

张景中 / 主编

走进 教育数学

Go to Educational Mathematics

数学不了情

把奇妙的对称、均衡、和谐等美学要素注入
高等代数与其他学科，
使较为冷漠的学科变得生龙活虎，
书中大量生动活泼的素材，
深刻哲理与无比激情兼而有之。
作者继承了数学科普大师马丁·加德纳的文风，
加以有机融合完成了素材的中国本土化，
使之文采斐然，雅俗共赏。

谈祥柏 / 著



科学出版社

www.sciencep.com

“十一五”国家重点图书出版规划项目

01-49
T088-2

走进教育数学
Go to Educational Mathematics

数学不了情

谈祥柏 / 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

有 50 年教龄的本书作者谈祥柏先生,平生喜爱书法,尤嗜狂草与板桥体,从而在书中写出了“上、下”与草体字“上、下”的联系.这是在其任何一本书中都无法看到的内容.

在月夜的西湖,苏州的藕园,扬州的香影廊、双桂巷各有一段扣人心弦的传奇,展现了视觉的盛宴,也是数学的不了情.花前月下,海誓山盟,在金石永固的数学不变量前面全都相形见绌了.或许你也愿意听听通过猜谜来增强智力的故事(最近网上有不少“光纤之父”高锟的逸闻),武侠小说“一代宗师”的梁羽生又是如何“开窍”,从留级生一跃而成为排头兵的.

本书旨在改进数学教学,培养文理兼通的人才,文风朴实而清新,立足于雅俗共赏.有中学文化程度的读者即可理解书中大部分内容.也有少量篇章可供较高水平的读者阅读欣赏与继续研究.

图书在版编目(CIP)数据

数学不了情 / 谈祥柏著. —北京:科学出版社, 2010

(走进教育数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-026821-1

I. ①数… II. ①谈… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 027836 号

丛书策划: 李 敏

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 4 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2010 年 4 月第一次印刷 印张: 21 插页: 2

印数: 1—6 000 字数: 300 000

定价: 46.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

总序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学？”

“教育数学和数学教育有何不同？”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务。

把学数学比作吃核桃。核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它。有些核桃，外壳与核仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到。数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃。教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味，更营养，更容易砸开吃净。

“教育数学”的提法，最早出现在笔者1989年所写的《从数学教育到教育数学》中。其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》，柯西写《分析教程》，都是教育数学的经典之作。

数学教育有很多世界公认的难点，如初等数学里的几何和三角，高等数学里面的微积分，都比较难学。为了对付这些难点，

很多数学老师、数学教育专家前赴后继，做了大量的研究，写了很多的著作，进行了广泛的教学实践。多年实践，几番改革，还是觉得太难，不得不“忍痛割爱”，少学或者不学。教育数学则从另一个角度看问题：这些难点的产生，是不是因为前人留下来的知识组织得不够好，不适于数学的教与学？能不能优化数学，改良数学，让数学知识变得更容易学习呢？

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系。英语中12个月的名字：January, February, ……。背单词要花点工夫吧？如果改良一下：一月就叫 Monthone，二月就叫 Monthtwo，等等，马上就能理解，就能记住，学起来就容易多了。生活的语言如此，科学的语言——数学——何尝不是这样呢？

很多人认为，现在小学、中学到大学里所学的数学，从算术、几何、代数、三角到微积分，都是几百年前甚至几千年前创造出来的数学。这些数学的最基本的部分，普遍认为是经过千锤百炼，相当成熟了。对于这样的数学内容，除了选择取舍，除了教学法的加工之外，还有优化改革的余地吗？

但事情还可以换个角度看。这些进入了课堂的数学，是在不同的年代，不同的地方，由不同的人，为不同的目的而创造出来的，而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的。难道它们会自然而然地配合默契，适宜于教学和学习吗？

