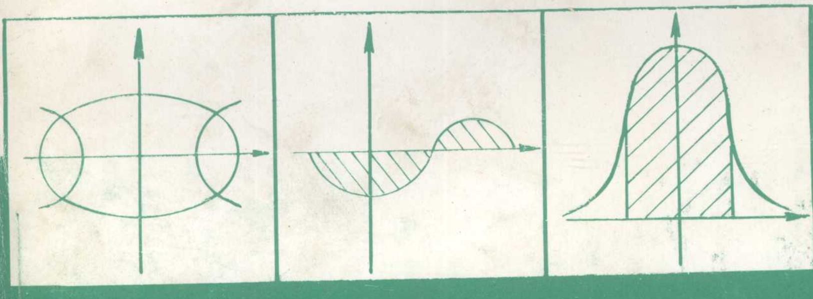
中等专业学校试用教材

（工科专业适用）

数 学

（高等数学部分）



主编 朱永银 刘传耀 王新民

武汉工业大学出版社

数　　学

（高等数学和工程数学部分）

主　审　王启远　申　波　马晓明　吴汉民

主　编　朱永银　刘传耀　王新民

副主编　肖海军　雷红兵

武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学/朱永银,刘传耀,王新民主编.一武汉:武汉工业大学出版社,1997.6
ISBN 7-5629-0917-2
Ⅰ.数…
Ⅱ.①朱… ②刘… ③王…
Ⅲ.高等数学-工程数学-中等专业学校-教材
Ⅳ.O1

武汉工业大学出版社出版发行
各地新华书店经销
随州市报社印刷厂印刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:16.625 字数:425.6千字
1994年4月第1版 1997年6月第3次印刷
ISBN7—5629—0917—2/O·39
印数:11001～14000册 定价:16.50元

前 言

根据1991年国家教委审定的《中等专业学校数学教学大纲(工科类)》的精神，结合湖北省中专数学教学实际，我们组织了全省部分中专学校有丰富教学经验的数学教师编写了这套教材。

这套教材分两册出版。《数学(初等数学部分)》包括代数、三角、空间图形、平面解析几何和数列与极限等内容;《数学(高等数学和工程数学部分)》包括一元函数微积分、微分方程、级数、拉普拉斯变换、矩阵与行列式和概率初步等内容。在编写过程中，尽量避免繁琐的理论推导，在基本保持传统教材体系的基础上，在开发学生智能方面作了初步尝试，并注意了与初中数学教材的衔接。本教材可供招收初中毕业生工科各专业使用。高等数学和工程数学部分也可供招收高中毕业生工科各专业使用。带*号的内容可供选学。

《数学(初等数学部分)》由廖光焕、申波、王海英主编;《数学(高等数学和工程数学部分)》由朱永银、刘传耀、王新民主编。全书由朱永银老师统稿。参加本书编审的编委(以姓氏笔划为序)是:

马晓明、王启远、王海英、王玲、王新民、丰蓓、石铸、申波、刘传耀、朱永银、肖海军、吴汉民、余润东、罗凯铭、张志萍、唐连发、崔建军、郭文秀、雷红兵、蒋元加、廖先焕。

本教材在编写过程中，得到了随州市工业学校、荆州市机电工程学校、十堰市汽车工业学校，湖北省制药工业学校、湖北省水产学校、武汉铁路运输学校吴家山分校、长江水利水电学校、宜昌市机电工程学校和湖北省电子工业学校的大力支持和热情帮助。在本教材初次出版过程中，还得到了武汉电力学校、武汉铁路运输学校等二十多所中专学校的支持与帮助，在此一并致谢。对为本书出版而辛勤工作的武汉工业大学出版社的编辑，随州市报社印刷厂的广大干部职工表示诚挚的谢意。

本教材经过前两次印刷出版，使用效果很好。这次又进行修订，一定会受到广大读者欢迎。由于编者水平所限，还难免存在疏漏之处，敬请读者批评指正，以便再次印刷时订正。

编 者

1997年4月于武汉

目　录

第一章　极限与连续

微积分研究的对象是变量以及反映变量之间相互关系的函数，极限是学习微积分学的理论基础. 因此，本章将在复习函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

§1.1　基本初等函数与初等函数

函数及有关特性在初等数学中已经详细讨论过. 这里，我们只简单地回顾一下函数的概念，然后重点学习复合函数与初等函数的概念.

