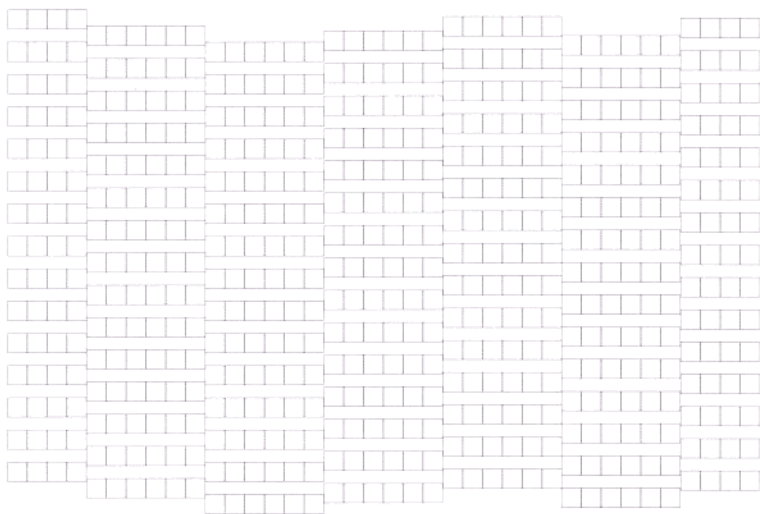


中 青 版 高 考 高 分 名 师 导 航

总策划 《考试在线》 频道



编著 韩新生

高考易错题解析

中国青年出版社

直 击 高 考 考 点
攻 破 试 题 陷 阱
减 少 出 错 机 会
掌 握 考 试 技 巧

数学

 总策划 《考试在线》频道

高考易错题解析

编著 韩新生

数 学

中国青年出版社

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

高考易错题解析·数学/韩新生编著. —北京:中国青年出版社, 2010.1

ISBN 978-7-5006-9090-0

I. ①高... II. ①韩... III. ①数学课-高中-解题-升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第219933号

出版发行: 中国青年出版社

社 址: 北京东四十二条21号

邮政编码: 100708

网 址: www.cyp.com.cn

策 划: 韩亚君

执 行: 吴方泽 宣逸玲

责任编辑: 宣逸玲 xuanyiling@yahoo.com.cn

编辑电话: (010) 64007495

营 销: 北京中青人出版物发行有限公司

电 话: (010) 64017809 64066441

印 刷: 聚鑫印刷有限责任公司

经 销: 新华书店

开 本: 700×1000 1/16

印、张: 10.25

字 数: 180千字

版 次: 2010年1月北京第1版 2010年1月第1次印刷

印 数: 1-10000册

定 价: 18.00元

本图书如有印装质量问题,请与出版部联系调换

联系电话: (010)84035821

编者的话

高考,是高三学生面临的人生最大关卡。考生们都想在考试时拿高分,但又总是爱出错。怎么办呢?

一般来说,考生考试时出错丢分,很多时候并不是完全不懂或不会,而是会一点儿,却又没做对。因此,为了避免考生再犯与以前考试相同的错误,高考之前老师叮嘱考生最多的恐怕就是多看以前曾做错的题目。

并不是所有的考生都有整理错题这一习惯的,有的考生虽然整理了,但只是简单地把以前的错题列出来,他没有能力把其他可能会出现错误的给整理出来,况且一个人所做过的题目也是相当有限的。高考中经常会碰到似乎见过而又特别容易使考生步入误区的题目,其出题的方式和角度常常让考生错误百出,因此相当多的考生还是会很紧张。

《高考易错题解析》(丛书)(数学、语文、英语、物理、化学、生物、历史、地理、政治)(一套9种)就是针对高考中常考、考生又常错的考点进行解析,精选高考中常出易错的真题,邀请重点学校的特级和金牌教师,在最后冲刺阶段给予考生有效的相关这一类题的答题技法和策略的指导。

书中给出测试该考点的已有试题类型、可能出现的变化形式,进而指出认知该考点的内容方法、能力层次、角度变化及其测试手段与规律,并配以与考点相对应的练习以及简洁、精到的解析,以期最大限度地开启考生的认题、解题能力,目的就是使考生能够根据自己课堂学习的不足,举一反三、融汇贯通,在学习一道题的同时能够掌握一类题的答题技巧,将自己的知识形成体系,提高复习的效果,增益高考夺魁信心。

高考易错题的解析直击高频考点,攻破试题陷阱,教给考生面对难题和易错题如何稳定心态、条分缕析、取得高分,帮助考生减少出错机会,掌握考试技巧,对考生提高分数会有直接的帮助,是考生和家长乐见的。

