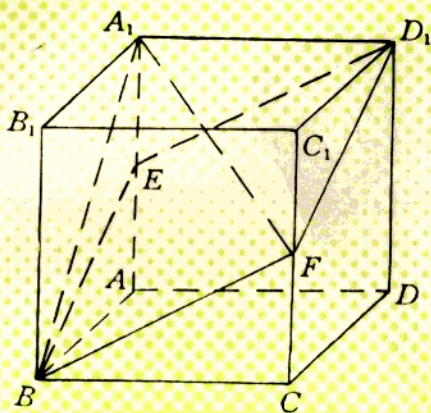


高考数学命题 原则与思路

国家教委考试中心 编



海洋出版社

高考数学命题原则与思路

国家教委考试中心 编

海洋出版社

1994 年·北京

(京)新登字087号

高考数学命题原则与思路

国家教委考试中心编

*

海洋出版社出版 (北京市复兴门外大街1号)

新华书店北京发行所发行 昌平兴华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 10.25 字数: 220千字

1994年4月第一版 1994年4月第一次印刷

印数: 1—3000

*

ISBN 7-5027-3923-7/G·1287 定价: 7.20元

前 言

为促进普通高等学校招生考试制度的改革，进一步改进命题工作，增加考试的透明度，同时也为了使广大考生能进一步了解高考迅速提高学习成绩和复习效果，国家教委考试中心组织具有多年命题经验的高校和中学教师、教材和教学研究人员及专业考试研究人员编写了《高考数学命题原则与思路》。

本书通过对15年来高考命题工作的回顾与分析，总结出近几年高考数学命题的发展演变趋势，以及命题的基本原则和思路；同时，精选了符合“两个有利”标准、代表高考试题发展方向、充分体现《数学科考试说明》要求与命题原则的试题，对所选试题进行了深入分析，并针对考生答题的实际情况，进行了具体切实的指导。

由于时间仓促，书中可能会出现一些错误，欢迎读者批评指正。

编 者

1994.1

目 录

命题工作回顾与命题思路概述·····	(1)
第一部分 代数·····	(15)
一、幂函数、指数函数和对数函数·····	(15)
二、三角函数与反三角函数和简单的 三角方程·····	(73)
三、不等式·····	(132)
四、数列、极限、数学归纳法·····	(149)
五、复数·····	(177)
六、排列、组合、二项式定理·····	(196)
第二部分 立体几何·····	(200)
一、证明题·····	(203)
二、计算题·····	(231)
第三部分 平面解析几何·····	(249)
高考数学试题选析·····	(252)
一、基本题选析·····	(253)
二、综合题选析·····	(280)

命题工作回顾与命题思路概述

从1978年恢复全国统一考试命题到现在已经十几年了，高考数学命题坚持“两个有利”的指导思想，进行了不懈的探索和努力。各种精心编制的试题努力体现国家的选才意志，为高校录取新生提供了有效的数学分数，发挥了国家考试的选拔、评价和指导作用。同时命题工作也在不断积累经验，以现代考试测量学的理论为指导，由过去的经验型逐步向科研型转变，试题逐步趋向规范化、标准化。分析总结十几年来的命题工作，从考查内容、试卷结构和试题特点看，数学命题经历了三个发展阶段：

一、恢复阶段（1978—1982年）

1977年我国恢复了普通高等学校招生的考试制度，1978年起开始了全国统一命题。由于当时国家刚刚步入正常发展轨道，各地教育发展很不平衡，考生水平差别很大，高考没有统一的标准，高考统一命题是在不断探索中开始了艰辛的历程，这一阶段的主要特点是：

1. 初中内容占有很大比例，一些初中知识作为考核重点。如1978年试题中初中内容占34%，其中有分解因式，代数式的化简，平面几何证明题等。这是由当时历史条件决定的，受“文化革命”的影响，我国教育遭受空前的浩劫，

许多考生名为高中毕业，但距合格高中毕业生还有很大距离，有的只有初中水平。随1978年全日制教学大纲的颁布实施，我国教育逐步走上正轨，高考命题及时根据考生水平的变化，在增加高中内容比例的同时，增加了新充实的教学内容，如集合、充要条件等。1982年随当时教学大纲内容的增加又增加了求导、数列极限等内容，实现了考试内容的更新和考核重点的转移。