一、函数的概念

在同一变化过程中，往往有几个变量，它们按照一定的规律互相联系着，对应着. 变量之间的这种对应关系，数学上称作函数关系.

定义　设 D 是一个实数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某种对应关系 f，y 都有确定的值和它对应，那么 y 就称作定义在数集 D 上的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫自变量，数集 D 叫做函数的定义域. 当 x 取遍 D 中的一切实数值，与它对应的函数值集合 M，称为函数的值域.

在上述函数定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都有唯一的 $y\in M$ 与之对应，那么这种函数就称为单值函数. 否则就称为多值函数. 若没有特别说明，本书所讨论的函数都是单值函数.

二、基本初等函数

我们学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，现分别简介如下：

1. 幂函数

函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$ 叫做幂函数. 它的定义域随着 α 的不同而异.

2. 指数函数

函数 $y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 叫做指数函数. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 在今后的学习中经常用到以无理数 e 为底的指数函数 $y=e^{x}$.

3. 对数函数

函数 $y=\log_{a}x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 叫做对数函数. 它的定义域为 $(0,+\infty)$. 值域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a=e$ 时，对数函数 $y=\log_{e}x$ 可简写成 $y=\ln x$. 以 e 为底的对数称之为自然对数.

4. 三角函数

函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\mathrm{tg}x$、$y=\mathrm{ctg}x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$ 统称为三角函数.

(1) 正弦函数 $y=\sin x$，周期为 2π，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$.

(2) 余弦函数 $y=\cos x$，周期为 2π，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$.

(3) 正切函数 $y=\mathrm{tg}x$，周期为 π，定义域为 $\{x\mid x\in R,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) 余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$，周期为 π，定义域为 $\{x\mid x\in R, x\neq k\pi, k\in z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数，记为 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$.

(1)反正弦函数 $y=\arcsin x$，其中自变量 x 表示正弦函数值，函数 y 表示角（或弧），定义域为$[-1,1]$，值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

(2)反余弦函数 $y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$.

(3)反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

(4) 反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$.

有时，我们将多项式也归纳为基本初等函数. 对于上述五种基本初等函数，要会画出它们的图象和叙述其简单性质.

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

除了基本初等函数以外，在实际问题中还会遇到由几个简单函数组合成的较复杂函数.

例如，质量为 m 的物体，以初速度 v_o 垂直上抛，求它的动能 E 与时间 t 之间的函数关系.

由物理学知道，如果物体运动速度为 v，则动能 E 与速度 v 之间的函数关系为

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

如果不考虑空气的阻力，则速度 v 与时间之间的函数关系是

$$v=v_o-gt \tag{2}$$

其中 g 为重力加速度.

由上面(1)、(2)两式，对于每一个 $t\in[o,\frac{v_o}{g}]$，通过变量 v，都有确定的 E 和它对应，因此，把(2)式代入(1)式，即得动能 E 与时间 t 之间的函数关系为

$$E=\frac{1}{2}m(v_o-gt)^2 \qquad (o\leqslant t\leqslant\frac{v_o}{g})$$

一般地，我们给出如下的复合函数的定义：

定义 设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，并且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分使 $f(u)$ 有定义，那末，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们把后一个函数就称作由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量.

例 1 指出下列各复合函数的复合过程：

(1) $y=\cos 2x$；(2) $y=\ln(1+x^2)$；

(3) $y=\cos^2 x$；(4) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

解：(1) 函数 $y=\cos 2x$ 是由 $y=\cos u$，$u=2x$ 复合而成；

(2) 函数 $y=\ln(1+x^2)$ 是由 $y=\ln u$，$u=1+x^2$ 复合而成；

(3) 函数 $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos x$ 复合而成；

(4) 函数 $y=\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\mathrm{arctg}u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x^2$ 复合而成. 这里要注意，容易错误地写成：函数 $y=\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\mathrm{arc}u$，$u=\mathrm{tg}v$，$v=\sqrt{z}$，$z=1+x^2$，复合而成.

2. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和复合步骤所形成的函数叫做初等函数. 例如，函数 $y=\ln(1+x^2)$，$y=2\cos\sqrt{1-x^2}$，$y=\dfrac{1-x}{1+x}$，和 $y=e^{\cos x}$ 等等，都是初等函数.

四、建立函数关系举例

用数学解决实际问题，首先要把实际问题转化为数学问题，转化过程中，很重要的问题就是找出这个实际问题中变量之间的函数关系，然后进行分析和计算. 下面举例说明建立函数关系的过程.

例 2 在直角三角形中（如图 1-1），$AC=b$，$BC=a$，动点 M 在 AB 上移动，求变量 y 与变量 x 之间的函数关系，并求其定义域.

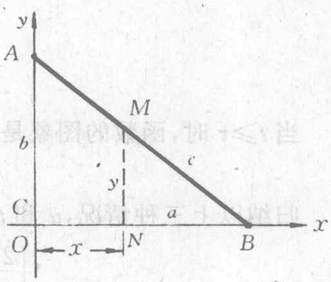


图 1-1

解：如图 1-1 所设 $Rt\triangle ABC\sim Rt\triangle MNB$，所以有对应边成比例，于是有

$$\frac{AC}{MN}=\frac{BC}{NB} \tag{3}$$

又因为 $AC=b$，$MN=y$，$BC=a$，$NB=BC-NC=a-x$，代入(3) 式便有

$$\frac{b}{y}=\frac{a}{a-x}$$

于是有 $\quad y=\dfrac{b(a-x)}{a} \quad x\in[0,a]$

这就是变量 y 与变量 x 的函数关系.

例 3 发射火箭需要计算克服地球引力所作的功. 设火箭的质量是 m，地球半径为 R，当火箭离地球中心距离为 r 时，求地球引力 F 与火箭离地球中心距离 r 的函数关系.

解：由万有引力定律、当火箭与地球中心距离为 r 时，它们之间引力是

$$F=k\frac{Mm}{r^2} \tag{4}$$

这里，M 为地球质量，k 为比例常数.

当火箭在地面上时，这时 $r=R$，引力是 $k\dfrac{Mm}{R^2}$；而另一方面，我们知道，引力又为 mg，所以有

$$\frac{kMm}{R^2}=mg \quad 即\ kM=gR^2$$

代入(4)式便有

$$F=R^2mg\frac{1}{r^2} \qquad r\in[R,+\infty)$$

这就是地球引力 F 与火箭离地球中心距离 r 的函数关系.

例 4 已知一个单三角脉冲电压，其波形如图 1-2 所示，建立电压 u 与时间 t 之间的函数关系.

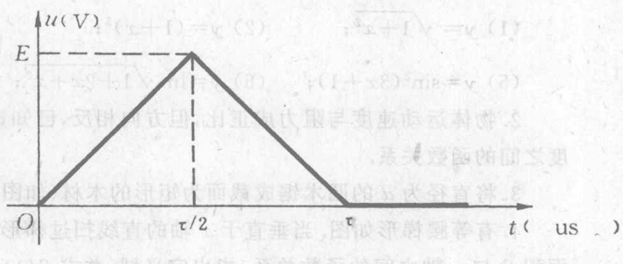


图 1-2

解：由图看出，u 随 t 变化的规律在时间

$0\leqslant t<\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau,t\geqslant\tau$ 内是各不相同的，所以需进行分段考察.

