



国家大学生文化素质教育基地教材系列

# 数学文化

SHUXUE WENHUA MANTAN

## 漫谈

葛斌华 梁超 武修文 编著



经济科学出版社  
Economic Science Press



国家大学生文化素质教育基地教材系列

# 数学文化

SHUXUE WENHUA MANTAN

## 漫谈

葛斌华 梁超 武修文 编著



经济科学出版社  
Economic Science Press

图书在版编目(CIP)数据

数学文化漫谈/葛斌华,梁超,武修文编著. —北京:经济科学出版社,  
2009.10

ISBN 978 - 7 - 5058 - 8333 - 8

I. 数… II. ①葛…②梁…③武… III. 数学—文化—通俗读物  
IV. 01 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 110351 号

责任编辑:王 娟

责任校对:徐领弟

版式设计:代小卫 孙爱杰

技术编辑:邱 天

数学文化漫谈

葛斌华/梁超/武修文 编著

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编:100142

编辑部电话:88191417 发行部电话:88191540

出版社网址:www. esp. com. cn

电子邮件:esp@ esp. com. cn

北京欣舒印务有限公司印刷

永胜装订厂装订

787×1092 16 开 13.75 印张 290000 字

2009 年 10 月第 1 版 2009 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5058 - 8333 - 8 定价:21.00 元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

(版权所有 翻印必究)

# 序

葛斌华教授等著《数学文化漫谈》，读来令人爱不释手。就想到，这样的书，固然社会各界读者喜欢看，便是数学家自己，也可能读得饶有兴致呢。这样想来，竟是许许多多人都需要，都喜欢的了？果如此，作者就是做了一件极有意义的工作。

人们常问，数学之美在于何。也许可以说，数学之美在于智慧。数学之美，是一种智慧之美。如果找一个最简单的例子，也许可以取大家熟知的故事 $1+2+3+\cdots+100$ 。要是是一个数一个数去加，加着加着就可能乱了。但若再取一组数 $100+99+98+\cdots+1$ 与之相配，逐对相加， $1+100$ ， $2+99$ ， $3+98$ ， $\cdots$ ，不必真地加完，便知每一对的和都是101。共有100对，故总和为10100。这是两组数的和，故原来一组数的和为5050，这就得到了答案。这样一个方法多么智慧、多么优美！用这个方法，哪怕是从1加到10000，也不增添多少困难，马上知道答案是50005000。但若不知道这个“秘诀”，一个数一个数去加，加到10000，恐怕任何人都要晕了。这个高度智慧的方法，据说是高斯在少年时代发现的。高斯是德国人，或也许是奥地利人。其实这不重要。这是人类的发现，是人类智慧的花朵。现代数学之大，之深，当然是不容易描述的了。但有一点是肯定的，就是它愈加充满了智慧之美。

希望这本《数学文化漫谈》，把数学之美，智慧之美，播入更多人们、特别是青少年朋友的心田……

文彗

2009年8月于北京大学

# contents 目录

## 第一部分

### 璀璨的中国古代数学

|             |      |
|-------------|------|
| 算筹与十进制位值记数法 | / 3  |
| 勾股定理二三说     | / 7  |
| 话说《九章》      | / 11 |
| 大衍求一术与天元术   | / 22 |
| 珠算与明代数学     | / 29 |

## 第二部分

### 莱布尼茨与康熙皇帝的故事

|                     |      |
|---------------------|------|
| 旷世奇才莱布尼茨            | / 37 |
| 康熙皇帝的文韬武略           | / 41 |
| 莱布尼茨与康熙皇帝共绘文化交流美好蓝图 | / 47 |

## 第三部分

### 文学艺术中的数学文化欣赏

|             |      |
|-------------|------|
| 经典文学中的数字    | / 55 |
| 数学诗、回文数及回文诗 | / 59 |
| 数学家与诗歌      | / 64 |
| 对联中的数学      | / 68 |