2. 试题均为解答题，即要求考生在解题时写出完整的解题过程；题目数量较少一般为10个至15个。从题型上看，从建国后到“文化大革命”的17年中，由于考生人数较少，考试竞争并不激烈，由为数不多的几个有思考难度的解答题所构成的试卷，确实给考生以充分的思考时间，比较真实反映出考生的能力水平。但在恢复高考后，考生人数剧增，竞争空前激烈。这种传统的试卷模式、评分方法及分数解释形式随之暴露出一些弊端。首先试题数量少，造成试卷覆盖面较小，分值较大，随机误差较大。特别在客观上助长了猜题、押题。其次由于全部是解答题，考生书写的工作量较大，相对地思考时间减少。最后由于阅卷工作量较大，而且全是人工阅卷，容易产生评卷误差。

3. 注重基础知识的考查。数学教育界对教学质量看法几经变迁，文革前强调“双基”，基本上是以知识掌握为主要标志的知识型质量观。“文革”后，广大教育工作者带着对过去的良好印象，希望恢复到“文革”前的教学考试秩序中去。反映到高考中就是注重对基础知识的记忆、理解程度的考查，而对知识在不同情况中的综合和灵活运用，受当时考生水平的限制，在运用范围和考查深度等方面都没有大的突

破。如1979年试题“叙述并且证明勾股定理”，1980年试题“证明对数换底公式： $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$ 。（ a 、 b 、 n 都是正数， $a \neq 1$ $b \neq 1$ 。）”，1981年试题“写出余弦定理，并加以证明。”等便是这种质量观的反映。

4. 注重实际应用问题。受社会、政治因素影响从1979年开始每年至少有一个应用题，分值在10分左右。如1979年的浓度配比问题，海洋测量问题，物价增长问题。1980年的产值增长问题。1981年的人口增长问题。1982年的长方形场地面积最大值问题等。而以1979年最重，有三个应用问题，分值达到28分。这些在当时都发挥了很好作用，在强调培养应用意识的今天，也还是很有借鉴意义的。

二、发展阶段（1983—1987年）

经过上阶段5年的不断探索和研究，命题工作积累了一定的经验，孕育了本阶段从题型到试卷结构、从考查内容到测试目标、从命题技术到试题风格等一系列变革。发展阶段的主要特点是：

1. 开始引入选择题和填空题，各种题型的比例不断变化调整。标准化考试始于本世纪初，以后逐渐形成一整套理论，并被介绍到国内。80年代初数学科开始研究标准化考试的理论并进行了相应的实践，于1983年开始引入选择题，共5题，只占10分。应当注意，标准化考试是有一定标准、按一定程序组织的考试，并不意味着只使用选择题。但选择题的特点及其特有的功能在实施考试的标准化的过程中显现出

其重要的作用。并且以选择题为先导，在对其功能、特点的研究、争论中，标准化考试的理论逐步被理解、接受，并结合中国的特点，指导中国考试改革的实践。因此，高考中引入选择题具有重要的意义。1984年数学科引入填空题，共6题24分。填空题是介于选择题和解答题中间的一种题型，答案确定，不看中间结果，不给中间分等具有选择题的特点；但须人工阅卷，一些等价答案须要阅卷者判定，又有解答题的特点。以后几年关于各种题型的功能和利弊的争论时有发生，因此各种题的比例和分值不断变化调整。值得注意的是这一阶段的填空题每小題的分值较高，为4分，而且填空题占分的比例很高，1987年达到23%。

2. 考查内容以高中内容为主，开始出现各科综合题，以附加题形式考查微积分内容。这一阶段不再有纯初中内容的试题，考核重点集中在高中，但高中各分科内容的比例每年都在不断变化，最多时相差10个百分点。试题更加突出数学是一个各部分知识有机联系的整体结构，注意考查各部分知识间的内在联系。1984年以来，单科综合题每年平均有22分，多科综合题每年平均30分。为增加数学科在各科总分录取时的权重，1983年数学科总分达到120分。在考查内容方面的另一精心之作就是微积分内容的处理。1981年至1983年大纲除含现行大纲所有内容外，还含有行列式、线性方程组及微积分内容。而在1983年10月调整后的大纲中，以上内容为选学内容。面对高校的选拔要求与大部分中学教学水平的差距，命题组采取启用附加题的措施，试图支持鼓励高水平的学校讲授选学内容。从1984到1987的4年间，每年都有10分的附加题，考查微积分内容。如1984年考查导数概念、微