看来，这主要不是一个理论问题，而是一个实践问题。

走进教育数学，看看教育数学在做什么，有助于回答这类问题。

随便翻翻这几本书，就能了解教育数学领域里近20年来做了哪些工作。从已有的结果看到，教育数学有事可做，而且能做更多的事情。

比如微积分教学的改革，这是在世界范围内被广为关注的事。丛书中有两本专讲微积分，主要还不是讲教学方法，而是讲改革微积分本身。

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分，是第一代的微积分。这是

说不清楚的微积分. 创建者说不清楚, 使用微积分解决问题的数学家也说不清楚. 原理虽然说不清楚, 应用仍然在蓬勃发展. 微积分在说不清楚的情形下发展了 130 多年.

柯西和魏尔斯特拉斯等建立了严谨的极限理论, 巩固了微积分的基础, 形成了第二代的微积分. 数学家把微积分说清楚了. 但是由于概念和推理繁琐迂回, 对于绝大多数学习高等数学的人来说, 是听不明白的微积分. 微积分在多数学习者听不明白的情形下, 又发展了 170 多年, 直到今天.

第三代的微积分, 是正在创建发展的新一代的微积分. 人们希望微积分不但严谨, 而且直观易懂, 简易明快. 让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理, 不但知其然而且知其所以然. 不但数学家说得清楚, 而且非数学专业的多数学子也能听得明白.

第一代微积分和第二代微积分, 在具体计算方法上基本相同; 不同的是对原理的说明, 前者说不清楚, 后者说清楚了.

第三代微积分和前两代微积分, 在具体计算方法上也没有不同; 不同的仍是对原理的说明.

几十年来, 国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践. 这方面的努力, 已经有了显著的成效. 在我国, 林群院士近 10 年来在此方向做了大量的工作. 本丛书中的《微积分快餐》, 就是他在此领域的代表作.

古今中外, 通俗地介绍微积分的读物极多, 但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有. 《微积分快餐》做到了. 一张图, 一个不等式, 几行文字, 浓缩了微积分的精华. 作者将微积分讲得轻松活泼、简单明了而且严谨自封, 让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂.

丛书中还有一本《直来直去的微积分》, 是笔者学习微积分的心得. 书中从“瞬时速度有时比平均速度大, 有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发, 不用极限和实数, “微分不微, 积分不积”, 直截了当地建立了微积分基础理论. 书中概念与《微积

分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩。

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功。我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的。

前辈泰斗是我们的先驱。教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望。

两本关于微积分的书，都专注于基本思想和基本概念的转变。基本思想、基本概念，以及在此基础上建立的基本定理和公式，是这门数学的筋骨。数学不能只有筋骨，还要有血有肉。中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》，是有血有肉、丰满生动的教育数学。书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事，而作者却能推陈出新，用新的视角和方法处理老问题，找出事物之间的联系，发现不同中的相同，揭示隐藏的规律。幽默的场景，诙谐的语言，使人在轻松阅读中领略神韵，识破玄机。看看这些标题，“简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”，可以想见作者的功力非同一般！特别值得一提的是，书中对微积分的精辟见解，如用代数观点演绎无穷小等，适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习，望读者留意体味。

练武功的上乘境界是“无招胜有招”，但武功仍要从一招一式入门。解数学题也是如此。著名数学家和数学教育家项武义先生说，教数学要教给学生“大巧”，要教学生“运用之妙，存乎一心”，以不变应万变，不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”。我想所谓“无招胜有招”的境界，就是“大巧”吧！但是，小巧固不足取，大巧也确实太难。对于大多数学子，还要重视有章可循的招式，由小到大，以小御大，小题做大，小中见

大。朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》，踏踏实实地从一招一式一题一法着手，探秘发微，系统地阐述数学解题法门，是引领读者登堂入室之作。作者是数学奥林匹克领域的专家。数学奥林匹克讲究题目出新，不落老套。我看了这本书里的不少例题，看不出有哪些似曾相识，真不知道他是从哪里搜罗来的！