数学谜语集锦及猜谜技巧 / 72

数学在文学研究中大放异彩 / 76

## 第四部分

### 马克思与恩格斯的故事

马克思与恩格斯的数学思想 / 81

辩证法与数学 / 87

## 第五部分

### 诺贝尔奖与数学的故事

诺贝尔经济学奖与数学 / 93

经济学巨擘萨缪尔森及其数学方法 / 113

## 第六部分

### 战争中的数学故事

阿基米德与西西里战争 / 119

德国数学的衰败和新的世界数学中心的兴起 / 121

德国的恩尼格玛密码机 / 125

中外数学家为反法西斯而战 / 128

## 第七部分

### 经典数学问题欣赏

$\pi$  和  $e$  的故事 / 137

费氏数列和黄金分割 / 155

费马大定理的缘来和启示 / 170

哥德巴赫猜想 / 181

希尔伯特的 23 个问题 / 190

参考文献 / 209

后 记 / 211

# 第一部分





## 算筹与十进制位值记数法

### 一、十进制位值记数法

人类最初完全没有数量的概念。但是在漫长的生活实践中，由于记事和分配生活用品等方面的需要，人类的大脑对客观世界的认识逐渐达到更加理性和抽象的程度时，便产生了数的概念。比如捕获了一头野兽，就用1块石子代表。捕获了3头，就放3块石子。《易·系辞下》有“上古结绳而治，后世圣人易之以书契”的记载。而这种以绳结形式反映客观经济活动及其数量关系的记录方式并不是孤立存在的，它是地球上许多相隔很远的原始先民广泛使用的记录方式之一。传说古代波斯王打仗时也常用绳子打结来计算天数。而考古学家发现的奇普（Quipu 或 Khipu）是古代印加人的一种结绳记事的方法，用来计数或者记录历史（它是由许多颜色的绳结编成的。这种结绳记事方法已经失传，目前还没有人能够了解其全部含义）。此外，用利器在树皮上或兽骨上刻痕，或用小棍摆在地上计数也都是古人常用的办法。这些办法用得多了，就逐渐形成数的概念和记数的符号。

数的概念最初不论在哪个地区都是1、2、3、4……这样的自然数开始的，但是记数的符号却大不相同，记数的方式也千姿百态。这固然与不同文化中的文字截然不同有关，同时与不同的进位制以及位值制的概念是否产生与应用也有着密不可分的关系。

马克思曾经说过，十进位值制是人类文明进程中最美妙的发明之一。所谓十进，就是以10为基底，逢10进一位；所谓位值，就是规定同一数符因其位置之不同而表示不同的数值。这一思想尽管看来简单，但在历史上并不是所有的古代民族都能自然地采用十进位值制的。比如古代埃及人虽然已采用了10进位制的数学符号，可是他们缺乏位值制的概念，对所有的数字，都是按顺序重复写出每位数的基本符号（即用累积法）；古巴比伦人主要采用60进位制；玛雅人采用20与18进制混用；古希腊人用24个希腊字母加上3个外来字母来记数，十分落后；古罗马人采用10进位制和5进位制相结合的符号系统，计算起来繁琐而困难；古印度人在3世纪以前使用的记数法与希腊式和罗马式相类似，都不是位值制。直到6世纪末，印度才真正开始使用10进位值制记数法。

应该说，中国是世界上最早产生这一概念并确立完善的10进制记数制度的国家。仅就此项成就而言，中国对人类文化已经做出了非常重大的贡献，完全可以与“四大发明”相媲美。李约瑟在《中国科学技术史》中说：“奇怪的是，忠实于表意原则而不使用字母的文化，反而发展了现代人类普遍使用的10进位的最早形式，如果没有这种10进位制，就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界了。”而法国数学家拉普拉斯（Laplace, 1749 - 1827）曾说过：“用10个记号表示一切的数，每个记号不但有绝对的值，而且有位置的值，这是一个深远而又重要的思想，它今天看来如此简单，以至我们忽视了它真正的功绩。但是恰恰是它的简单性以及一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位；而当我们想到它居然逃过了古代两位最伟大的人物阿基米德和阿波罗尼奥斯的天才思想的关注时，我们更感到这项成就的伟大了。”

考古的确凿证据显示，公元前14世纪的殷代甲骨文卜辞中的很多记数的文字。大于10的自然数都用10进位制，没有例外。殷人像后人一样，用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万13个单字记10万以内的任何自然数。例如记2656作“二千六百五十六”，只是记数文字的形体和后世的文字有所不同。应该说，十进制的概念比较容易产生，因为人类与生俱来就有10个手指头，用手指计数是十分自然的，但位值制却是一个抽象的概念与伟大的创造，它的产生历经了一个漫长的过程。而一项记数工具的出现使得十进位值制在中国得以完备并最终确立，它就是算筹。

## 二、算筹记数的产生

算筹产生的年代难以考证，但可以推断它是为了进行繁杂的数字计算工作而创造出来的，不可能是原始社会时期（例如传说中的黄帝时代）的产物。有人推测用算筹来记数和作四则运算，很可能在西周时期（公元前11世纪到公元前8世纪）已经开始了，无论如何，从现有的考古证据来看，至晚到春秋战国时期，算筹的应用已经比较普遍。

