广义模糊集值测度引论

哈明虎 杨兰珍 吴从炘 著

科学出版社
www.sciencep.com

广义模糊集值测度引论

哈明虎　杨兰珍　吴从炘　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书较系统地介绍了广义模糊集值测度理论. 本书除介绍国内外其他学者的研究成果外，着重介绍作者的系列研究工作.

本书共10章，主要内容包括绪论、预备知识、广义模糊集值测度、广义模糊集值测度的扩张和完备化、广义模糊集值测度空间上的可测函数、距离空间上的广义模糊集值测度、Banach空间上的广义模糊集值测度、基于广义模糊集值测度的Choquet积分、基于广义模糊集值测度的Sugeno积分、Banach空间上的可测广义模糊集值函数积分.

本书可作为数学专业的研究生教材，也可供数学及相关专业的教师和科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

广义模糊集值测度引论/哈明虎，杨兰珍，吴从炘著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 7-03-025606-5

Ⅰ.广… Ⅱ.①哈…②杨…③吴… Ⅲ.①模糊数学－测度论－研究②模糊数学－积分－研究 Ⅳ.O159

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第167601号

责任编辑：王丽平 房 阳/责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年10月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009年10月第一次印刷 印张：15 1/4

印数：1—2 500 字数：289 000

定价：52.00元

前　言

测度论是数学的一个重要分支，它在现代数学中有着广泛而深刻的应用，这里的测度是指定义在环上，取值限于非负实数且满足空集取值为0和可列可加性的集函数. 值得注意的是基于测度(本书为了叙述方便起见，也称经典测度)建立起来的测度理论(经典测度论)自提出至今，其成立的某些条件逐渐被人们所关注，如:①经典测度的可列可加性条件有时显得太苛刻，在一些实际问题中该条件往往难以满足;②经典测度是定义在由一个非空经典集合的若干子集组成的环上的，然而,有时需考虑定义在模糊集类上的情形;③经典测度是从环到某一数域的单值映射,但在一些实际问题中遇到的映射往往不是单值映射而是集值映射;④经典测度的取值限定于实数值(或复数值)，但在一些实际应用中，其取值为模糊值更能反映客观问题等. 这些问题的存在，促使众多专家学者和实际工作者探索着解决这些问题，从而导致了不同于经典测度论且是经典测度论延拓的广义模糊集值测度理论的提出和发展. 本书的主要目的是在已有研究工作的基础之上，提出统一的广义模糊集值测度的定义，并进一步完善、扩展它的性质，以此初步建立较为系统的广义模糊集值测度理论. 本书除比较系统地介绍国内外学者的成果外，着重叙述作者及其学生的系列研究工作.

本书的内容安排如下：第1章绪论，主要介绍广义模糊集值测度理论的提出及发展状况；第2章预备知识，主要介绍经典集合与集类、模糊集及其运算、模糊数及其运算、经典测度的定义及性质；第3章广义模糊集值测度，主要介绍广义模糊集值测度的基本概念和几种常见的广义模糊集值测度,如模糊测度、λ-模糊测度、不确定测度等；第4章广义模糊集值测度的扩张和完备化，主要介绍模糊测度、拟测度等几种广义模糊集值测度的扩张与完备化；第5章广义模糊集值测度空间上的可测函数，主要介绍与可测函数相关的基本概念、可测函数序列各种收敛之间的关系、可测函数空间等；第6章距离空间上的广义模糊集值测度，主要介绍广义模糊集值测度的正则性、Lusin定理、支撑、紧与完全广义模糊集值测度及广义模糊集值测度序列在凸集类上的收敛性；第7章Banach空间上的广义模糊集值测度，主要介绍Banach空间上模糊数测度与集值测度的关系、集值测度的延拓及模糊数测度的延拓；第8章基于广义模糊集值测度的Choquet积分，主要介绍Choquet积分定义、性质及Choquet积分序列收敛；第9章基于广义模糊集值测度的Sugeno积分，主要介绍Sugeno积分的定义、性质及Sugeno积分序列的收敛；

第 10 章 Banach 空间上的可测广义模糊集值函数积分，主要介绍其基本定义与性质、可测集值函数的 Levi 收敛定理及可测模糊数值函数积分.