当 $0\leqslant t<\frac{\tau}{2}$ 时，函数的图象是连接原点$(0,0)$与$(\frac{\tau}{2},E)$的直线段，它的方程是

$$u=\frac{E}{\frac{\tau}{2}}t,\text{即 } u=\frac{2E}{\tau}t.$$

当 $\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau$ 时，函数的图象是连接点$(\frac{\tau}{2},E)$与点$(\tau,0)$的直线段，它的方程是

$$u-0=\frac{E-0}{\frac{\tau}{2}-\tau}(t-\tau)$$

即

$$u=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau).$$

当 $t\geqslant\tau$ 时，函数的图象是点$(\tau,0)$以右的 x 轴，它的方程是

$$u=0$$

归纳以上三种情况，u 和 t 之间的函数关系是：

$$u=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t & 0\leqslant t<\frac{\tau}{2}\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau) & \frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau\\ 0 & t\geqslant\tau\end{cases}\tag{5}$$

象(5)式那样，在不同区间内用不同式子来表示的函数称为**分段函数**. 它的定义域是这些区间的并集. 求分段函数的函数值，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进行计算.

例如上例中的(5)式是分段函数，它的定义域为$[0,+\infty)$，如果求 $t=\frac{\tau}{3},t=\frac{2\tau}{3}$ 和 $t=2\tau$ 的函数值时，则分别代入(5)式右边的三个表达中计算.

当 $t=\frac{\tau}{3}$ 时，$u=\frac{2E}{\tau}\cdot\frac{\tau}{3}=\frac{2}{3}E$；

当 $t=\frac{2\tau}{3}$ 时，$u=-\frac{2E}{\tau}(\frac{2\tau}{3}-\tau)=\frac{2}{3}E$；

当 $t=2\tau$ 时，$u=0$.

习题 1—1

1. 指出下列函数的复合过程

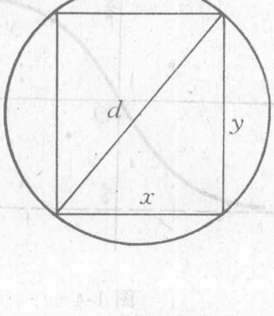
(1) $y=\sqrt{1+x^2}$； (2) $y=(1+x)^5$； (3) $y=\cos\frac{3}{2}x$； (4) $y=e^{x-1}$；

(5) $y=\sin^2(3x+1)$； (6) $y=\ln\sqrt{1+2x+x^2}$； (7) $y=\sqrt[3]{\ln\cos^2x}$； (8) $y=[\arccos(1-x^2)]^3$.

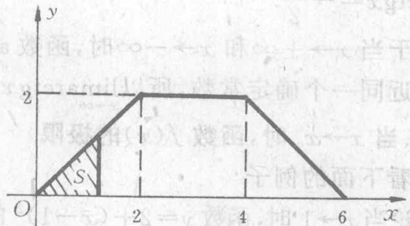
2. 物体运动速度与阻力成正比，但方向相反，已知速度为 1m/s 时阻力为 1.96×10^{-2}N，试建立阻力与速度之间的函数关系.

3. 将直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的木材(如图)，列出矩形截面的两边长的函数关系.

4. 有等腰梯形如图. 当垂直于 x 轴的直线扫过梯形时，若直线与 x 轴的交点坐标为$(x,0)$，求直线扫过的面积 S 与 x 轴之间的函数关系. 指出定义域，并求 $S(1),S(3),S(5),S(6)$的值.



（第三题图）



（第四题图）

5. 确定下列函数的定义域并作出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ 1 & x<0\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant 1\\ x^2-1 & 1<|x|<2\end{cases}$

§1.2　函数的极限

在初等数学中已经讲了数列的极限，是把数列看作自变量是正整数的函数诸值排列而成，很自然会想到，如果函数的自变量不为正整数，而是连续变量（一切实数）x，这时，连续变量函数的极限又如何求呢？下面来谈这个问题.

一、当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

例如：函数 $y=1+\dfrac{1}{x}(x\neq0)$，当 $|x|$ 无限增大时，y 无限接近于1，如图1-3. 这时，我们就把1称作函数 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，于是有如下定义.

