名师帮你学数学

立体几何

杨象富等编著

中国青年出版社

名师帮你学

数　　学

（立体几何）

杨象富　等

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

责任编辑:赵惠宗
封面设计:沈云瑞

图书在版编目(CIP)数据

名师帮你学数学:(立体几何)/杨象富等编著.—北京:中国青年出版社,1994,8

ISBN7—5006—1613—9

Ⅰ.名… Ⅱ.杨… Ⅲ.立体几何—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634,634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 02340 号

名师帮你学数学(立体几何)

杨象富 等

*

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

兵器工业出版社印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1092 1/32 6.5 印张 130 千字

1994 年 8 月北京第 1 版 1994 年 8 月北京第 1 次印刷

ISBN 7—5006—1613—9/G·340 定价 4.30 元

主要作者简介

杨象富 浙江宁海县人，宁海中学教科室主任。1981年评为特级教师，1989年批准为中国数学奥林匹克高级教练。近年曾受聘参加全国高考和全国高中数学联赛命题工作。

作者已在宁海中学(省重点中学)执教42年，坚持联系实际进行数学教育研究，已出版《杨象富数学教学经验》、《中学数学综合题的解法发现》、《高中代数复习与研究》等十种。

马　明　南京师大附中原副校长，特级教师，国家教委中小学教材审定委员会中学数学审查委员，南京师大数学系兼职教授，江苏省中小学数学教学研究会副理事长。

主要作品有《马明数学教育论文集》、《周期函数初论》、《三角浅说》、《圆和二次方程》、《同解方程和同解不等式》、《节约的数学》、《初中数学思维训练与解题方法》、《高中数学解题思路训练》等。

陈振宣　杭州市人。上海老中教一级。退休后被上海师大教科所聘为特邀研究员，1993年被上海市新学科研究所思维科学室聘为研究员。1994年被中国管理科学研究院思维科学研究所评为研究教授。

作者长期从事数学思维方法及思维科学研究，主要著作有《中学数学思维方法》、《数学思想方法入门》、《数学题解辞典》、《高考中常用的数学思想方法》等。

赵大悌　1940年生，山东乐陵人。北京海淀教师进修学校中学教研室副主任、数学组长。北京数学教学研究会常务理事、北京数学会普委会副主任。1991年被评为北京市特级教师。参加过北京市高师院校高考命题、全国高考“考试说明”的审定、北京市数学竞赛的命题等工作。曾到全国十几个省市讲学，并参加编写书籍数十本，在省市级以上刊物发表文章数十篇。

前 言

数学教育历来存在两种策略思想，一是"以多取胜"，另一是"以少御多". 上世纪末英国出版了一系列颇有影响的教科书：*Chrystal* 的《*Text Book of Algebra*》，*Hall and Knight* 的高等代数与三角，*Loney* 的三角、坐标几何，都以题型丰富、难题多、解法巧妙见长. 这些书流行几十年. 此风东渐，日本的上野清编写了以《大代数讲义》为代表的一系列讲义，实际上是上述英国教材的编译之作. 此后长泽龟之助又有以题解为中心的《数学辞典》问世，逐渐介绍到我国来，使"以多取胜"的策略在中国数学教育界占统治地位，影响深远，且有愈演愈烈之势. 然而"题海"无边，既苦了教师与学生，又不能真正提高广大学生的数学素质. 于是，"题海"的危害日益成为教育界的共识：一是加重了学生的负担，严重摧残青少年的身心健康；二是把学生的思维禁锢于机械摹仿的定势之中，而难以自拔，造成高分低能. 因此，反对"题海"之声一阵高于一阵. 但在激烈的考试竞争之中，多数教师又不得不搞"题海". 坊间习题集，*A*、*B* 卷已成泛滥之势，教育行政领导部门屡禁而不止. 这就是目前亚洲地区数学教育中的"怪圈".

要跳出"怪圈"，非改弦易辙，走"以少御多"之路不可.

要"以少御多"，既减轻负担，又提高质量，必须探索总结数学教育的内在规律. 按规律办事，才能真正提高数学素质，逐步达到不怕考题千变万化，都能游刃有余，跳出"题海"，走上数学教育的坦途.