本书在哈明虎、吴从炘的著作《模糊测度与模糊积分理论》(科学出版社，1998)基础之上完成，并改正了上述著作中的若干笔误、印刷错误和不严密论述之处. 上述著作除第 6 章(本书第 10 章)内容没有变动，第 7 章(本书第 7 章)内容少许变动外，其余各章均作了很大的调整、完善和扩展，本书比上述著作增加了 3 章. 参加本书讨论的有田大增教授、纪爱兵教授、高林庆、王超、刘耀峰、王林、吴静、闫舒静、张现坤、魏书祥、黄澍、赵春雷、王晓丽. 为了本书的系统性和完整性，我们引用了 Wang(王震源)和 Klir 教授的著作 *Fuzzy Measure Theory* 和 *Generalized Measure Theory* 的部分内容以及各章参考文献中所列出的其他作者们的相关成果，在此，也向他(她)们表示衷心的感谢.

本书的部分研究内容得到国家自然科学基金(编号:60573069,60773062)、教育部科学技术研究重点项目(编号:206012)、河北省自然科学基金(编号:2008000633)和河北省教育厅科研计划重点项目(编号:2005001D)的资助，特此致谢.

由于作者学识和水平所限，书中不妥及疏漏之处在所难免，敬请同仁及读者批评指正.

作　者

2009 年 4 月 30 日

符号说明

X	论域
$\mathcal{P}(X)$	X 的幂集
$\varnothing$	空集
E^c	集合 E 的补集
$\mathcal{C}$	X 的若干经典子集组成的类
$\mathcal{S}$	X 的若干经典子集组成的半环
$\mathcal{R}$	X 的若干经典子集组成的环
$\mathcal{F}$	X 的若干经典子集组成的 σ- 环(或 σ- 代数)
$\mathcal{B}_X$	距离空间 X 上的 Borel 集族
$E\triangle F$	集合 E、F 的对称差
$\mathcal{B}_V$	Banach 空间 V 上的 Borel 集族
$\tilde{\mathcal{F}}$	X 的若干模糊子集组成的模糊 σ- 代数
$\tilde{\mathcal{C}}$	X 的若干模糊子集组成的类
$(X,\mathcal{F})$	可测空间
μ	模糊测度
$\tilde{\mu}$	广义模糊集值测度
π	广义可能性测度
g_λ	λ- 模糊测度
Bel	信任测度
Pl	似然测度
Pos	可能性测度
Nec	必要性测度
Cr	可信性测度
Un	不确定测度
$\mathbf{F}$	$(X,\mathcal{F})$ 上所有非负有限可测函数的全体
$\mathbf{F}^*$	$(X,\mathcal{F})$ 上所有可测实数值函数的全体
$\mathbf{R}$	实数域

$\mathbf{R}^+$	非负实数域
$\mathbf{R}^n$	n 维实数域
$I(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的非空闭区间数组成的类
$\mathcal{P}_0(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的非空子集组成的类
$\mathcal{P}_f(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的非空闭子集组成的类
$\mathcal{P}_k(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的非空紧子集组成的类
$\mathcal{P}_c(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的非空凸子集组成的类
$\mathcal{P}_{kc}(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的非空紧凸子集(闭区间)组成的类
$\boldsymbol{I}$	某一实数域子集
$\overline{\mathrm{co}}(A)$	A 的闭凸包
$\mathrm{cl}(A)$	A 的闭包
A°	A 的内部
$\mathcal{O}$	全体可略集组成的集族
$\delta_{\mathrm{H}}(\cdot,\cdot)$	Hausdorff 距离
$\sigma_A(x^*)=\sup\limits_{x\in A}\langle x^*,x\rangle$	A 的支撑函数
$\mathrm{Supp}\,\widetilde{A}$	模糊集 $\widetilde{A}$ 的支集
$\mu_{\widetilde{A}}$	模糊集 $\widetilde{A}$ 的隶属函数
$\mathcal{F}^*(X)$	X 的模糊子集的全体
$\mathcal{F}^*(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的模糊子集的全体
$\mathcal{F}_0^*(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的非空的模糊子集的全体
$\widetilde{\mathbb{F}}(\widetilde{E})$	$\widetilde{E}$ 上可测模糊数值函数的全体
$\mathfrak{R}$	模糊数的全体
$\mathfrak{R}^*$	有界闭模糊数的全体
$\mathfrak{R}^+$	正模糊数的全体
$\mathfrak{R}^-$	负模糊数的全体
$C\mathfrak{R}$	$\mathbf{R}$ 的闭模糊数的全体
V	Banach 空间
$\mathfrak{R}(V)$	Banach 空间 V 上模糊数的全体
$\mathfrak{R}'(V)$	Banach 空间 V 上正规模糊数的全体
$\widetilde{\mathcal{P}}_{wkc}(V)$	V 的弱紧凸子集组成的类
$L^{(P)}(V)$	从 X 到 V 上的 Pettis 可积函数空间