定义　如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那末 A 就称作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$

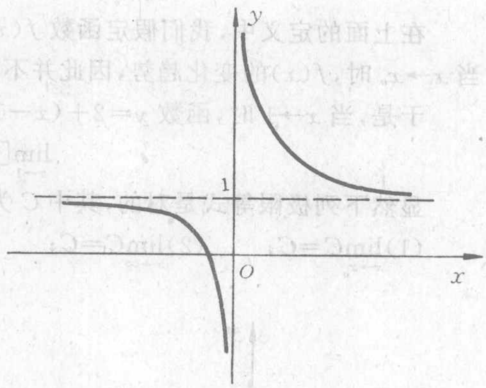


图 1-3

根据上述定义可知，当 $x\to\infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x}$ 的极限为1，可记为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

有时需要区分 x 趋于无穷大的符号. 自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既取正值无限增大（记为 $x\to+\infty$），同时也取负值而绝对值无限增大（记为 $x\to-\infty$）. 但有时 x 的变化趋向只能或只需取这两种变化中的一种情形，这时只需将定义中的"$x\to\infty$"分别改为"$x\to+\infty$"，和"$x\to-\infty$"，就可以得到当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 极限的定义.

例如，如图 1-4 所示，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$及

$\lim\limits_{x\to-\infty}\text{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$.

由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\text{arctg}x$ 不是无限接近同一个确定常数，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\text{arctg}x$ 不存在.

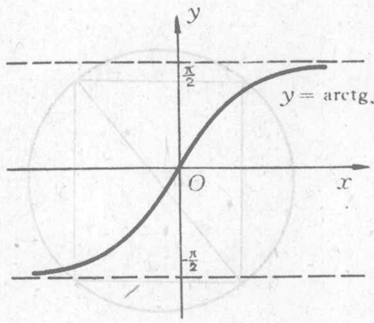


图 1-4

二、当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子

讨论当$x\to1$ 时，函数 $y=2+(x-1)^2$ 的变化趋势.

先根据函数 $y=2+(x-1)^2$ 列表并作图（图 1-5），来看当 $x\to1$ 时，y 的变化趋势，见表 1-1 所示.

表 1-1

x	0.5	1.5	0.9	1.1	0.99	1.01	…
$2+(x-1)^2$	2.25		2.01		2.0001		…

结合图、表可以看出当自变量$x\to1$ 时，函数 $2+(x-1)^2$ 趋向于 2；x 越接近于 1，y 就越接近于 2. 当 x 无限接近于 1 时，y 就无限接近于 2，即：当 $x\to1$ 时，$y=2+(x-1)^2\to2$.

由上例，对当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限可定义如下：

定义　当自变量 x 无限接近于 x_0 时（x 可以不等于 x_0），函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A，那末 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或当 } x\to x_0 \text{ 时}, f(x)\to A.$$

在上面的定义中，我们假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁是有定义的，并且我们考虑的是当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的变化趋势，因此并不在于 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义.

于是，当 $x\to1$ 时，函数 $y=2+(x-1)^2$ 的极限是 2 可记为

$$\lim_{x\to1}[2+(x-1)^2]=2.$$

显然下列极限等式是对的，其中 C 为常数

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$；　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$；　(3)$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$

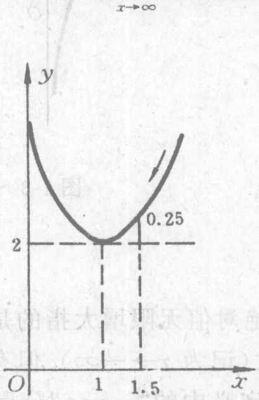


图 1-5

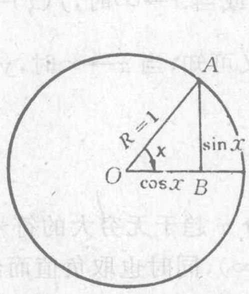


图 1-6

例 1　在单位圆上考察$\lim\limits_{x\to0}\sin x$ 和$\lim\limits_{x\to0}\cos x$ 的值.

