广州市中学

数学

教学参考资料

高中二年级第一学期

广 州 市 中 学
数学教学参考资料
（高中二年级第一学期）
广州市中小学教材编写组编
*
广东人民出版社出版
广东省新华书店发行
广东梅县印刷厂印刷
*
1978年5月第1版　　1978年7月第1次印刷
统一书号：7111·930　　定价：0.31元

第一章　二元二次方程组

一、　教学目的

使学生熟练掌握用代入消元法和加减消元法解二元二次方程组，为学习曲线与方程作准备。

二、　教学建议

本章授课时间，大约共需4课时，每种解法可各用2课时。

代入消元法，实质是应用"一个量可以用它的等量来代换"即等量代换公理，消去一个未知数，因此必须从某一个方程通过同解变形得到方程　$y=f(x)$ 或　$x=g(y)$，然后在另一个方程中，用 $f(x)$ 代替 y 或用 $g(y)$ 代替 x。这样，二元方程组就可以转化为一元方程了。

加减消元法，实质是应用"等量相加（减）等量，其和（差）相等"这一公理，消去一个未知数，因此必须把两个方程都变成某一个未知数的各项系数绝对值对应相等的方程，然后把两个方程左右两边分别相加（减）。这样，二元方程组就可以转化为一元方程了。

在解分式方程（组）、无理方程(组)、超越方程（组）时，往往使用换元法。通过换元后，把原方程（组）转化为整式方程（组），解这个整式方程（组）后，必须代入换元关系式，求出原方程（组）的解。如果原方程（组）是分式方程(组)、无理方程(组)、超越方程(组)则必须进行验解。

教学时必须向学生讲清上述三种方法，此外，还要向学生指出：

1. 二（n）元方程组的解只能叫解，不能象一元方程那样叫根。

2. 解二元方程组时，如果方程组中有一个方程的某一个未知数只有一次项，那么常用代入消元法来解；如果方程组中两个方程的两个未知数都有二次项，那么常用加减消元法来解。

由于本章安排教时很少，因此只介绍简单的、特殊的二元二次方程组及其解法。对于一般的二元二次方程组：

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0, \end{cases}$$

的解法不作介绍。

三、 参考材料

1. 关于二元二次方程组及其解的几何意义

二元一次方程代表一条直线，二元二次方程代表一条二次曲线（包括两条相交直线、两条平行直线），因此，二元二次方程组的几何意义就是一条直线和一条二次曲线所组成的图形或者是两条二次曲线所组成的图形，二元二次方程组的解的几何意义就是直线与二次曲线或者是两条二次曲线的交点，方程组的解 $\begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0, \end{cases}$ 就是交点坐标（x_0，y_0）。

例如，方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x+y=5, \end{cases}$ 的几何图形

如图1.1，直线与圆有两个交点（2，3），（3，2），方程组有两组解 $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2. \end{cases}$

又如，方程组 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 的几何图形如图1.2，双曲线与椭圆有四个交点

$$\left(\frac{15\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{34}}{17}\right), \left(\frac{15\sqrt{17}}{17}, -\frac{4\sqrt{34}}{17}\right),$$

$$\left(-\frac{15\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{34}}{17}\right), \left(-\frac{15\sqrt{17}}{17}, -\frac{4\sqrt{34}}{17}\right).$$