$L^{(B)}(V)$	从 X 到 V 上的 Bochner 可积函数空间
$(\mathrm{C})\int f\mathrm{d}\mu$	可测实数值函数的 Choquet 积分
$(\mathrm{S})\int f\mathrm{d}\mu$	可测实数值函数的 Sugeno 积分
$(\check{\mathrm{S}})\int f\mathrm{d}\mu$	可测实数值函数的对称 Choquet 积分
$(\mathrm{C})\int F\mathrm{d}\mu$	可测集值函数的 Choquet 积分
$(\mathrm{C})\int \widetilde{F}\mathrm{d}\mu$	可测模糊集值函数的 Choquet 积分

目录

第 1 章　绪　　论

测度论是数学的一个重要分支，它在现代数学中有着广泛而深刻的应用，尤其是近代概率的数学理论，就是建立在测度论基础之上的．所谓测度，通俗地讲就是测量几何区域的尺度，它起源于人类最初的也可以说是最基本的数学实践活动——测量客观世界中物体的长度、面积、质量或体积等．在古代，物体的测量值只是简单地通过与预定的一个标准单位直观地进行比较，仅仅粗略地给出．然而，人们很快就遇到了当时一些不可测量的问题，如测量边长为 1 个单位长度的正方形的对角线的长度等，这类问题远比简单、直观的测量问题复杂得多，而且此类测量必然与无限集及无限过程息息相关．在微积分出现及充分发展以前，因为没有适当的方法去处理上述不可测量的问题，所以这类问题一直困扰着人们．19 世纪下半叶，快速发展起来的建立在 Riemann 积分基础上的积分学，成为处理不可测量问题的首选工具，人们常常利用积分技巧来解决一些不可测量的问题．19 世纪末期，由于科学技术的迅猛发展，测量上又出现了新问题，从而需要更为精确的数学分析工具．我们知道，直线上闭区间的测度就是通常的线段长度，平面上一个闭圆盘的测度就是它的面积．那么对于更一般的集合，我们能不能定义测度呢？例如，考虑在 0 与 1 之间全体实数组成的集合，此处，实数可看成是实直线上的点，若问：从这个集合中除去端点 0 和 1 时，其集合的测度是多少？从上述给出的集合中除去某些有理数，如 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$，而得到的集合的测度又如何给出呢？这便遇到了新的挑战．法国数学家 Borel[1] 仔细地研究了诸如此类的复杂问题，于 1898 年提出了一种处理这些问题的方法，向建立现代测度论迈出了重要的一步．

Borel 讨论了由实数轴(或实数区间 $[a,b]$)上所有的开(或半开)区间生成的 σ- 代数(该集类在可数并和补运算下是封闭的)．他在该集类上定义了一种度量，称之为测度，使得 σ- 代数中每一有界子集均和一非负实数对应起来．具体来说，在区间的情况下，测度定义为区间的长度，这种度量具有可加性．但 Borel 没有趁势去建立相应的积分理论．1901 年，另一位法国数学家 Lebesgue 在一篇论文中定义了一种比 Borel 测度更广的测度——Lebesgue 测度，并相应地建立了一种比 Riemann 积分更广的积分——Lebesgue 积分．1902 年，Lebesgue 在他的博士论文中进一步完善了自己所提出的测度与积分理论，从而产生了 Lebesgue 测度与积分理论(详见文献[2])，这是现代测度论的奠基石．基于此，经过众多学者多年的

共同努力，最后形成了现代的经典测度论，其中，经典的代表作是 Halmos 的 *Measure Theory*[3].