关于算筹的文献记载可上溯至汉代，如西汉刘安著《淮南子》中称：“筹，策也。”作为中国古代数学中的重要计算工具，算筹在明代珠算普及之前应用了约两千年，在中国古代文化中产生了重要影响。成语“运筹帷幄”，意为在军营的幕帐中对战争的全局进行细密的策划，其中的“运筹”实际就是指移动筹棍。汉高祖刘邦在打下天下之后曾经称赞他的谋士张良，说张良能够“运筹策帷幄之中，决胜于千里之外”。

算筹的前身很可能是古代占卜用的蓍草，后改为计算工具。形态是一般粗细、一般长短的小竹棍

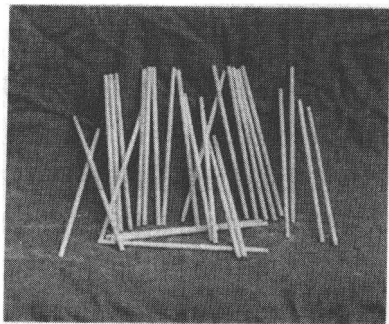


图1-1 陕西旬阳出土（西汉）象牙算筹

或小木棍（也有骨制、玉制、金属甚至象牙制成的），用算筹进行的计算就叫筹算。《汉书·律历志》记载：“其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，为一握。”可见西汉算筹长为 13 厘米，直径 0.23 厘米为圆柱形。《隋书·律历志》则说：“其算用竹，广二分，长三寸”，这说明算筹随时代的不同在变短变小，以利于使用方便。1954 年长沙左家公山战国楚墓中出土文物中有竹签，后被确定为竹制算筹；1971 年陕西千阳县西汉墓中第一次出土了骨制算筹，其形状长短与文献记载基本一致。

### 三、算筹记数的优越性

广义而言，筹算是以算筹为工具的一系列算法构成的数学体系，它的核心是十进位值制和分离系数法。中国古代数学家利用它来记数、列式并用来进行多种数学运算，而且应用得十分纯熟。沈括在《梦溪笔谈》中称赞北宋学者卫朴“运筹如飞，人眼不能逐”，由此可见一斑。当然，如果没有这样娴熟的技巧，我们也很难想象祖冲之可以将圆周率正确计算到 7 位有效数字，秦九韶能解出高达 10 次的数字方程。

古代算筹的功用大致和后世的算盘珠相仿。5 以下的数目，用几根筹表示几；6、7、8、9 四个数目，用一根筹放在上面表示五，余下来的数，每一根筹表示一。表示数目的算筹有纵横两种方式按照规则，当用算筹表示一个多位数就像现在用数码记数一样，把各位的数目从左到右横列，但各位数目的等式须要纵横相间。个位用纵式，十位用横式，百位再用纵式，千位再用横式，万位再用纵式……即所谓“一纵十横，百立千僵，千、十相望，万、百相当。满六以上，五在上方。六不积算，五不单张”。这样纵横相间，以此类推，就可以用算筹表示出任意大的自然数了。由于这种记数方法位与位之间的纵横变换，且每一位都有固定的摆法，所以既不会混淆，也不会错位。从算筹数码中没有“10”这个数可以清楚地看出，筹算从一开始就严格遵循十位进制。9 位以上的数要进一位。同一个数字放在百位上就是几百，放在万位上就是几万。这与现代通行的十进位制记数法是完全一致的，但筹算数码中开始没有“零”，遇到“零”就空位。数字中没有“零”，是很容易发生错误的。所以后来有人把铜钱摆在空位上（后来用圆圈○表示），以免弄错，这或许与“零”的出现有关。

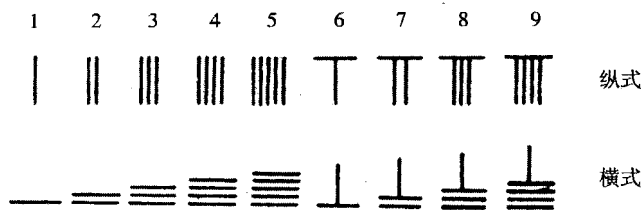


图 1-2 古代算筹的纵式横式

筹算的四则运算则由高位向低位进行。做加、减法先将两数上下对齐，和或差置于第三行中。做乘法将相乘的两数分别置于上、下两行，上行最高位与下行最低位对齐，然后用上行各位数字依次乘下行各位数字，乘得的结果随时加到中行之中，最后中行得到的数字便是两数之积。而除法运算与此类似：中行为被除数，下行为除数，上行置商。运算时将上、下两行随乘随减中行，直至中行的余数小于下行的除数为止，中行不能减尽则表示不能整除。