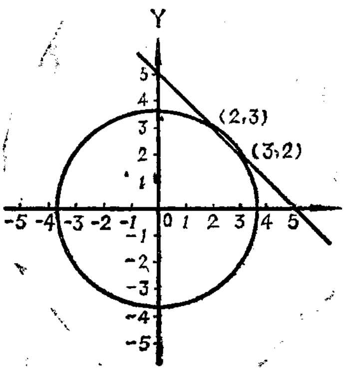

图1. 1

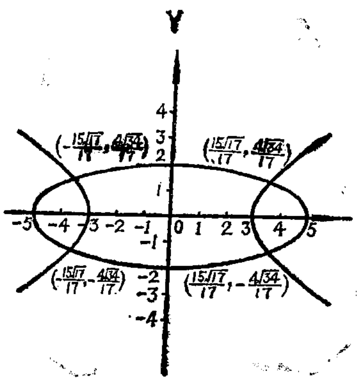

图1. 2

方程组有四组解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{15\sqrt{17}}{17}, \\ y_1=\dfrac{4\sqrt{34}}{17}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{15\sqrt{17}}{17}, \\ y_2=-\dfrac{4\sqrt{34}}{17}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{15\sqrt{17}}{17}, \\ y_3 = \dfrac{4\sqrt{34}}{17}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{15\sqrt{17}}{17}, \\ y_4 = -\dfrac{4\sqrt{34}}{17}. \end{cases}$$

2. 应用韦达定理解二元二次方程组

韦达定理：x_1，x_2是一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的两个根的充分必要条件是：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

证明：必要性：

设x_1，x_2是一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的两个根，不失普遍性，令

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

那么 $$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{c}{a}.$$

充分性：

设x_1，x_2满足关系式

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, & (1) \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}, & (2) \end{cases}$$

那么，从（1）得

$$x_1=-\frac{b}{a}-x_2, \qquad (3)$$

把（3）代入（2）得

$$\left(-\frac{b}{a}-x_2\right)x_2=\frac{c}{a},$$

整理得

$$ax_2^2+bx_2+c=0,$$

所以x_2是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根。

同理可证x_1也是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根。

因此，x_1、x_2是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根。

注意：（1） 当$a=1$时，定理可简化为：

x_1、x_2是一元二次方程

$$x^2+bx+c=0$$

的两个根的充分必要条件是：

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b, \\ x_1x_2=c. \end{cases}$$

（2） 定理证明过程中没有要求一元二次方程ax^2+

$bx+c=0$有实数根，也就是说，x_1、x_2不一定是实数。

下面介绍应用韦达定理解二元二次方程组：

例1：解方程组 $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=-16. \end{cases}$

解：根据韦达定理可知，x，y是一元二次方程$z^2-6z-16=0$的两个根。

解这方程，得

$$z_1=8, \quad z_2=-2.$$

就是 $\begin{cases} x_1=8, \\ y_1=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=8. \end{cases}$

例2：解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=10, & (1) \\ xy=4. & (2) \end{cases}$

解：$(2)^2$得 $\qquad x^2y^2=16 \qquad (3)$

由(1)，(3)，根据韦达定理可知，x^2，y^2是一元二次方程 $z^2-10z+16=0$ 的两个根。

解这个方程，得

$$z_1=2, \quad z_2=8.$$

就是 $\begin{cases} x^2=2, \\ y^2=8; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2=8, \\ y^2=2. \end{cases}$

根据(2)可知，x，y同号，

所以 $\begin{cases} x_1=\sqrt{2}, \\ y_1=2\sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\sqrt{2}, \\ y_2=-2\sqrt{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3=2\sqrt{2}, \\ y_3=\sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-2\sqrt{2}, \\ y_4=-\sqrt{2}. \end{cases}$

例3：解方程组 $\begin{cases} x^2-y^2=9, & (1) \\ xy=-6. & (2) \end{cases}$

解：(2)^{2}并取相反数，得 $-x^2y^2=-36$ (3)

由(1)，(3)，根据韦达定理可知，x^2，$-y^2$是一元二次方程 $z^2-9z-36=0$ 的两个根。

解这方程，得

$$z_1=12,\quad z_2=-3.$$

就是 $\begin{cases} x^2=12, \\ y^2=3, \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} x^2=-3, \\ y^2=-12. \end{cases}$ ②

由①，并根据(2)可知，x，y异号，

所以 $\begin{cases} x_1=2\sqrt{3}, \\ y_1=-\sqrt{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2\sqrt{3}, \\ y_2=\sqrt{3}. \end{cases}$