相信《高考易错题解析》可以帮助考生实现高分梦想。

目 录

第 1 单元	函数的定义域	1
第 2 单元	集合	4
第 3 单元	简易逻辑	8
第 4 单元	函数的值域	12
第 5 单元	函数的单调性	16
第 6 单元	函数的奇偶性	19
第 7 单元	函数的解析式	23
第 8 单元	反函数	27
第 9 单元	函数的图像	31
第 10 单元	指数函数	35
第 11 单元	对数函数	38
第 12 单元	导数的应用	42
第 13 单元	函数的应用	45
第 14 单元	不等式的解法	49
第 15 单元	平均值不等式	53
第 16 单元	不等式的应用	56
第 17 单元	数列的概念	59
第 18 单元	等差数列	62
第 19 单元	等比数列	65
第 20 单元	数列的通项公式	68
第 21 单元	数列的求和公式	71
第 22 单元	数列的应用	75
第 23 单元	同角三角函数的基本关系式	78
第 24 单元	三角函数的定义及诱导公式	81
第 25 单元	三角函数的图像和性质	85
第 26 单元	研究函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质	89
第 27 单元	三角变换	93
第 28 单元	三角形中的三角函数	96
第 29 单元	三角函数的应用	99

第 30 单元	平面向量	102
第 31 单元	直线方程	105
第 32 单元	简单的线性规划	108
第 33 单元	圆的方程	112
第 34 单元	椭圆	115
第 35 单元	双曲线	118
第 36 单元	抛物线	121
第 37 单元	圆的方程	124
第 38 单元	直线与圆锥曲线	127
第 39 单元	空间的两条直线	131
第 40 单元	空间的直线与平面	134
第 41 单元	空间两个平面	138
第 42 单元	复习多面体与球	141
第 43 单元	复习排列组合、二项式定理的相关内容	145
第 44 单元	概率	149
第 45 单元	概率与统计	153

第1单元 函数的定义域

这一单元的主要内容是求函数的定义域,在求函数定义域的过程当中,同学们可以看到我们要借助不等式组的解,要借助函数的单调性,甚至我们有一些题目还要借助函数的图像去解决.

例题点击

(2008年全国I卷)函数 $y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x}$ 的定义域为()

A. $\{x|x \geq 0\}$

B. $\{x|x \geq 1\}$

C. $\{x|x \geq 1\} \cup \{0\}$

D. $\{x|0 \leq x \leq 1\}$

这是2008年全国卷的第1题,这一题当年考试的分值是4分,同学们在解答这个题目的时候,最容易因为马虎而出错,解决问题的关键就是按部就班地去解决它,也就是去解不等式组.

看到这个题目,有些同学一看到式子当中有 $x-1$ 这样一个因式,在答案当中又有 $x \geq 1$ 这样一个集合,有的同学就填上了答案是B.其实答案不是B,为什么呢?在解决这个函数定义域问题的时候,我们知道这是两个根号的式子,偶次根号下必为非负数.那我们就应该要注意到第一个根号下的 $x(x-1) \geq 0$,第二个根号下的 $x \geq 0$,应该求这么两个不等式解集的交集才行.也就是说我们应该去解 $x(x-1) \geq 0$ 和 $x \geq 0$ 连立所形成的不等式组,这个不等式组的解, $x(x-1) \geq 0$,它的解集是 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$ 和 $x \geq 0$ 再取交集的时候, $x \geq 0$ 和 $x \leq 0$ 的交集就是 $x=0$. $x \geq 1$ 和 $x \geq 0$ 的交集是 $x \geq 1$.因此这个题目的答案应该是 $x \geq 1$ 或 $x=0$,把它写上集合的形式,就应该是我们这个题目当中的答案C.

这个题目告诉我们,它考查的是函数定义域的概念,还考查偶次根号有意义,我们应该要求根号下的被开放数是非负数,也考查了不等式组的解的问题,也就是求交集的问题.

考点说明

第一个问题,函数的定义域就是使函数的解析式有意义的 x 值的集合,一般要求:分母不能为0,偶次根号下必为非负数,这一点希望同学们要注意到,是偶次根号下必为非负数,奇次根号下并没有这样的限制.第三个就是对数中真数的值应该

是大于0的,底数的值应该是大于0并且不等于1的.在三角函数当中,正切函数、余切函数对其自变量都是有一定的要求的.当然还有0的0次幂没有意义等等.给出了我们的解析式有时候不见得是由一个式子组成的,可能由若干个式子组成,那就需要我们去求使得这些式子都成立的交集.第二个问题,反函数的定义域就是原函数的值域.求函数的值域更重视数学式的变形.第三个问题,在求定义域的时候,解不等式组一定是等价变换.还要注意求函数定义域的时候,我们很可能要结合函数的图像或者是结合函数其他的性质,比如说单调性等等.