分法和利用导数概念的物理意义解决实际问题。1985年考查导数的几何意义，利用导数解决函数的最大值、最小值问题等。命题组在支持中学课程改革，内容更新及因材施教中想方设法，不遗余力，发挥了应有的积极作用。但在实际考查过程中，由于附加题的分数不计入总分，只在录取时参考，因此每年考生都是集中精力做好必作部分，影响了附加题作用的发挥。因此高考的任何改革措施必须以中学课程教学的改革为基础，中学教学对高考起着直接的决定作用。

3. 试题灵活性增加，注重能力的考查。1983年前后，我国数学教育界开始了数学能力的大讨论，集思广议，百家争鸣。每个人都根据自己的理解和研究，总结出了不同的能力分类和能力结构，形成以思维能力发展为主要标志的能力型质量观。这些研究动向和趋势对高考命题产生了重大影响，突出反映就是1984年的数学试题。对思维能力的要求明显提高，呈递进趋势，要求思维敏捷、灵活、全面。如第一(3)题“如果 n 是正整数，那么 $\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$ 的值是

(A)一定是零

(B)一定是偶数

(C)是整数但不一定是偶数

(D)不一定是整数。”

不但要求分 n 是奇偶两种情况讨论，而且对 n 是奇数的情况，写式为 $\frac{n^2-1}{4}$ 还要讨论，设 $n=2k+1$ ，原式为 $k^2+k=k \times (k+1)$ ，由此判定为偶数。推理步骤很多，思维过程较复杂。同时对知识的考查不但体现在记忆理解层次，而且注重灵活、综合地运用。如讨论方程 $\log_{(\dots \frac{1}{x})} x = -1$ 在什么情形下有解，综合考查了对数函数的基本概念、对数方程的解法和分析问题的能力，并开字母讨论题之先河。

1984年试题提高了对思维能力的要求，引导中学教学把能力培养放在首位，其方向是非常正确的，本年对能力考察所进行的探索在高考命题中吹进了一股新风，使人感到耳目一新，更加深刻地认识到数学在培养人的思维能力中的价值和作用。但试题的总体要求与考生的实际水平还有些差距，个别题目应注意避免一些随机因素的干扰。除题目本身的原因，题目的排列顺序也应进行调整，应当先易后难、循序渐进，使考生形成良好的应试心理。

发展阶段所进行的各项改革从不同角度、不同方面对命题工作进行了尝试，虽然各年的试卷不够规范稳定，但积累了正反两方面的经验，为今后的发展奠定了基础。

三、稳定阶段（1988—1992年）

这一阶段的主要工作是以现代教育测量学理论为指导，研究高考的特点，明确考试目标，总结归纳命题原则，逐步实现考试的标准化。重要标志是1991年《普通高等学校招生全国统一考试数学科说明》的颁布实施。主要特点是试卷更加科学、规范、稳定。

1. 贯彻《说明》要求，全面考查基础知识

数学试卷对基础知识的考查注意学科本身的特点，按《考试说明》规定的比例，选择有代表性的样本，全面测试基础知识，注意知识系统的内在联系，注意各部分内容难度平衡。

数学是有严密逻辑体系的知识系统，各部分内容有机联系组成一个整体结构，因此试卷注意从知识点的纵横联系中

设计题目，要求考生能够揭示各知识点的内在联系，从知识结构的整体出发，解决问题。一些小题分值虽不高，但却不是考查单一的知识点，而是多个知识的综合，都需要综合运用各种知识于一题才能解决。

按照标准化考试的理论，为保证考试的公平竞争，试卷应有较大的覆盖面。近年来数学试卷的覆盖率达到70%左右。数学科有130个知识点，为达到60%—70%的覆盖率，以每题平均2—4个知识点论，要有近30个题。显然靠增加解答题是不可能很好实现考查目的的，因此必须增加选择题的数量以增加全卷题目数量，提高覆盖率，使解答题真正发挥其考查逻辑推理、综合分析等复杂思维过程的功能，以较大地提高考试的信度和效度。

