ_{zx}、τ_{zy}，如图 2.2 (*a*) (*c*) 所示。过一点的这 9 个应力分量可写成矩阵形式：

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}。\tag{1}$$

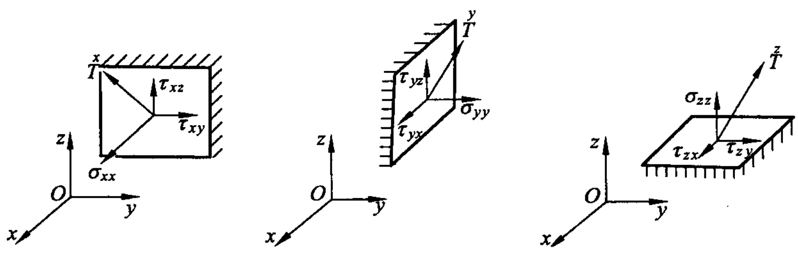

图 2.2

这 9 个分量正好表示一点的应力状态。式中的每一个分量都用了两个指标，其中第 1 个指标称为面元指标，表示应力所在面元的方向；第 2 个指标称为方向指标，表示该分量的方向。由于正应力与剪应力已用字母 σ 和 τ 区别，因此，σ_{xx} 通常用 σ_x 表示，σ_{yy} 用 σ_y 表示，σ_{zz} 用 σ_z 表示而不会发生混淆。这里的下标 x、y、z 可以理解为该点的局部标架。在曲线坐标系中，应力也按局部标架定义。

图 2.2 表示过一点的三个正面上的应力分量情况。过该点的三个负面上的应力，根据作用力与反作用力原理，其大小对应相等，而方向相反。

通常，将上述过一点的 6 个微分面上的应力标注在从该点附近取出的一个微平行六面体上，用以表示一点的应力状态，如图 2.3 所示。

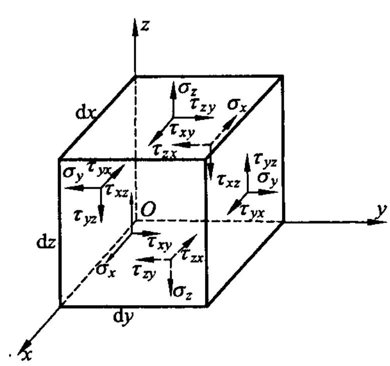

图 2.3

应力正负号规定：正面上的应力分量与坐标轴正方向一致的为正，负面上的应力分量与坐标轴负方向一致的为正；反之为负。

关于应力正负号规定的说明：① 正确地反映了作用力

与反作用力原理及“受拉为正，受压为负”的传统概念。② 剪应力的正负规定与材料力学不完全一致。③ 这里的正负号规定是弹性力学符号的基本规定，在实际问题中的力的边界可能是以合力或合力矩的形式出现的，这时必须从基本符号规定出发来判断合力或合力矩的正负号。

2.2 平衡（运动）微分方程

设物体在载荷作用下处于平衡状态，显然，处于平衡状态的物体内的每一个微元体都是满足平衡条件的。在物体内一点 P 的附近，用三组坐标面的平行平面截出一个微小的平行六面体单元，在其 6 个微分面上作用有应力，在单元体上还作用有体力，如图 2.4 所示。利用沿 x 轴方向的平衡条件 $\sum X=0$，可得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+$$
$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+F_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\text{。}$$

约简后，再除以微元体体积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0\text{。}$$

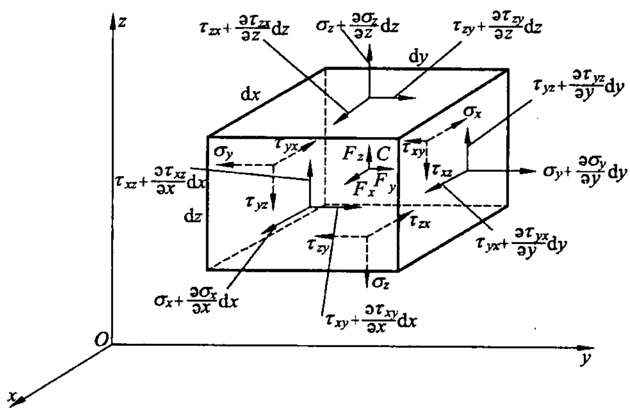

图 2.4

同理，由沿 y 轴和 z 轴方向的平衡条件 $\sum Y=0$ 和 $\sum Z=0$ 可得另外两个方程，联立得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0\quad\left(\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0\quad\left(\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z=0\quad\left(\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right),
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