方程组②没有实数解。所以原方程组的实数解为

$$\begin{cases} x_1=2\sqrt{3}, \\ y_1=-\sqrt{3}; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=-2\sqrt{3}, \\ y_2=\sqrt{3}. \end{cases}$$

如果在复数范围内解方程组②，并根据(2)，可得

$$\begin{cases} x_3=\sqrt{3}i, \\ y_3=2\sqrt{3}i; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_4=-\sqrt{3}i, \\ y_4=-2\sqrt{3}i. \end{cases}$$

因此，原方程组在复数范围内有四组解：

$$\begin{cases} x_1=2\sqrt{3}, \\ y_1=-\sqrt{3}; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=-2\sqrt{3}, \\ y_2=\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\sqrt{3}i, \\ y_3=2\sqrt{3}i; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_4=-\sqrt{3}i, \\ y_4=-2\sqrt{3}i. \end{cases}$$

第二章　曲线和方程

一、　教学目的

1．通过形和数的联系和转化，阐明曲线和方程的对立统一关系，对学生进行辩证唯物主义的教育。

2．使学生在已掌握平面内的点和一对实数之间有一一对应的关系的基础上，能够根据所给条件，妥善选择坐标系，建立曲线的方程；能够通过方程的讨论，掌握曲线的性质，画出曲线。

3．要求学生从分析各种曲线和方程的相互关系中认识一些物质的运动形式，并能初步运用于分析和解决三大革命实践中的一些简单的实际问题。

二、　教材说明

曲线和方程从“形”和“数”的两个方面去反映物质的同一运动形式，“形”和“数”是客观实际中存在的两个不同概念，它们是对立的，但是通过直角坐标系这个桥梁，能使它们统一起来，并能互相转化，这就为我们用数学方法去分析问题和解决问题提供了方便，学生从数与数轴、函数和它的图象的学习中，对数和形之间的联系已有一些认识，但过去主要是把“数”的问题转化为“形”的问题来研究，使它具有直观性，本章则着重把“形”（曲线）的问题转化为“数”（方程）的问题来研究，也就是通过直角坐标系用代数的方法来研究几何图形，把曲线和直线的研究归结为对它

们的方程的研究，从而概括出同类“形”的共同本质和属性。

本章教材首先阐明有向线段和它的数量求法，说明直角坐标系中所研究的线段（如AB）一般是有方向的，如果不考虑它的方向，只考虑它的长度，便要用符号｜AB｜表示，教材接着讲授平面内两点的距离的求法，线段的定比分点和中点坐标的求法等的基础知识，然后讲清曲线作为适合某一条件的动点的轨迹的概念和与它对应的方程的概念，进而讲清一般怎样由轨迹条件求它的对应方程、又怎样由曲线（即轨迹）的方程讨论曲线的性质并画出方程表示的曲线。最后再利用这种方法去逐步研究直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线和一般的二元二次方程所表示的曲线以及这些曲线在实际上的应用。

两点间的距离是研究曲线的基础；曲线的概念、曲线方程的建立、通过方程讨论曲线的性质并画出曲线等是和全章都有关系的重要内容；所以，它们都是本章学习的重点内容。

曲线作为动点的轨迹的概念，曲线和方程的对应关系、曲线方程的建立、通过方程讨论曲线的性质并画出曲线和利用旋转变换化简一般的二元二次方程等，这些都是学生难以理解且演算过程比较繁难的。因此，它们是本章学习的难点。