经典测度的一个典型例子是概率. 概率是定义在一个由非空集合的若干子集组成的 σ- 代数上且取值为[0,1]的集函数，它在空集上取数 0，在全空间上取数 1，并且满足可列可加性. 概率的公理化定义是苏联数学家 Kolmogorov 于 1933 年在其德语版著作中提出的，17 年后，此著作被翻译成英文[4]. 值得注意的是，经典测度理论发展至今，其成立的某些条件逐渐被人们所关注，主要体现在以下几方面：

(1) 尽管经典测度的可加性很好地刻画了许多类型在理想和无误差条件下的测量问题，然而，在测量误差不可避免的条件下，可加性不能充分地刻画该条件下的测量问题，此外，某些涉及主观评判或非重复性实验的测量，本质上均是非可加的，如对某商店出售的一种服装进行评判，假定只考虑三个主要因素，即花色式样、耐穿程度及价格，并由此组成论域 $U=\{$花色式样(U_1)，耐穿程度(U_2)，价格$(U_3)\}$，为简便起见，U_i 也表示 $\{U_i\}$，$i=1,2,3$. 由于人的主观因素的影响，不妨规定主要因素的重要性度量 μ（μ 是从 U 的幂集到[0, 1]的一个集函数）如下：

$$\mu(U_1)=0.6,\quad \mu(U_2)=0.5,\quad \mu(U_3)=0.8,$$
$$\mu(U_1\cup U_2)=0.7,\quad \mu(U_1\cup U_3)=0.9,$$
$$\mu(U_2\cup U_3)=0.8,\quad \mu(U_1\cup U_2\cup U_3)=1.$$

显然有 $\mu(U_1\cup U_2)\neq\mu(U_1)+\mu(U_2)$，这从某种意义上说明了非可加集函数的存在.

(2) 经典测度是定义在普通集合的若干子集组成的环上的，然而，有时需考虑定义在模糊集类上的情形.

(3) 经典的测度是从某一经典集合的类到实数域某一子集的单值映射. 但在一些实际问题中遇到的映射的取值不是单值而是集值，如设 X 和 Y 是两个非空集合，W 是从 $X\times Y$ 到实数 $\mathbf{R}$ 的函数(映射)，考虑如下的最小化问题族：

$$\forall y\in Y,\qquad V(y)=\inf_{x\in X}W(x,y),$$

函数 V 称为边缘函数. $\forall y\in Y$，设

$$G(y)=\{x\in X\,|\,W(x,y)=V(y)\}$$

是上述最小化问题的解的子集合，则 G 是一个从 Y 到 X 的集值映射(最优化理论的主要内容之一就是研究集值映射 G).

(4) 经典测度取值限定于实数值，但在一些实际应用中，其取值为模糊值更能反映客观问题.