数学素质的核心是数学思维的素质. 根据我们的研究，要提高数学思维的水平，必须抓住以下三条：

第一，要熟练掌握数学思维的载体，在数学语言与数学知识的理解与运用方面下功夫. 数学语言有三种形态：①自然语言（这是理解数学概念与原理的基础）；②数学符号语言（这是简缩数学思维，提高思维效率的根本）；③数学图象语言（这是形象思维的载体）. 注意符号语言与图象语言的互译，是抽象思维与形象思维，左、右脑协同操作的训练，是开发大脑潜能的重要途径之一.

第二，要强化数学思维方法的概括与领会，知识与语言是思维的工具，思维方法则是思维的导航器. "题海"只注意题型归类和解题模式的汇集，形成各式套路，让学生去摹仿，这无助于思维水平的提高. 数学思维方法是从思维的高度引导学生作概括，一旦真正领会，应用之广与灵活变化，是初料所难以估计的. 有的学生对思维方法有所理解之后说："似乎忽然自觉聪明起来了". 反映了他们的真实感受.

第三，要注意情感因素与心理素质的培养. 人是有情感的，人的思维总是伴随情感而进行，情感可能激励思维，也可能成为思维的障碍. 数学思维要正常发挥，不能不注意心理素质的培养. 通过数学教育逐步转变学生的学习态度，培养兴趣、意志、毅力，顽强的探究意识，善于排除情绪波动，保持思维的积极态势. 情感与心理素质是思维能力的另一侧面，千万忽视不得.

以上是我们编写这套书的动机与指导思想，我们的具体做法是：

1. 与教材同步配套，以教材的大节或大体上相当于一周的学习内容，将每一章分为若干讲，便于与教材配合学习.

2. 每讲有一段无标题的引言，对所学内容提出简明的要求及学习方法指导，引导入门，利于复习和深入.

3. 每讲的范例是本书的主体，开头是对概念性强、思维灵活的基础题（不少是自编的）的分析，用以加深理解、发展运用知识与语言的能力，进而通过剖析典型综合题，引导从思维的高度作概括，逐步领会常用的数学思维方法，提高捕捉正确合理的解题思路的能力.

4. 每章之末的小结，旨在教会“从厚到薄”与“从薄到厚”的治学方法，使一门学科的内容“收之可藏于密，放之则弥六合”，形成知识网络，明白内容经纬，便于检索和应用. 同时把握住这一知能发展的最佳时期，通过综合性较强的范例，以扩大全章学习的收获，加强对数学思维方法的理解. 运用妙题巧解，实际应用，激发兴趣，转变数学态度，形成智力因素与情感因素的良性循环.

5. 最后一册《中学数学思想方法选讲》，将前五册涉及的数学思维方法，进行系统提高，使认识与情感获得升华，脑潜能得到充分开发.

阅读引言和范例的分析与说明，犹如聆听名师指导点拨，每周一练既精选又精编，竭力为师生免于题海之苦着想.

丛书主编组由马明、陈振宣、杨象富、赵大悌、赵惠宗同志组成. 本册由杨象富等同志编写.

编写这样的课外读物，还是初次尝试，敬请读者指正. 让我们共同努力，逐步形成一套摆脱题海，跳出怪圈，提高素质，利于实用，具有特色的学生课外读物.

目　　录

第一章 直线和平面

第一讲 平 面

学习本讲要求正确理解平面的概念，掌握平面的画法和平面的表示方法，牢固掌握平面的基本性质，加深对公理、推论中“有且只有一个”含义的理解，能初步运用公理、推论证明三点共线、三线共点、点和直线共面.

掌握水平放置的平面图形的直观图的画法，能够画出空间直线和平面的各种位置关系的直观图.

【范例】

例 1 (选择题)若点 M 在直线 b 上，b 在平面 β 内，则 M、b、β 之间的关系可记作( ).

(A)$M\in b\in\beta$ (B)$M\in b\subset\beta$

(C)$M\subset b\subset\beta$ (D)$M\subset b\in\beta$

解 点 M 与直线 b 的关系是元素与集合的关系，只能用符号$\in$或$\notin$表示，显然(C)、(D)可排除. b 与 β 的关系是集合与集合之间的关系，不能用符号$\in$，(A)也可排除.