三、　课时安排

本章教学时数，大约共需54课时，可大致分配如下：

第一节	曲线和方程	10课时
2．1	有向线段	1.5课时

2. 2	平面内两点间的距离	1.5课时
2. 3	线段的定比分点和中点	1 课时
2. 4	曲线和方程	5 课时
复	习	1 课时
第二节	直线	7 课时
2. 5	直线的倾斜角和斜率	3 课时
2. 6	直线的方程	2 课时
2. 7	直线方程的一般形式	2 课时
第三节	圆	5 课时
2. 8	圆和它的方程	3 课时
2. 9	坐标轴的平移	2 课时
第四节	椭圆	7 课时
2.10	椭圆和它的方程	2 课时
2.11	椭圆的性质	3 课时
2.12	椭圆的应用	2 课时
第五节	双曲线	8 课时
2.13	双曲线和它的方程	2 课时
2.14	双曲线的性质	4 课时
2.15	双曲线的应用	2 课时
第六节	抛物线	9 课时
2.16	抛物线和它的方程	2 课时
2.17	抛物线的性质	3 课时
2.18	抛物线的画法	1 课时
2.19	抛物线的应用	3 课时
第七节	二元二次方程代表的曲线	6 课时
2.20	不含xy项的二元二次方程代表的曲线	2 课时

第一节　曲线和方程

一、　教学要求

1． 通过曲线与方程的对立统一和转化的分析，使学生了解形与数的对立统一关系，对学生进行辩证唯物主义观点的教育。

2． 要求学生能熟练掌握两点间的距离公式；能掌握定比分点公式，懂得式中常数λ的意义；并能应用这些公式。

3． 使学生理解研究曲线和方程的关系一般包括“由曲线求方程”和“由方程画曲线”这两个方面，要求学生能根据动点的运动条件求出一些简单曲线的方程和根据曲线的特征画出一些简单曲线。

二、　教学建议

1． 关于平面内两点间的距离公式

两点间的距离公式是学习曲线和方程的知识基础，本章在求曲线的直角坐标方程时一般要用到它，要使学生能证明和熟练地掌握这一公式，就要求学生掌握平行于坐标轴的有向线段的数量公式。

（1） 有向线段对学生来讲是新的概念，学生过去惯于不考虑线段的方向，例如线段的两个端点是A、B，则习惯于

将线段任意写成AB或BA，但是对于有向线段，则必须将线段的起点写在前，终点写在后，要使学生牢记有向线段不但有长度，而且有方向，若规定一方向为正向，则其相反的方向为负向；有向线段可以是任意方向的，正如人从一点出发，可以向各个方向走一样，但是本章重点介绍的是与坐标轴重合或平行的有向线段。

平行于坐标轴的有向线段的数量公式是本节的难点。要突破这一难点，教师可以通过图2—2详细讲授，引导学生自行证明图中6种情况$AB = x_2 - x_1$都成立，或者引导学生证明$BA = x_1 - x_2$成立。然后强调，如果两条平行的有向线段长度相等，方向相同，那么，这两条有向线段（的数量）相等，这样学生就不难接受平行于坐标轴的有向线段的数量公式。

因为在证明X轴上的有向线段$AB = x_2 - x_1$，这一公式的过程中，A、B在数轴上任何地方都成立，因而平行于X轴上的有向线段AB，不管其端点在X轴上的投影A′、B′在数轴上何处，$AB = x_2 - x_1$也成立(注意在证明后者的过程中，在X轴上的有向线段记为A′B′，而平行于X轴的有向线段是记为AB的），同理可证平行于Y轴的有向线段$BC = y_2 - y_1$也成立，当学生认为这两个公式成立后，就不难接受两点间的距离公式了。

（2） 因为两点间的距离就是以这两点为端点的线段的长，作为一般情形，这条线段不平行于坐标轴，总可以以这线段为斜边作出一直角三角形，且这直角三角形的两直角边分别与X、Y轴平行。已经证明，不管这两条线段在何处，平行于X轴的有向线段的数量总是等于这有向线段终点的横坐标减去起点的横坐标，而其长度则是其数量的绝对值；同

是一条几何定理，其讨论的线段的比是这些线段长度的比，这时就应理解λ是两条线段长度的比，这里不会出现矛盾，因为 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$，$P_1P$和$PP_2$是两条同向的有向线段，其数量有相同的符号，λ总是取正值，所以这两条线段的数量的比等于其长度的比，即 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$。