上述问题的存在，促使众多专家学者和实际工作者探索解决这些问题，取得

了系列丰硕的成果，从而导致了广义模糊集值测度论的发展，其中，比较有代表性的成果如下：

(1) 定义于经典集合的若干子集组成的类且取值为实数值的非可加测度研究方面：1954 年，法国数学家 Choquet[5] 提出了一种称为容度的理论及相应的积分(即 Choquet 积分). Choquet 容度是一个集函数，它使得所设空间上的每一个子集均与一实数(不要求非负)对应，它是连续且单调非减的. 1967 年，受 Choquet 工作的启发，Dempster[6] 提出，后经 Shafer 深化出来的两种类型的非可加测度，分别称为信任测度与似然测度. 同时对这两种类型的非可加测度进行深入的研究，便形成了 Dempster - Shafer 理论或显著性理论[7,8]. 1974 年，日本学者 Sugeno[9] 在他的博士论文中首次提出了用比较弱的单调性和连续性来代替可加性的另一类非负集函数，称为模糊测度(只是一个名称而已，并无和模糊集对应的"模糊"含义)，并相应地定义了可测函数关于模糊测度的积分，即 Sugeno 积分，他的理论已开始应用于主观评判过程. 如无特别说明，本书所讨论的模糊测度都是在 Sugeno 意义下的后经 Ralescu 和 Adams[10] 推广了的模糊测度，由于模糊测度通常不具有可加性，难以完全建立相当于经典测度论中的理论体系，必须根据不同问题的需要对模糊测度本身附加某些条件. 为此，国内外许多学者作了大量的尝试，得到了一些有意义的结果，但大多讨论的是对模糊测度附加了较强的次可加性或满足 λ- 律，甚至是通过模糊可加性后得到的[11~13]，具有一定的局限性. 1984 年，Wang[14] 首次提出了较弱的"自连续"与"零可加"的重要概念，并于 1985 年更进一步地提出了较弱的"伪自连续"与"伪零可加"等概念[15]，这些特性对于模糊测度空间上可测函数列及模糊积分序列的收敛是本质的且具有很强的针对性，从而是十分有效的. 基于"自连续"等新概念出现了不少重要结果，如 Wang[14,15] 讨论了模糊测度空间上可测函数序列各种收敛之间的关系，推广了经典测度论中著名的 Lebesgue 定理、Riesz 定理以及 Egoroff 定理等，并指出经典测度论中这些定理对测度可加性的依赖不是本质的，这为讨论模糊测度空间上模糊积分序列的收敛奠定了基础. 1984～1986 年，王震源(Wang)[14~17] 给出了一系列关于模糊积分序列收敛的定理，此外，其他学者也做了一些相关的工作[18~22]. 1981 年，赵汝怀[23,24] 给出了(N)模糊积分的概念及性质. 1985 年，杨庆季[25] 定义了泛积分的概念并与宋仁明讨论了其性质. 1986 年，Suarez 和 Gil[26] 利用三角模定义给出了广义模糊积分. 1990 年，吴从炘(Wu)等[19,22] 提出了(G)模糊积分的概念并讨论了它的性质. 1992 年，Wang 和 Klir[27] 出版了关于模糊测度的第一部英文著作 *Fuzzy Measure Theory*，将非可加测度——模糊测度研究推向了一个崭新的阶段. 之后，经过十余年的完善和扩充，Wang 和 Klir[28] 于 2008 年出版了著作 *Generalized Measure Theory*，这标志着非可加测度研究达到了一个新的高度. 1998 年，哈明

虎和吴从炘[29]出版了著作《模糊测度与模糊积分理论》，该著作除介绍了国内外模糊测度与模糊积分的研究进展外，重点叙述了作者及其学生在此方面所取得的系列成果. 经过十余年的研究，哈明虎及其学生[20,30~37]亦取得了新的进展. 此外，特别值得一提的是，Liu[38]于 2007 年提出基于正规性、单调性、自对偶性和可列次可加性的不确定测度，并建立基于不确定测度的不确定理论[38,39]，这在国内外产生了广泛而深刻的影响.

(2) 定义在模糊集类上且取值为实值的测度研究方面：1965 年，美国控制论专家 Zadeh[40]提出了模糊集的概念，这标志着在众多领域有重要应用的新学科——模糊数学的诞生，从而导致了定义在模糊集上的测度的产生，有人把这种测度也称为模糊测度. 相应地，可以进一步建立模糊集合上某类函数的积分，称为模糊积分. 近年来许多学者一直致力于这方面的研究，并取得了很多有意义的结果[11,12,41~43]，其中，1978 年，Zadeh[43]提出了给定模糊集合上的可能性分布函数(possibility distribution function)的概念，并且定义了基于模糊集类的可能性测度(possibility measure)，建立了可能性理论，并将不确定性理解为可能性. Qiao[12]将 Sugeno 积分推广到模糊集上，将模糊测度定义在由模糊集构成的 σ- 代数上并和 Wang[44]讨论了此种模糊积分的变换定理，随后 Qiao[41]又将模糊测度推广到 L-模糊集构成的 σ- 代数上. 黄艳[45]于 2006 年定义了基于模糊集、L-模糊集的 Choquet 积分，并对其分别进行了讨论.