利用算筹不仅能进行数（整数和分数）的四则及开方运算，还能利用算筹的布列（筹式）来表示许多复杂的内容，如不同位置表示不同的未知数，未知数的不同次数，并能对一些独特的问题设计专门的筹式，如约分法、双设法、一次同余式解法等。筹算记数法简明方便，易于掌握，它在我国使用了二千多年，一直到15世纪中叶，才逐步被算盘取代。它是当时世界上最先进的记数与计算方法。中国古代数学正是在筹算基础上发展起来的。

#### 四、筹算对于中国古代数学的重要意义

筹算是我国古代劳动人民在生产实践中，为应对日渐繁杂的记数和计算而创造出来一种方法。它用极简单的竹筹，纵横布置，就可以表示任何自然数。虽然没有表示空位的符号，但确实能够实行位值制记数法，为加、减、乘、除等的运算建立起良好的条件。我国古代数学在数字计算方面有优越的成就，应当归功于遵守十进位值制的筹算记数法。

筹算最大的优点是数学家提供了应用分离系数法的便利条件，从而使一些数学关系的表达和有关的运算得以大大地简化。比如，筹算可以清楚地表达出三元一次方程组甚至四元三次方程等较为复杂的数学关系。

利用算筹的纵横捭阖，中国古代的数学家们可以很方便地解决很多计算问题，中国古算中一些脍炙人口的成果，如开平方和开高次方、解高次方程、解线性方程组和高次方程组、计算圆周率、解一次同余式组、造高阶差分方程表，等等，都得益于筹算体系的使用。

从更深层次说，中国古代数学一开始便注重实际应用，形成了形数结合，以算为主，使用算器，建立算法体系的显著特色。中国古算以创造算法特别是各种解方程的算法为主线。从线性方程组到高次多项式方程，乃至不定方程，中国古代数学家创造了一系列先进的算法（中国数学家称之为“术”），他们用这些算法去求解相应类型的代数方程，从而解决导致这些方程的各种各样的科学和实际问题。特别是，几何问题也归结为代数方程，然后用程式化的算法来求解。因此，中国古代数学具有明显的算法化、机械化的特征，这与以证明定理为中心的西方古代经典数学截然不同。而这种特色的形成，与算筹的出现以及绵延千余年的使用必然有着密不可分的关系。

## 勾股定理二三说

### 一、商高答周公问

在现存的中国古代数学著作中,《周髀算经》是流传至今最古老的一部天算典籍,它的成书年代保守估计应在公元前1世纪。该书开篇记述周公与商高的问答,将中国数学史的源流回溯到公元前11世纪的西周时期。从数学上看,《周髀算经》主要的成就是分数运算、勾股定理及其在天文测量中的应用,其中关于勾股定理的论述最为突出。

在《周髀算经》的开篇中,记载着一段周公商高的问答:

昔者周公问于商高曰:“窃闻乎大夫善数也,请问昔者包牺立周天历度,夫天不可阶而升,地不可得尺寸而度,请问数安从出?”商高曰:“数之法出于圆方,圆出于方,方出于矩,矩出于九九八十一。故折矩,以为句广三,股修四,径隅五。既方之,外半其一矩,环而共盘,得成三四五。两矩共长二十有五,是谓积矩。故禹之所以治天下者,此数之所生也。”(大意为:周公问:“我听说您对数学非常精通,我想请教一下:天没有梯子可以上去,地也没法用尺子去一段一段丈量,那么怎样才能得到关于天地的数据呢?”商高回答说:“任何事物的形态或测度,都可以归结为对某种‘方’或‘圆’形的计度……其中有一条原理:当直角三角形‘矩’的一条直角边‘勾’等于3,另一条直角边‘股’等于4的时候,那么它的斜边‘弦’就必定是5。这个原理是大禹在治水的时候就总结出来的呵。”)