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》。竞赛数学当然就是奥林匹克数学。华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训

活动过热的问题自然就化解或缓解了。

回到前面的话题。上面说到“大巧”和“小巧”，自然想到还有“中巧”。大巧法无定法，小巧一题一法。中巧呢，则希望用一个方法解出一类题目。也就是说，把数学问题分门别类，一类一类地寻求可以机械执行的方法，即算法。中国古代的《九章算术》，就贯穿了分类解题寻求算法的思想。中小学里学习四则算术、代数方程，大学里学习求导数，学的多是机械的算法。但是，自古以来几何命题的证明却千变万化，法无定法。为了找寻几何证题的一般规律，从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特，前赴后继，孜孜以求。我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出，希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人。在《几何基础》这部名著中，希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题，给出了机械化的判定算法。由于受时代的局限性，希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知。直到1977年，吴文俊先生提出了一个新的方法，可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假。这一成果在国际上被称为“吴方法”，它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮，使这个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分。

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法，都不能给出人们易于检验和理解的证明，即所谓可读证明。国内外的专家一度认为，机器证明的本质在于“用量的复杂克服质的困难”，所以不可能机械地产生可读证明。

笔者基于1974年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得，总结出用面积关系解题的规律。在这些规律的基础上，1992年提出消点算法，和周咸青、高小山两位教授合作，创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法，并在计算机上实现。最近在网上看到，面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了。本丛书中的《几何新方法和新体系》，包括了面积消点法的通俗阐述，以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统，由冷拓同志协助笔者整理而成。教育数学研究的副产

品解决了机器证明领域中的难题，对笔者而言实属侥幸。

基于对数学教育的兴趣，笔者从1974年以来，在30多年间持续地探讨面积解题的规律，想把几何变容易一些。后来发现，国内外的中学数学教材里，已经把几何证明删得差不多了。于是“迷途知返”，把三角作为研究的重点。数学教材无论如何改革，三角总是删不掉的吧。本丛书中的《一线串通的初等数学》，讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角，以三角的发展引出代数工具并探索几何，把三者串在一起的思路。

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量。其实，向量早已下放到中学，与传统的初等数学为伍了。在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量。讲了向量，自然想试试用向量解决几何问题，看看向量解题有没有优越性。可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中，方法略嫌繁琐，反而不如传统的几何方法简捷优美。如何用向量法解几何题？能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性？这自然是教育数学应当关心的一个问题。为此，本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》。书中用大量实例说明，如果掌握了向量解题的要领，在许多情形下，向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮。这要领，除了向量的基本性质，关键就是“回路法”。绕来绕去，就是回路之意。回路法是笔者的经验谈，没有考证前人是否已有过，更没有上升为算法。书稿主要由彭翥成同志执笔，绝大多数例子，也是他采集加工的。

谈起中国的数学科普，谈祥柏的名字几乎无人不知。老先生年近八旬，从事数学科普创作超过半个世纪，出书50多种，文章逾千篇。对于数学的执著和一生的爱，洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间。哪怕仅仅信手翻上几页，哪怕是对数学知之不多的中小学生，也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引。书中涉及的数学知识似乎不多不深，所蕴含的哲理却足以使读者掩卷遐想。例如，书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐，展现了古老学科的青春；书中提到海峡两

岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的“自然数高次方的不变特性”，这些生动活泼的素材，兼有冰冷的思考与火热的激情，无论读者偏文偏理，均会有所收益。

沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究和教育数学的研究。他的《走进教育数学》和本丛书同名，是一本从学术理论角度探索教育数学的著作。在书中他试图诠释“教育数学”的概念，探究“教育数学”的思想源头与内涵；提出“整合创新优化”、“返璞归真优化”等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例。笔者原来杜撰出“教育数学”的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统。经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了。这确是意外的收获。

viii

浏览着这风格不同并且内容迥异的10本书，教育数学领域的现状历历在目。这是一个开放求新的园地，一个蓬勃发展的领域。在这里耕耘劳作的人们，想的是教育，做的是数学，为教育而研究数学，通过丰富发展数学而推进教育。在这里大家都做自己想做的事，提出新定义新概念，建立新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味，凡此种种，无不是为教育而做数学。