2002 年，Liu 和 Liu[46]提出了可信性测度的概念，继而 Liu[47]于 2004 年建立了公理化的可信性理论，找到了模糊集论的“根”——可信性. 可信性测度(而不是隶属函数)在模糊集论中起着关键作用，其核心地位相当于概率论中的概率测度[46,48].

(3) 取值为集值或模糊值的测度研究方面：模糊集值测度(即模糊数测度)与模糊集值积分(模糊数积分)是集值测度与集值积分的推广. 首先，回顾集值测度与积分的发展概况. 集值测度和积分是伴随着 20 世纪 40 年代集值映射的提出和发展而产生的[49~52]. 1965 年，Aumann[53]在经济学问题的启发下，以可测集值映射的单值 Lebesgue 可积选择定义了 $\mathbf{R}^n$ 空间中集值映射的积分，称为 Aumann 积分. 其他一些学者成功地将该积分理论运用于最优控制系统[54~56]. 1970 年，Datko[57]首先将 Aumann 等在 $\mathbf{R}^n$ 中的结果推广到了 Banach 空间，开始了 Banach 空间集值映射积分理论的研究. 1977 年，Hiai 和 Umegaki[58]给出了可积有界集值映射的积分表示，并讨论了集值条件期望和鞅的存在性. 进入 20 世纪 80 年代以后，Papageorgiou[59]做了具有代表性的工作，在十分广泛的意义下，建立了集值映射的 Fatou 引理，以及弱收敛意义下的积分收敛定理和集值映射弱收敛与其支撑弱收敛的等价关系. 1991 年，薛小平[60]以 Pettis 积分为工具，在 Banach 空间上建立

了集值函数的弱意义下的 Pettis - Aumann 积分，找到了集值函数可表示成 Pettis - Aumann 积分的条件. 2001 年，Cho 等[61]定义了集值映射的 Sugeno 积分，其积分取值为实值.

集值映射积分理论的发展，促进了集值测度和集值积分的产生和发展. 1972 年，Artstein[62]率先在 $\mathbf{R}^n$ 空间引入集值测度的概念，得到了一些重要结果. 其后，1978 年，Hiai[63]对取值于 Banach 空间的集值测度进行了讨论，对有界变差的集值测度以空间的几何性质为工具建立了 Artstein 的相应结果. Papageorgiou[59]进一步推广和补充了 Hiai 的工作. 特别地，他还给出了测度变换的表示定理[64]. 张文修和李腾[65]利用 Artstein 的选择定理讨论了由单值测度生成集值测度的条件. 薛小平[60]利用不依赖于有限维持点的方法，将上述有界闭凸值集值测度的表示定理推广到可分自反实 Banach 空间的情形，并给出了生成集值测度为有界变差的条件. 仿照 Aumann 积分[53]的定义，1993 年，Zhang 和 Wang[66]用单值可测选择函数的 Sugeno 积分定义了集值映射的 Sugeno 积分(积分取值为集值). 随后，1995 年，Zhang 和 Guo[67]将其推广到集值映射的(G)模糊积分. 类似地，Jang 等[68,69]利用集值映射的单值可测选择来定义集值映射的集值 Choquet 积分，并研究了这类积分的基本性质和收敛定理. 继而，2004 年，Zhang 等[70]对 Jang 等以上工作作了进一步修正和改进. 罗承忠、Zhang 等研究了模糊值映射的 Sugeno 积分[71,72]. Guo 等[73]定义了模糊值函数的(G)模糊积分. Wang 和 Li[74]讨论了模糊值映射的 Choquet 积分，并于 2002 年将此积分推广到复模糊值映射[75]. Guo 和 Zhang[76]于 2004 年定义了集值模糊测度. 2005 年，Yang 等[77]进一步研究了模糊值映射关于模糊测度、符号模糊测度的 Choquet 积分. 2007 年，2008 年，Wang 和 Ha[78,79]对模糊值函数的 Choquet 积分及其序列的性质进行了研究. 值得注意的是，集值测度与集值积分作为 20 世纪 60 年代后期发展起来的一门新兴理论，它的产生和发展始终伴随着经济学、控制论、最优化、非光滑分析以及统计学等众多领域的应用[56,64,80~82].