周公是西周武王之弟,商高是周时的大夫,从上面所引对话中,可以清楚地看到,商高指出夏禹治水(约在公元前21世纪)时已经知道用3:4:5的办法来构成直角三角形。从时间上看,并不晚于埃及、巴比伦的最早记载,而他则以勾三、股四、弦五为例,清晰地展示了勾股定理的证明。这不仅体现了这位远古的数学大师对于复杂客观事务的数学抽象,而且也展现了中算家对于数学定理“寓理于算”的传统风格。当然,勾三、股四、弦五只是勾股定理的一个特例,至于当时是否已经掌握了定理的一般形式,目前还没有足够的证据加以肯定。但公元前6、7世纪的天文学家陈子确实已经掌握了普遍的勾股定理。

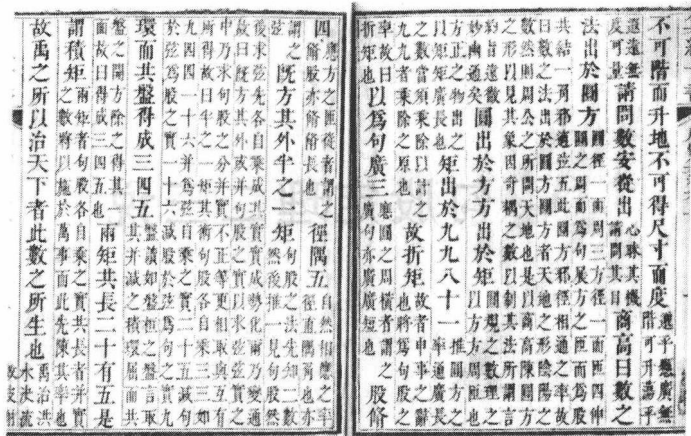


图 1-3 《周髀算经》

《周髀算经》卷上之二继续写道：昔者荣方向于陈子曰，今者窃闻夫子之道，知日之高，光之所照，一日所行，远近之数……这便是著名的“陈子测日”。陈子在讲了一套测日的方法后，说：“若求邪（古汉语‘邪’也作‘斜’解）至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并开方而除之，得邪至日……十万里。”当时以为地是平的，从太阳向地平面作垂线，垂足叫做日下点，太阳、日下点、观测点三者构成了一个直角三角形。以观测点到日下点为勾，太阳的高（日下点至太阳的距离）为股，将勾、股各平方后相加，再开方，就得到弦长（邪至日）。

勾股各自乘，并开方而除之，是勾股定理一般形式在我国最早的记载，陈子突破了3:4:5的特例，在计算中广泛地应用了勾股定理。

勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，是古希腊数学家兼哲学家毕达哥拉斯于公元前550年首先发现的。相传毕达哥拉斯还曾为发现此定理而宰牛庆贺。但从目前已掌握的资料来看，我国古代对这一数学定理的发现和应用，比毕达哥拉斯要早，因此现在数学界把它称为勾股定理，应该是恰当的。

## 二、巧妙的双色弦图

中国古代的数学家们不仅很早就发现并应用勾股定理，而且很早就尝试对勾股定理作理论的证明。最早对勾股定理进行证明的，是数学家赵爽。赵爽，东汉末至三国时代人。生平不详，约生活于公元3世纪初。字君卿，东吴人。据载，他研究过张衡的天文学著作《灵宪》和刘洪的《乾象历》，也提到过“算术”。他的主要贡献在于深入研究了《周髀算经》，为该书写了序言，并作了详细注释。他将勾股定理表述为：“勾股各自乘，并之，为弦实。开方除之，即弦。”并利用形数结合的方法，给出了勾股定理的详细证明。他创制了一幅“勾股圆方图”，

证明方法叙述为：“按弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实。”也就是说，两个全等的直角三角形（三角形涂以朱色，其面积称为“朱实”），合起来成为一个矩形。四个这样的矩形围成一个大正方形，中间留出一个小正方形的空格（涂成黄色，其面积叫做“中黄实”，也称为“差实”），见图1-4。

赵爽的这个证明可谓别具匠心，极富创新意识。他用几何图形的截、割、拼、补来证明代数式之间的恒等关系，既具严密性，又具直观性，为中国古代以形证数、形数统一、代数和几何紧密结合、互不可分的独特风格树立了一个典范。以后的数学家大多继承了这一风格并且代有发展。例如稍后一点的刘徽在证明勾股定理时也是用的以形证数的方法，只是具体图形的分合移补略有不同而已。