故应选(B).

例 2 (选择题)三条直线两两相交，可确定平面的个数是( ).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)1 或 3

解 设三条直线 a、b、c 两两相交于 A、B、C.

(1)若 A、B、C 三点不重合，则三点不共线，可确定一个平面；

(2)若 A、B、C 三点重合于一点，当 c 在 a、b 所确定的平面内，这时只有一个平面，当 c 不在 a、b 所确定的平面内，每两条相交直线确定一个平面，这时有三个平面.

故应选(D).

例 3 (填空题)如图 1－1，A、B、C、D 为不共面的四点，E、F、G、H 分别在 AB、BC、CD、DA 上，

若 $EH \cap FG = P$，则点 P 的位置在________；

若 $EF \cap GH = Q$，则点 Q 的位置在________.

解 $\because$ $E \in AB$，$H \in AD$，$AB \subset$ 平面 ABD，$AD \subset$ 平面 ABD，

$\therefore$ $E \in$ 平面 ABD，$H \in$ 平面 ABD，$EH \subset$ 平面 ABD.

$\because$ $P \in EH$，

$\therefore$ $P \in$ 平面 ABD. 同理 $P \in$ 平面 BCD.

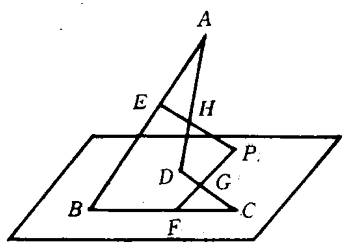


图 1－1

$\because$ 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$，

$\therefore$ $P \in BD$. 点 P 在 BD 所在的直线上. 同理，点 Q 在面 ABC 和面 ACD 的交线 AC 上.

说明 公理 1 应用于证明直线在平面内，公理 2 应用于证明两个平面相交、三点共线、点在直线上，公理 3 及推论应用于平面的确定以及证明两个平面重合.

例 4 画出图 1－2 水平放置的四边形 $OABC$ 的直观图.

分析 因为点 O、B 在 x 轴上，所以点 O、B 的对应点 O'、B' 在 x' 轴上的位置不变.

点 C 在 y 轴上，所以点 C 的对应点 C' 在 y' 轴上，且 $O'C'=\frac{1}{2}OC$，只要正确确定点 A 的对应点 A' 的位置，直观图就可画出.

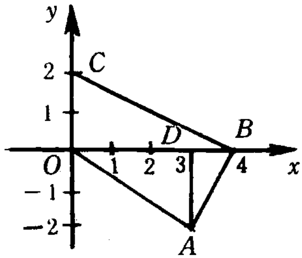


图 1—2

画法　(1)过 A 作 $AD/\!/y$ 轴交 x 轴于 D. 画与 x 轴、y 轴对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'o'y'=45°$.

(2)在 x' 轴的正半轴上，取 $O'B'=OB$，$O'D'=OD$. 过 D' 画 $D'A'/\!/O'y'$，在第四象限取 $D'A'=\frac{1}{2}DA$；在 y' 轴的正半轴上取 $O'C'=\frac{1}{2}OC$.

(3)连结 $O'A'$、$A'B'$、$B'C'$.

图 1—3 中的四边形 $O'A'B'C'$ 就是所画的直观图.

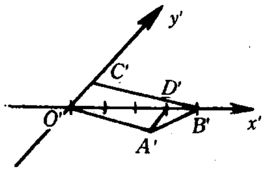
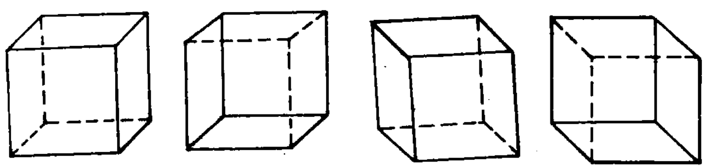


图 1—3

说明　画法(2)中过 D' 画 $D'A'/\!/o'y'$，易错画成为 $D'A'\perp O'x'$.