在考查过程中注意考试的层次要求，对基础知识的考查即考查对各个概念、法则、性质、公式、公理、定理的记忆再认，还尽可能注重在理解基础上掌握的程度，把教学重点作为考试重点。同时为考查考生是否具备今后继续学习的基础知识，注意选编初等数学与高等数学衔接部分的内容，考查中学生必须掌握并且大学继续学习必备的知识。这些内容的分数比例一般都高于它们在教学大纲中课时的比例。

妥善处理初中内容。数学知识之间的相互联系非常紧密，因此高考命题必然涉及到初中内容。在处理过程中坚持这样的原则，即以高中内容为主，在应用高中内容解决问题过程中考查初中内容。如在函数性质的推证、不等式的证明、求轨迹方程中应用初中代数式的运算、化简、求值。在立体几何证明中，将空间问题转化为平面问题，应用平面几何的知识加以推证。

2. 考查数学思想方法

考查数学思想方法是《数学科考试说明》中的一项基本要求，同时也是突出数学科考试的特点。在考查数学思想方法的过程中应注意，首先思想方法应与具体的内容相结合，不能为考查而考查。因为数学的思想方法是从数学内容中抽象总结中来的，带有普遍应用意义，因此应与具体的内容相结合，在应用过程中理解其意义和作用，发挥其功能。其次思想和方法在抽象层次和应用意义上有一定的区别，作为具体方法，应有一定确切的内涵，是一种具体的、可操作的步骤和作法，因此应用中更直接更有效。而思想则更抽象更概括，作为一种指导思想，只是提示了思考的方向，并没有指导具体的操作步骤，但其应用范围更为广泛。最后在中学教学中，对每一种思想和方法都应结合具体内容教授，不要对某一方法人为拔高，形成过热的浪潮，冲击正常教学。

近几年来，数学高考命题在考查思想方法的努力中积累了一些经验，并与中学教学达到了一定的共识。考查的数学思想有：

(1) 数形结合的思想。其实质是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，使抽象思维和形象思维结合起来，通过对图形的处理，发挥直观对抽象的支柱作用，实现抽象概念与具体形象、表象的联系和转化，化难为易，化抽象为直观。数形结合包括函数与图象、曲线与方程的结合、几何语言叙述与几何图形的结合等。

(2) 函数与方程的思想，函数描述了自然界中量的依存关系，是对问题本身的数量本质特征和制约关系的一种刻画。因此函数思想的实质是剔除问题的非数学特征，用联系和变

化的观点提出数学对象，抽象其数量特征，建立函数关系。如数列的通项就是定义在自然数集上的函数，与这种思想相联系的就是方程的思想，在解决数学问题时，先设定一些未知数，然后把它们当成已知数，根据题设本身各量间的制约关系，列出方程，求得未知数。所设的未知数则沟通了变量之间的关系，将问题转化，方程与函数是相互联系的，解方程 $f(x)=0$ 就是求函数 $y=f(x)$ 的零点，解不等式 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)，就是求函数 $y=f(x)$ 的正 (负) 区间。在 1992 年理科第 (27) 题中， S_n 就是 n 的二次函数，解答第二问就是在 d 一定时求 S_n 的极值点。第 (28) 题是先设出 A 、 B 两点的坐标 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，作为已知数，根据已知的 $|PA|=|PB|$ 列出方程，先消去 y_1, y_2 ，最后并不求出 x_1, x_2 ，而是由

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

确定 x_0 的取值范围。在第 (17) 题中，题目本身引入了参数 t ，通过方程刻画二次函数的性质，要求考生在变中把掌不变。

(3) 逻辑划分 (或分类讨论) 的思想，进行分类，然后对划分的每一类分别进行求解，综合后即得答案。在划分中要求始终用一个标准，这个标准应当是科学的、合理的，要满足互斥、无漏、最简的要求。有些问题分类后还可在每一类中再进行分类。

(4) 等价转化的思想。把未知解法的问题转化到在已有知识范围内可解的问题是一种重要的数学思想方法。转化包括等价转化和非等价转化。等价转化要求转化过程中前因后果应是充分必要的，这样的转化才能保证转化后所得的结果仍为原题的结果。

高考中考查的逻辑学中的方法主要有,分析法(后一步是前一步的充分条件)、综合法(后一步是前一步的必要条件)、反证法、归纳法、穷举法等。这些方法既要遵从逻辑学中的基本规律和法则,又因运用于数学之中而具有数学特色。