在教学时要提醒学生注意线段字母书写的顺序，在教材图2—9中，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$，则 $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$，不能写成$\frac{M_1M}{M_2M}$。因为在坐标轴上的有向线段$M_1M$和$MM_2$同向，两者的数量有相同的符号，因而它的比就等于两条线段长度的比，

即 $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$，但$\frac{M_1M}{M_2M}$ 则是负数，不是两条线段长度的比。

参考材料中证明了P点外分P_1P_2（P点在P_1P_2的延长线上）时，定比分点坐标公式也成立，但这时λ是除－1以外的负实数，因此，将λ定义为有向线段P_1P和PP_2（同向或反向）的数量的比，公式的应用范围就扩展了。

如何讲授定比分点公式要视学生的情况而定，如认为有必要，也可以把λ作为两条线段长度的比，写成$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$的形式，此时

$$\lambda=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y},$$

然后从上式求出x，y。

要使学生易于接受定比分点坐标公式，如何讲授λ是关

样，平行于Y轴的有向线段的数量总是等于这有向线段终点的纵坐标减去起点的纵坐标，而其长度则是它的数量的绝对值，由此，利用勾股定理，坐标平面上两点间的距离就很容易求出。

显然，没有上面有关平行于坐标轴的有向线段的数量公式的结论，就没有根据说，不管两点在坐标平面上的何处，两点间的距离公式都成立，因此我们引入有向线段的概念，仅是因为在坐标平面上点的坐标是从原点出发的分别在X、Y轴上的两条有向线段的数量，而且也是为了使证明两点间的距离公式建立在较严格的推理基础上。

最后教师要补充说明，求平行于坐标轴的线段的长度，两点间距离公式也适用。

（3） P_1、P_2两点间的距离用符号$|P_1P_2|$来表示，学生不习惯，往往漏写绝对值符号，或认为这是多余的而不写上，只用“P_1P_2”来表示两点间的距离，因此要向学生指出，在坐标平面上，线段都是有向线段，P_1P_2通常就是指由P_1到P_2的有向线段，现因两点间的距离是有向线段的长度，所以用$|P_1P_2|$来表示，它永远取正值。

因为 $$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

所以那个坐标做被减数为好，可根据计算方便而确定，为防止出现横坐标与纵坐标相减的错误，可告诉学生，“两点间的距离等于这两个点的同名坐标之差的平方和的算术根”。

2． 关于定比分点坐标公式

在教材中只证明了P点内分P_1P_2（P点在P_1、P_2之间）的定比分点坐标公式，式中的λ是两条有向线段P_1P和PP_2的数量之比，但是在证明的过程中用到平行线截割定理，这

键的一步，如果教师准备介绍有关外分情况的证明，则在开始讲授本小节内容时，就要明确λ是两条有向线段（同向 或反向）的数量的比，当两条线段同向时，

$$\lambda=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|P_1P|}{|PP_2|},$$

当两条线段反向时，

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}.$$

关于教材的例4（图2—13），若教师补充证明了外分定比分点坐标公式后，则本题的$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-2$，$P_1(-2,1)$，$P_2(1,2)$，求$P(x,y)$。

$$\begin{cases} x=\dfrac{-2+(-2)\cdot 1}{1+(-2)}=4, \\ y=\dfrac{1+(-2)\cdot 2}{1+(-2)}=3. \end{cases}$$

3． 关于曲线和方程

在《曲线和方程》这一小节里包含相辅相成的内容：①由曲线求方程；②由方程画曲线。这两个内 容，具 体 地 说明：①按照已知条件运动的点所形成的曲线，如果用坐标表示点，那么，曲线上的点所具有的某些性质，反映为曲线上的点的坐标所满足的条件，经过变形，这些条件可用方程来描述，所以，在给定的平面直角坐标里，就把曲线的问题转化为与之相应的方程的问题；②同理，用坐标表示点，通过方程的变形，应用函数的表示法，把点描出，就 能 画 出 曲线，这样，在坐标系的条件下，曲线和方程相互转化的辩证关系就显而易见了。