例 5　图 1—4 中(1)、(2)、(3)、(4)都是正方体，它们的虚线位置不同，你能看出它们有什么区别？说出你看到各个正方体的哪几个面？



(1)　(2)　(3)　(4)

图 1—4

分析 正方体的六个表面正方形，一般分为上、下、左、右、前、后，凡是虚线表示边的正方形是看不见的，所以看不见的面有三个.

解 上述四个图形看到的面不都一样.

图(1)看到上、前、右三个面.

图(2)看到下、前、左三个面.

图(3)看到上、前、左三个面.

图(4)看到下、前、右三个面.

说明 空间图形的虚实线含义与平面几何图形的虚实线不同，前者用虚线来表示看不见的部分，后者虚线用于表示所添的辅助线. 因此在空间图形上添辅助线时，画实线还是画虚线，以是否能看见来区分. 分清空间图形中的虚线与实线，是提高画图、识图能力的关键之一.

例 6 一条直线和这条直线外不在同一直线上的三点，可以确定多少个平面？并说明理由.

分析 由公理 3 可知不共线三点可以确定一个平面，然后分直线在这个平面内或不在这个平面内两类，分别得出直线与三点可能确定的平面个数.

解 设直线为 l，直线 l 外不共线三点为 A、B、C.

由公理 3 可知，过不共线三点 A、B、C 可以确定一个平面 α.

若 l 在 α 内，这时只能确定一个平面；

若 l 不在 α 内，

(1)A、B、C 三点无任何两点与 l 共面，这时点 A 与 l 可确定一个平面，同理点 B 与 l，点 C 与 l 也分别确定一个平面，这样三点 A、B、C 与 l 可确定三个平面，连同平面 α，共有四个平面.

(2)A、B、C 三点中有两点与 l 共面，设点 A、B 与 l 共面，另有点 C 与 l 确定一个平面，这时三点 A、B、C 与 l 可确定二个平面，连同平面 α，则有三个平面.

综上，可以确定平面的个数可以是 1 个或 3 个或 4 个.

关键 看清题意，依据公理，合理分类，分清各种位置的可能性，是得到正确解答的关键.

例 7 直线 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，直线 l 和 l_1、l_2、l_3 分别相交于点 A、B、C.(图 1－5)

求证 四条直线 l_1、l_2、l_3、l 共面.

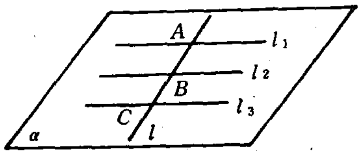


图 1－5

分析 先证两条平行直线或两条相交直线确定一个平面，后证其他两条直线也在这个平面内.

证明一 $\because$ 直线 $l_1 /\!/ l_2$，

$\therefore$ 直线 l_1，l_2 确定一个平面 α.

$\because$ $A \in l_1$，$B \in l_2$，

$\therefore$ $A \in \alpha$，$B \in \alpha$.

又$\because$ $A \in l$，$B \in l$，

$\therefore$ $l \subset \alpha$.

$\because$ $C \in l$，

$\therefore$ $C \in \alpha$ 且 $C \notin l_1$，

$\therefore$ 平面 α 也是直线 l_1 和点 C 确定的平面.

$\because$ $C \in l_3$，且 $l_3 /\!/ l_1$，由平行线的定义，

$\therefore$ $l_3 \subset \alpha$.

因此，直线 l_1、l_2、l_3、l 都在同一个平面 α 内，即这四条直线共面.

证明二　如证明一，先证得 $l\subset\alpha$.

$\because$　直线 $l_1 /\!/ l_3$，

　　直线 l_1, l_3 确定一个平面 β.

同理可证　$l\subset\beta$.

$\because$　过两相交直线 l_1, l 有且只有一个平面.

$\therefore$　平面 α 与平面 β 重合.

因此直线 l_1、l_2、l_3、l 共面.

说明　证点，直线共面的常用方法：

(1)根据公理 3 及其推论；

(2)先由给定的点和直线中的某些元素确定一个平面，再证其余元素在这个平面内；

(3)先说明某些元素在一个平面，其余元素在另一个平面，然后证明这两个平面重合.