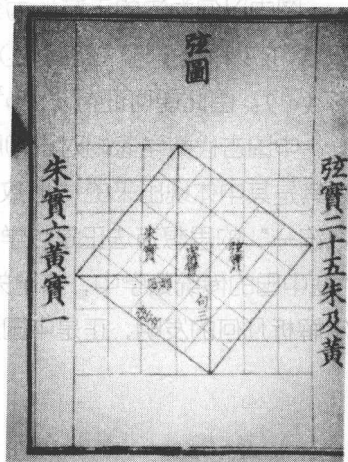


图1-4 赵爽证明图

### 三、出入相补证勾股

刘徽在注释《九章算术》时，在卷9的勾股术“勾股各自乘，并而开方除之，即弦”处注解道：“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不动也，合成弦方之幂。开方除之，即弦也。”由此段话我们可以知道刘徽是用某种图形，借助拼补的办法，来证明勾股定理的。由于他在图中以“青出”、“朱出”表示黄、紫、绿三个部分，又以“青入”、“朱入”解释如何将斜边正方形的空白部分填满，所以后世数学家都称此图为“青朱入出图”。这种方法也被称为“出入相补”原理。可惜此图早已失传，后人根据这段文字补绘了多种图形来推测刘徽的证法，图1-5便是其中的一种。

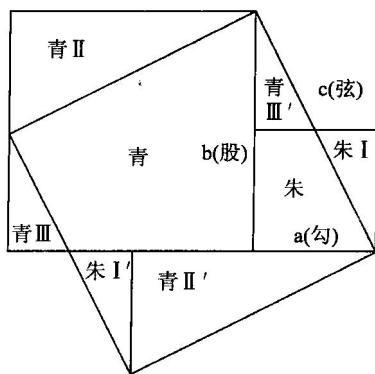


图1-5 后人推测的“青朱入出图”

图中以勾为边的正方形为朱方，以股为边的正方形为青方。以盈补虚，只要把图中朱方（ $a^2$ ）的Ⅰ移至Ⅰ'，青方（ $b^2$ ）的Ⅱ移至Ⅱ'，Ⅲ移至Ⅲ'，则刚好拼好一个以弦为边长的正方形（ $c^2$ ）。由此便可证得  $a^2 + b^2 = c^2$ 。

中国古代数学家们对于勾股定理的发现和证明，在世界数学史上具有独特的贡献和地位。尤其是其中体现出来的“形数统一”的思想方法，更具有科学创新的重大意义。事实上，“形数统一”的思想方法正是数学发展的一个极其重要的条件。正如当代中国数学家吴文俊所说：“在中国的传统数学中，数量关系与空间形式往往是形影不离地并肩发展着的……17 世纪笛卡尔解析几何的发明，正是中国这种传统思想与方法在几百年停顿后的重现与继续。”

## 话说《九章》

### 一、《九章算术》的由来

《九章算术》是中国古典数学最重要的著作。这部著作的成书年代，目前还不能准确判断，但根据史料考证，该书在东汉时期已经作为国家校核度量衡的依据，广为流传了。因此，我们推测成书至迟在公元前1世纪，但其中的数学内容，有些也可以追溯到周代。因此《九章算术》既非出自一人，更非一次完成，而是在较长时间内，经多人之手，纂集、整理、逐步充实后形成的。《周礼》记载西周贵族子弟必学的六门课程“六艺”中有一门是“九数”。刘徽《九章算术注》“序”中称《九章算术》就是由“九数”发展而来，并经过西汉张苍、耿寿昌等人删补，因此“其目则与古或异，而所论者多近语也”。

《九章算术》的成书并非偶然，而是社会发展和数学知识积累的必然结果。由于数学知识的不断增加，对其进行系统整理的时机已经成熟，《九章算术》正是承袭了先秦数学发展的源流，进入汉代后又经许多学者的删补最后形成，它的出现，标志着中国古代数学体系的形成。

后世的中算家，大都是从《九章算术》开始学习和研究数学知识的。唐宋两代都由国家明令规定为教科书。如《新唐书》中称“显庆元年（公元656年）十二月乙酉（十九日）置算学”，至宋代，刻版印刷得到普遍发展，1084年由当时的北宋朝廷进行刊刻，成为世界上最早的印刷本数学书。

### 二、《九章算术》的内容

《九章算术》中共收录246个与生产、生活实践有联系的数学应用问题，按性质分属于：方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九章。每一章又按解题法分为若干类，解题法则称为“术”，如第一章“方田”中就有“方田术”、“里田术”、“约分术”、“合分术”、“减分术”，等等。每道题都有答案，并可以用相应的“术”进行解答（但没有证明），有的是一题一术，有的是多题一术或一题多术。原作配有插图，但今传本