为教育而做数学，做出了些结果，出了这套书，这仅仅是开始。真正重要的是进入教材，进入课堂，产生实效，让千千万万学子受益，进而推动社会发展，造福人类。这才是作者们和出版者的大期望。切望海内外同道者和不同道者指正批评，相与切磋，共求真知，为数学教育的进步贡献力量。



2009年7月

前 言

方地为舆，圆天为盖。长剑耿介，倚天之外。

——宋玉《大言赋》

我们是独一无二的吗？这个问题已经困扰了人类很多世代。也许我们的老祖宗在仰望夜空中浩瀚的天河群星时就在想：这些星星上会有人吗？

天文学是一切科学之中最富有诗意的学科。有一幅世界名画叫做“银河的起源”，肇始于优美动人的希腊神话。星光闪烁，它们是遥远的太阳，拥有一种不可抗拒的魅力，把万物之灵的人类引向空间深处。黑洞，白洞，超弦，奇点，时空隧道……有着无穷无尽的宇宙奥秘。

宇宙的年龄有多大？天文学家们估计，从“大爆炸”至今，大约已有150亿到160亿年的“高龄”了，而人类至今的历史仅仅是区区40万年左右。而高速电子计算机、核爆炸、互联网等现代科技的出现，则还不到100年。

早在1924年，天文学家埃德温·哈勃就证明了在我们的银河系之外还有其他星系。半个多世纪以后，哈勃望远镜进一步证

明，至少还有 1000 亿个银河外星系。另外，光是我们的银河系内就至少存在着 2000 亿颗恒星。太阳系的范围，充其量不过银河系全部体积的二千亿分之一。太阳系中有地球，大洲和大洋不过是地球村里的小角落。“蜗牛角上争何事？石火光中寄此生”，难怪古代的哲人和思想家要发出这样的“心声”了。总而言之，天文学是一帖清醒剂，一副解毒药，它将与人类共终始，是一个永远不会衰落的万年王国。

可靠的史实向我们昭告：天文与数学永远是亲密战友，并肩作战，相依为命的。高斯、牛顿、拉格朗日、拉普拉斯、开普勒都是一些突出的人物。我们自己的例子也不少。唐朝高僧一行（俗家姓名叫张遂）便是数理与天文“俱卓绝一时，无出其右”的，从而创立了当时世界上堪称第一流的《大衍历》。

众所周知，数学里头很讲究“特征值”与“特征函数”，对我来说，自己也确实具有一些与众不同的特征，主要取决于自己的个人气质、人生观与价值观，不是三言两语所能说清楚的。

古人有句名言：“人心之不同各如其面”，在人群中，有“圣贤”与“平庸”，“智慧”与“愚劣”之分，善恶之间，判若霄壤，有人赤贫如洗，有人挥金如土……芸芸众生，眼看不久即将突破 70 亿。数目之大，地球行将不堪重负。但这么大的一个数在自然数集中不过是“沧海一粟”。即便所有的星星都崩解为原子、电子乃至夸克，其总数仍属非常有限，大概不会超过 10^{100} 个质点。然而，数学向我们明白昭示：自然数集合（所有无限集合中最为稀疏的一个）的成员多至无穷大，更不必说实数集，复数集乃至一切连续函数的集合了。受此启示，我对研究一些特殊的自然数深感兴趣，例如对 7, 13, 19, 37, 89, 333667 等，对它们的性质进行了深入研究，取得了古今中外一些前人不知道的东西。而以往对于数的研究，一般都是“吃大锅饭”，千人一面，一视同仁的。