考查的数学方法包括代入法、比较法(数学中主要指比较大小)、数学归纳法、配分法、待定系数法、换元法、同一法等。这些方法是一些基本方法,在解决数学问题时发挥重要作用。

3. 注重考查能力

《数学科考试说明》规定,数学科考试主要考查运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力,以及运用所学数学知识和方法,分析问题和解决问题的能力。这是由数学科特点和高考的性质决定的。数学由于其逻辑的严密性、结论的确定性和应用的广泛性的特点,在培养学生能力的过程中发挥重要作用,被称为锻炼思维的体操。因此数学科考试应力图发挥学科的特点,测试考生的能力水平。同时高考是选拔性考试,注重预测效度,主要测量学生的学习潜能,因此数学科考试应在考查基础知识、基本方法的同时,运用数学材料考查考生的能力。

数学学习中,运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力是学生学习的基础,是对学生数学认知特点的概括,是在数学活动中表现和培养的,带有数学的特点,因此被认为是数学能力。数学高考中应注意分析其内涵,从不同侧面不同层次考查数学能力。

(1) 运算能力

不仅会根据法则、公式正确地进行运算,而且理解算理;

能够根据题目条件寻求合理、简捷的运算途径；运算熟练、迅速。

运算能力是一项基本能力，在高考中半数以上的题目需要运算，运算不仅是只求出结果，有时还可辅助证题。在高考中运算包括数值运算和字母推演。准确是运算的基本要求，在填空题中，一步算错，整题失分；在解答题中某步出错，后继部分最多只能得一半的分数。简捷、合理是对考生思维深刻性、灵活性的考查，而熟练、迅速则是对思维敏捷性的考查。在高考中考查运算能力，一般不是增大每题的计算量，而是通过控制每题的计算量，增加题目数量，一些题目需要一些技巧来实现。而且要注意精确与迅速、简捷与熟练相结合，注重考查算理。

(2) 逻辑思维能力

会观察、比较、分析、综合、抽象和概括；会用归纳、演绎和类比进行推理；会用简明准确的数学语言阐述自己的思想和观点。数学是一个各部分紧密联系的逻辑系统，形式逻辑推理是基本方法，由概念组成命题，由命题组成推理，由推理组成证明，在数学领域中，只有被严密论证了的东西才被承认为正确，因此数学是体现逻辑最为彻底的学科。中学没有逻辑学科，数学就很自然地承担了这方面的责任，因此，数学考试中着重考查了演绎推理的能力。

思维能力是智力因素的核心，思维品质是一个学生智力层次高低的标志，敏捷性、灵活性、深刻性、独创性和批判性是思维品质的五个特征。近年来对逻辑思维能力的考查注重了对推理的合理性和思维品质的考查。

高考中还注意通过一个具体的数学结论产生和形成的过

程，考查逻辑思维能力。

诚然数学知识是一个演绎的体系，并且演绎推理是数学学习和研究的重要方法，但归纳的方法是获得数学结论的一个途径。运用不完全归纳法，通过观察、实验，从特例中归纳出一般结论，形成猜想，然后加以证明，这是数学研究的基本方法之一，是考生应当学习理解的。

数学语言是数学特有的形式化符号体系。依靠这种语言进行思维能使思维在可见的形式下再现出来，考试中，解答题考查考生灵活运用数学语言（包括文字语言、图形语言和符号语言）的能力。要求考生能根据实际情况进行各种语言间的转换，能用恰当的语言准确流畅地表达自己的思想，在表达时要注意条理性和层次性，名词术语准确规范，书写清晰，合乎逻辑。

（3）空间想象能力

根据题设条件想象和画出图形，将复杂图形分解为简单图形，在基本图形中确定基本元素及相互的位置关系。

对空间想象能力的考查，首先重视了空间图形的位置关系的考查，即要求考生在具有空间观念的基础上，能用图形来反映并思考用语言或式子所表达的空间图形及位置关系。其次注意结合逻辑论证、数值计算考查空间想象能力。

（4）分析问题和解决问题的能力

分析问题和解决问题的能力是前三种数学能力的综合体现。要求考生能综合运用中学数学知识及其所包含的数学思想和方法，探索、分析、解决数学问题及相关学科中的问题，将生产和生活中的实际问题抽象成数学问题，加以解决。

4. 科学设计试卷结构，发挥整体效应