简记为
$$\sigma_{ij,j}+F_i=0\quad\left(\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)。\tag{2.1'}$$
式（2.1）表示应力分量与体力分量之间的关系，称为平衡微分方程，又称纳维叶（Navier）方程。

考虑微元体的力矩平衡。对通过形心 C，并沿 x、y、z 方向的轴取矩，注意到体力的合力通过 C 点，以及在微分面上与该轴平行的应力分量或合力通过该轴的应力分量对该轴的矩均为零，于是由力矩平衡方程 $\sum M_x=0$，$\sum M_y=0$，$\sum M_z=0$，经整理并略去高阶项以后，可得
$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx},\tag{2.2}$$
简记为
$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\quad(i\neq j)。\tag{2.2'}$$
式（2.2）表示剪应力的互等关系，称为**剪应力互等定理**。由于剪应力互等，故在 9 个应力分量中，只有 6 个是独立的。

如果物体处于运动状态，则在上面的分析中，根据达朗伯（d'Alembert）原理，在体力项中引入惯性力：$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，$-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ 和 $-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 即可，这里 ρ 为材料密度，t 为时间。将其与其他体力项分离，并移到方程右边，由此得到运动微分方程，也一并列在式（2.1）中。

应该指出：① 真实物体的平衡状态是物体受力变形以后的状态，而我们在建立平衡方程的时候没有考虑物体变形的影响，这只是在小变形条件下才能成立。② 从平衡微分方程（2.1）可以看出，引入式（2.2）以后，3 个微分方程中包含了 6 个应力分量，因此弹性力学求解应力分量的问题是超静定问题，这必须从几何和物性方面去寻求补充方程。

问题【2.2】

1. 弹性体在下列情况下，剪应力互等定理是否成立？

(1) 各点受有体积力作用；

(2) 各点受有按体积分布的力矩；

(3) 有加速度。

解 剪应力互等定理是由单元体上各力的力矩平衡条件得到的，这个条件要求力系对任一点的主矩为零。取过单元体中心的，与坐标轴平行的三条直线为矩轴，则

(1) 由于单元体的体力合力通过单元体形心，故体力对矩轴之矩为零。因此，在有体积力作用时，剪应力互等定理成立。

(2) 考察对 z 轴力矩平衡条件。受体分布的力矩作用时，单元体的分布体力矩对沿 z 方向矩轴之合力矩不为零。由力矩平衡方程 $\sum M_z=0$，经整理并略去高阶项以后，有
$$(\tau_{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\mathrm{d}x-(\tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x)\mathrm{d}y+m_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$
式中，m_z 为单位体积的体力偶沿 z 方向的分量。由此可见
$$\tau_{xy}\neq\tau_{yx}。$$
类似地，有
$$\tau_{yz}\neq\tau_{zy},\quad \tau_{zx}\neq\tau_{xz},$$
故剪应力互等定理不成立。

(3) 当有加速度时，存在惯性力。惯性力是一种体力，由式（2.2）可知，剪应力互等定

理与体力无关。因此，在运动状态下剪应力互等定理成立。

2. 试检查如下马克斯威尔（Maxwell）静电应力满足什么条件？

$$\sigma_x=\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right],\quad \tau_{xy}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\sigma_y=\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right],\quad \tau_{yz}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\sigma_z=\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right],\quad \tau_{zx}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}。$$

分析 所给应力应满足平衡方程。这里应特别强调，满足平衡方程仅仅是真实应力存在的必要条件。

解 将题给应力分量代入式（2.1）的第一式，有

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]+$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\right)+F_x=0。\tag{a}$$

注意到

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\right),\tag{b}$$

将式（b）代入式（a）整理后，得

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+F_x=0,\tag{c}$$

即

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial x}\nabla^2 U+F_x=0。\tag{c′}$$

运用式（2.1）的第 2、3 式可得

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial y}\nabla^2 U+F_y=0,\tag{c″}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial z}\nabla^2 U+F_z=0。\tag{c‴}$$

由式（c）可见，当体力为零时，要求$U=\text{const}$或U为调和函数；当体力不为零时，函数U需满足下列条件：

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)\nabla^2 U=(F_x,F_y,F_z)。\tag{d}$$