解:作单位圆,并取$\angle AOB=x$ 弧度(图 1-6),则 $\sin x=BA$,$\cos x=OB$

当 $x\to 0$ 时,BA 无限接近于 0,OB 无限接近于 1,所以

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1$$

三、当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的左极限与右极限

我们前面讨论的当 $x\to x_0$ 时函数的极限中,x 既可从 x_0 的左侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0-0$),也可从 x_0 的右侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0+0$). 下面再给出当 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0+0$ 时函数极限的定义:

定义 如果当 $x\to x_0-0$ 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A,那末 A 就称作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A$$

如果当 $x\to x_0+0$ 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A,那末 A 就称作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记为

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A$$

由图 1-5 可看出,函数 $y=2+(x-1)^2$ 当 $x\to 1$ 的左极限为

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}[2+(x-1)^2]=2$$

右极限为

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}[2+(x-1)^2]=2$$

即

$$f(1-0)=f(1+0)=2$$

它们都等于函数 $y=2+(x-1)^2$ 当 $x\to 1$ 时的极限.

一般地,如果当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的左极限与右极限都存在并且相等,即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$,那末函数$f(x)$的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也一定存在并且等于 A;如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在并且等于 A,那末当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限与右极限也都存在并且都等于 A,即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

因此,即使 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在,但不相等那末$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$就不存在.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解:当 $x<0$ 时

$$f(0-0)=\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}1=1$$

而当 $x>0$ 时

$$f(0+0)=\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}x=0$$

当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)$ 的左、右极限存在,但不相等,即

$$f(0-0)\neq f(0+0)$$

所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,见图 1-7.

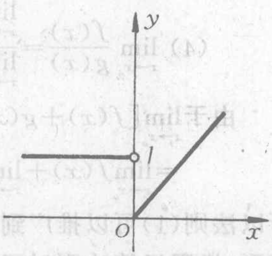


图 1-7

习题 1—2

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 3x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 作 $f(x)$ 的图象，并讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左右极限，从而说明当 $x\to 0$ 时函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

2. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1\\ 1, & x=1\\ -1, & x>1\end{cases}$$ 在 $x\to 1$ 时极限不存在.

3. 讨论符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$ 当 $x\to 0$ 时的左右极限.

4. 在 RC 电路的充电过程中，电容器两端电压 Uc 与时间 t 的函数关系如下

$$Uc=E(1-e^{-\frac{t}{Rc}})\ (E、R、C\text{ 为正常数})$$

讨论当 $t\to+\infty$ 时，电压 Uc 的变化趋势.

§1.3 极限的运算与两个重要极限

一、极限的运算法则

对于比较简单的函数的极限，可以用观察法求出极限，但对于比较复杂的函数的极限，必须经过计算才能得到. 下面给出极限的四则运算法则.（证明从略）

设有两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，而且存在极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=B$$

则有 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$（$C$ 为常数）

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$

由于 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)+h(x)]$

$$=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}[g(x)+h(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}h(x)$$

所以法则(1)可以推广到有限个函数相加的情形. 同样，法则(3)也可推广到有限个函数相乘的情形. 极限运算法则对于 $x\to\infty$ 的情形也成立.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 3}(2x^3-3x+5)$

解：$\lim\limits_{x\to 3}(2x^3-3x+5)=\lim\limits_{x\to 3}2x^3-\lim\limits_{x\to 3}3x+\lim\limits_{x\to 3}5=2\lim\limits_{x\to 3}x^3-3\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}5$

$=2\times 3^3-3\times 3+5=50$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+2x^2-x+5}{x^2+2x-1}$

解:分母极限为

$$\lim_{x\to1}(x^2+2x-1)=1^2+2\times1-1=2$$

分子的极限为

$$\lim_{x\to1}(3x^3+2x^2-x+5)=3\times1^3+2\times1^2-1+5=9$$

所以 $$\lim_{x\to1}\frac{3x^3+2x^2-x+5}{x^2+2x-1}=\frac{9}{2}$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x^2-16}$