现在人们提到上海，总会念念不忘于“弄堂”和“石库门”，其实上海的地理环境也是千差万别，复杂多变，我从小生

长在上海西区静安寺附近的新闸路、常德路一带（20世纪30年代时属于城郊结合部，现在则是响当当的中心城区），这个地区相当特殊，有不少老房子，甚至还有明末遗物。道路迂回曲折，幽深狭长，分歧众多，很像著名作家戴望舒笔下的“雨巷”或者扬州的“一人巷”与大、小十三湾。我不是一个地理环境决定论者，但是生于斯、长于斯，朝夕相处，耳濡目染，很早就被植入了数学基因，从而在中学时代就对“走迷宫”及各式各样的网络运算问题萌生了浓厚的兴趣。现在这些古旧建筑均已被无情拆除，令人遗憾。在千人一面，千篇一律的“火柴盒”式建筑里能生发出灵感吗？所以如今我每年必去扬州。因为扬州旧城区保留得甚好，可以多多少少弥补我的怀旧心理。在扬州期间，工作效率也较高，有时一日可抵三日之用。

正是由于自己的平民性植根很深，我特别喜欢结交“草根”朋友。值得一提的是上海市闸北区的科普沙龙与科普进社区。2001年，中国科普研究所曾在沪太路新民大酒店召开过全国性的研讨会，向全国各地推荐爱科学、反迷信、反邪教的宝贵基层经验。我搞学术活动，还有一个特点是自己动手，虚心向群众学习，同群众打成一片，不取分文报酬。当然这样做的人并不是只有我一个。已故华东师范大学王一川教授在化学的研究与传播方面就做得比我更多、更好。

当时做学问很苦，不像现在有复印机，唾手可得，或者从互联网上下载，不费吹灰之力。我只能借助于夜里昏黄的灯光，拼命抄书，因为有不少好书是从图书馆里借来的，少则三天，多到一周，必须如期归还。抄书很苦，然而也有意想不到的好处，抄一遍等于读十遍，印象深刻之至。

高士其老人与顾均正、贾祖璋等科普界元老一直劝我好好读读法布尔的书，这位大作家虽然与我从事的专业不同，但他的科学思想一直使我受惠不浅。他说：“不管我们的照明灯能把光线投射到多远，照明圈外依然是死寂的黑暗。我们的四周都是未知事物的深渊黑洞……”。

看来，人类的探索永远是没有止境的，这就是我国古人所说的“生也有涯，而知也无涯”。然而，法布尔接着说下去：“我们都是求索之人，求知欲牵着我们的灵魂。就让我们从一个点到另一个点地缓缓移动我们的提灯吧。随着一小片又一小片的面目被认识清楚，人们最终也许能将整体画面的某个局部拼读出来”。

最后，请允许我用下面的“打油诗”来结束这篇不算太短的“前言”吧，也希望本书的读者与我共勉：

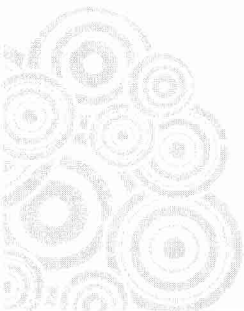
发现无论大小，
贵在未经人道。
堂堂数学大厦，
不弃一砖一瓦。

谈祥柏

2009年8月，日全食后之“怪夏”，

写于上海华灵路大华新村

南华苑之陋室



《走进教育数学》丛书编委会

主 编 张景中

委 员 (按姓氏汉语拼音排序)

李尚志 林 群 沈文选 谈祥柏

王鹏远 张奠宙 张景中 朱华伟

目 录

总序

前言

第 1 章 智力加油站	1
1.1 有记性的数	1
1.2 推陈出新，增加调料	2
1.3 无视直觉	3
1.4 试两次就行	6
1.5 风行宇内	7
1.6 千年名题话百鸡	10
1.7 月相变化的乘法	12
1.8 用减法开平方	16
1.9 数点子求面积	19
1.10 青朱出入图	22