若本题改为无数条平行直线与 l 相交，请读者证明这无数条直线共面.

例 8　已知：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 所在的平面相交，并且 AA_1、BB_1、CC_1 相交于一点.

求证　(1)AB 和 A_1B_1，BC 和 B_1C_1，AC 和 A_1C_1 分别在同一平面内；

(2)若 $AB\cap A_1B_1=M$，$BC\cap B_1C_1=N$，$AC\cap A_1C_1=P$，则 M、N、P 三点共线.(图 1－6)

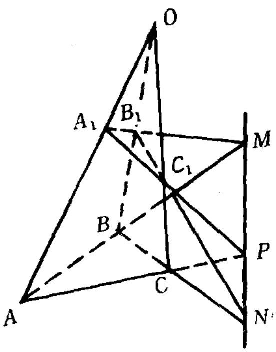


图 1－6

分析　证线线共面，可应用公理 1 和公理 3 及推论. 由题设

AA_1 和 BB_1 相交，可知 AA_1 和 BB_1 共面，应用公理 1 不难证明 AB、A_1B_1 在这个平面内.

证三点共线，可应用公理 2，证明点 M、N、P 都在平面 ABC 和平面 $A_1B_1C_1$ 的交线上.

证明　(1)由已知可设 $AA_1 \cap BB_1 = O$

$\therefore$　过 AA_1 和 BB_1 可确定平面 α.

$\because$　A_1、$B_1 \in \alpha$,

$\therefore$　$A_1B_1 \subset \alpha$，同理 $AB \subset \alpha$,

$\therefore$　AB 和 A_1B_1 共面.

同理可证 BC 和 B_1C_1 共面，AC 和 A_1C_1 共面.

(2) $\because$　$AB \cap A_1B_1 = M$，$M \in AB$，$AB \subset$ 平面 ABC,

$\therefore$　$M \in$ 平面 ABC，同理 $M \in$ 平面 $A_1B_1C_1$.

$\therefore$　点 M 是平面 ABC 和平面 $A_1B_1C_1$ 的公共点.

同理可证，点 N、P 也是平面 ABC 和平面 $A_1B_1C_1$ 的公共点.

$\because$　这些点都在平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线上,

$\therefore$　M、N、P 三点共线.

【练习题一】

A 组

1. 选择题

(1)如果 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$l \cap a = A$，$l \cap b = B$，那么，下列关系成立的是(　　).

(A) $l \subset \alpha$　　　　(B) $l \not\subset \alpha$

(C) $l \cap \alpha = A$　　　　(D) $l \cap a = B$

(2)平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$，点 $A \in \alpha$，$B \in \alpha$，$C \in \beta$ 且 $C \in l$，又 $AB \cap l = R$，过 A、B、C 三点所确定的平面 γ，则 $\beta \cap \gamma$ 是(　　).

(A)直线 AC　　　　(B)直线 BC

(C)直线 CR　　　　(D)以上均不对

(3)空间四点 A、B、C、D 共面而不共线，那么(　　).

(A)四点中必有三点共线

(B)四点中必有三点不共线

(C)AB、BC、CD、DA 四直线中有两条互相平行

(D)AB、BC、CD、DA 四直线中必有两条互相垂直

(4)与不共线的三点距离都相等的点的个数是(　　).

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)无数个

(5)下列几种说法中，正确的是(　　).

(A)空间的三个点确定一个平面

(B)四边形一定是平面图形

(C)梯形一定是平面图形

(D)六边形一定是平面图形

(6)在空间，下列四个命题中真命题的个数是(　　).

①两组对边分别相等的四边形是平行四边形

②四边相等的四边形是菱形

③四边相等，四个角相等的四边形是正方形

④两条对角线互相平分的四边形是平行四边形

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个

(D)4 个

(7)图 1—7 的直观图所示的平面图形是(　　).

(A)任意梯形

(B)直角梯形

(C)任意四边形

(D)等腰梯形

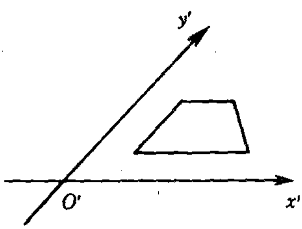


图 1—7