解:当 $x\to4$ 时分母的极限为 0,这时不能直接应用法则(4)进行计算,但在 $x\to4$ 的过程中,由于 $x\neq4$,即 $x-4\neq0$,而分子及分母有公因子 $x-4$,故在分式中可约去不为零的公因子.所以

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{1}{x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to4}1}{\lim\limits_{x\to4}x+\lim\limits_{x\to4}4}=\frac{1}{8}$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+8}{4x^3+2x^2+5}$

解:先用 x^3 同除分子及分母,然后取极限,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+8}{4x^3+2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^3}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}$$

又由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x})^3=0$

于是 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+8}{4x^3+2x^2+5}=\frac{2+3\times0+8\times0}{4+2\times0+5\times0}=\frac{1}{2}.$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

解:先将分子分母同乘以 $\sqrt{x+4}+2$,然后求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{\sqrt{0+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

二、两个重要极限

下面介绍以后要用到的两个重要极限

1. 极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

因为$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0,\lim\limits_{x\to0}x=0$,所以不能用除法法则来计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$. 但通过计算当$|x|$无限变小时,$\dfrac{\sin x}{x}$的变化趋势如表 1-2 所示.

表 1-2

x	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{8}$	$\pm\frac{\pi}{16}$	$\pm\frac{\pi}{32}$	$\pm\frac{\pi}{64}$	$\pm\frac{\pi}{128}$	…
$\frac{\sin x}{x}$	0.6366	0.9003	0.9745	0.9939	0.9984	0.9996	0.9999	…

从上表可以看出,当$|x|$无限变小时,$\dfrac{\sin x}{x}$无限接近于 1. 可以证得,$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}$

$=1$ 所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1.$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\xlongequal{令 3x=u}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{1}{3}u}=3$

熟练以后，不必用代换法求极限，可直接凑成重要极限左边的"形状"、然后计算. 如上例就可以这样解：

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3.$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

当 $x\to\infty$ 时，虽然 $1+\frac{1}{x}\to 1$，但与此同时由于 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的方次 x 已趋向无穷，所以不能认为 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的极限就是 1，究竟是什么数，还需考察一下. 下面可作些计算来观察当 $|x|$ 无限增大时，$(1+\frac{1}{x})^x$ 的变化趋势，计算可得下表.

表 1-3

x	1	2	5	10	100	1000	10000	100000	…
$(1+\frac{1}{x})^x$	2	2.25	2.49	2.59	2.705	2.717	2.718	2.71827	…

续表 1-3

x	-10	-100	-1000	-10000	-100000	…
$(1+\frac{1}{x})^x$	2.88	2.732	2.720	2.7183	2.71828	…

从上表可以看出，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的对应值无限趋近于 2.718.

可以证明，当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的极限都存在而且相等. 我们用 e 表示这个极限值，即

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e \tag{1}$$

这个数 e 是无理数，它的值是

$$e=2.718281828459045\cdots\cdots.$$

如果在(1)式中，令 $z=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$z\to 0$，于是(1)式又可写成

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e.$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$

解：极限可写成下列形式

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}\cdot 2}$$

然后令 $t=\frac{x}{2}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$、从而有

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=\lim_{t\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^2=[\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t]^2=e^2$$

熟练了以后，不必用代换求极限，可将所求极限凑成(1)式左边的"形状"，然后直接使用(1)式求极限，如上例就可以这样作.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2=e^2$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x$（$k$ 为不等于零的整数）

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{k}{x})^{\frac{x}{k}}]^k=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{\frac{x}{k}}]^k=e^k$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$

解：利用例 5 的结果，令 $k=-1$ 即可得

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-1}{x})^x=e^{-1}$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{3}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left[\frac{1+\frac{-1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right]^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$=(\frac{e^{-1}}{e})^{\frac{1}{2}}=(e^{-2})^{\frac{1}{2}}=e^{-1}$$

习题 1—3

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-3x+2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-1}{6x^3-5x^2+1}$；

(7) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；　(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$；