自从模糊数的概念出现以后，人们很自然地考虑关于模糊数的测度与积分问题. 因此，有关集值映射的可测性、可积性和可微性等概念也先后推广到模糊集值映射的情形. 1986 年，Puri 和 Ralescu[83]在 $\mathbf{R}^n$ 上给出了模糊随机变量及模糊随机变量的期望的概念，它们分别是 $\mathbf{R}^n$ 上随机变量(集值映射)及 Aumann 积分的自然推广. 1986 年，张文修[84]在 $\mathbf{R}^n$ 中定义了一种模糊数测度(模糊集值测度)，给出了模糊数测度与集值测度的关系及模糊数测度的 Lebesgue 分解. 此外，关于模糊集值映射(模糊数)的级数、序列、广义积分以及不动点等问题，也取得了一定程度的进展[85,86]. 由于空间结构的复杂性，对集值测度与积分的讨论远比经典测度与积分困难得多，从而对作为集值测度与积分推广的模糊集值测度与积分的讨论

自然也是困难的. 1998年，Wu等[87]将模糊测度的值域推广到模糊数，定义了单值函数关于模糊数模糊测度的Sugeno积分. Guo等[88]亦定义了模糊值函数关于模糊值模糊测度的(G)积分，进而，他们又将关于模糊值函数关于模糊值模糊测度的Sugeno积分推广到模糊集上[89]. 哈明虎等[29,90]对Banach空间上的模糊数测度与模糊数积分进行了讨论.

本书的目的是在上述研究基础之上，提出统一的广义模糊集值测度的定义，进一步完善、扩展它的内容，以此初步建立较为系统的广义模糊集值测度理论.

参考文献

[1] Borel É. Lessons on a Theory of Functions. Paris: Gauthier-Villars, 1898

[2] Lebesgue H L. Measure and the Integral. San Francisco: Holden-Day, 1966

[3] Halmos P R. Measure Theory. New York: Van Nostrand, 1950

[4] Kolmogorov A N. Foundations of the Theory of Probability. Translated by N. Morrison. New York: Chelsea, 1950

[5] Choquet G. Theory of capacities. Annales de l'Institut Fourier, 1954, 5: 131～295

[6] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325～339

[7] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976

[8] Shafer G. Belief functions and possibility measures. Analysis of Fuzzy Information, 1987, 1: 51～84

[9] Sugeno M. Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications. Ph. D. dissertation, Tokyo Institute of Technology, 1974

[10] Ralescu D, Adams G. The fuzzy integral. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1980, 75: 562～570

[11] Klement E P, Lowen R, Schwyhla W. Fuzzy probability measures. Fuzzy Sets and Systems, 1981, 5(1): 21～30

[12] Qiao Z. On fuzzy measure and fuzzy integral on fuzzy set. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 37(1): 77～92

[13] 杨庆季，宋仁明. Fuzzy测度空间上泛积分的进一步讨论. 模糊数学，1985，4: 27～36

[14] Wang Z Y. The autocontinuity of set function and the fuzzy integral. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1984, 99(2): 195～218

[15] Wang Z Y. Asymptotic structural characteristics of fuzzy measure and their application. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 16: 277～290

[16] 王震源. 关于Fuzzy积分序列依测度收敛定理的注记. 模糊数学，1984，4: 7～10

[17] 王震源. Fuzzy测度空间上的“几乎”与“伪几乎”的概念. 数学研究与评论，1986，1: 39～41

[18] Song R M. On the (N)fuzzy integral. BUSEFAL, 1984, 17: 26～35

[19] Wu C X, Wang S L, Song S. Generalized Triangle Norms and Generalized Fuzzy Integrals. (Proceeding of Sino-Japan Symposium on Fuzzy Sets and Systems), Beijing: International Academic Press, 1990

[20] 哈明虎，王熙照. Fuzzy测度与收敛. 河北大学学报(自然科学版)，1989，5: 79～86