举一反三

(2008年湖北卷)函数 $f(x) = \frac{1}{x} \ln(\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{-x^2-3x+4})$ 的定义域为()

A. $(-\infty, -4) \cup [2, +\infty)$

B. $(-4, 0) \cup (0, 1)$

C. $[-4, 0) \cup (0, 1]$

D. $[-4, 0) \cup (0, 1)$

这是2008年湖北的第4题.

$\frac{1}{x}$ 要有意义的话, $x \neq 0$, 这是第一个问题.第二个问题那就是在对数的真数位置里,两个根号下的被开方数都大于等于0,这样我们可以得到一个不等式组,那就是 $x \neq 0$, 还有一个就是 $x^2-3x+2 \geq 0$, 再有 $-x^2-3x+4 \geq 0$. 这个不等式组解出来,结果是这个题目的答案C.

这个题目大家看一看,好像我们已经考虑得很全面了,也就是说该考虑的好像都考虑到了,但是有一点希望大家应该注意,那就是真数应该是大于0的,我们在第一个当中解得的 $x \leq 1$ 或者是 $x \geq 2$, 第二个里边解得的 $-4 \leq x \leq 1$, 这样在1这个地方,就使得这两个式子都等于0,显然是不合适的,因此这个题目的正确答案应该是D.

(2004年上海卷)记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为A, $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]$ ($a < 1$) 的定义域为B.

(I)求A;

(II)若 $B \subseteq A$, 求实数a的取值范围.

这是上海2004年的第19题,是一个大题.

第一步让我们求A,这个比较简单,就是把这个A给具体化就行了,由 $2 - \frac{x+3}{x+1} \geq 0$, 得 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, 故 $x < -1$ 或 $x \geq 1$. 在这个地方要注意什么呢? 有一些同

学一看到 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, 就得出 $x \leq -1$, 或者是 $x \geq 1$, 而没有注意到 $x+1 \neq 0$, 也有些同学把这个不等式的解集, 说它等价于 $(x-1)(x+1) \geq 0$, 这是不对的, $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, 我们变成它的等价形式的话, 可以写上是 $(x-1)(x+1) \geq 0$, 但一定还要加上一个 $x+1 \neq 0$, 这才是等价的形式. $A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

第二个问题说 B 集合是 A 这个集合的子集, B 是什么呢? B 是有关对数的这样一个函数, 也是它的一个定义域, 这个定义域自变量在真数的位置里, 因此应该要求这个真数是大于 0 的, 由 $(x-a-1)(2a-x) > 0$, 得 $(x-a-1)(x-2a) < 0$, $\because a < 1, \therefore a+1 > 2a$, 所以 $B = (2a, a+1)$, $\because B \subseteq A, \therefore 2a \geq 1$ 或 $a+1 \leq -1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 或 $a \leq -2$. 而 $a < 1$, 故 $\frac{1}{2} \leq a < 1$, 或 $a \leq -2$, 综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, 1)$.

要点回顾

这一单元主要的考点是函数的定义域, 首先, 函数定义域是函数的重要组成部分, 它是研究函数的图像、性质、应用都离不开的. 其次, 在解不等式的时候, 特别是解不等式组的时候, 我们可以借助于数轴, 画出一些集合来, 有几个不等式组就应该是几线覆盖, 要是取并集的话, 求证有一个就行, 不等式组的解是取交集的问题. 再次, 这个知识点是我们学习函数的基石, 也是重中之重, 所以希望同学们在学习的时候要特别注意, 我们有一句话, 老师也常常把这句话挂在嘴边, 那就是做函数题的时候: 先求定义域, 做题好品质.

第2单元 集合

这一单元要讲的内容是集合这部分,元素和集合、集合和集合之间的关系,以及集合的运算问题,重点要研究一下集合 M 的子集的个数的问题.

例题点击

(2008 年山东卷) 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

这是 2008 年山东高考的第 1 题.

这个题目为了考察集合部分的掌握程度,命题人在集合之间的关系、集合之间的运算方面做文章. 如果对交集的概念理解不够,也就是 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 就可能造成误解,造成误解的话这个题目很可能就做错了. 这个题目的分值是 5 分,容易出错的地方就是对交集的概念理解得不够. 正确的解法应该是由 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 知, $a_1, a_2 \in M, a_3 \notin M$, 又 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. 因此,适合条件的 M 的个数即是集合 $\{a_4\}$ 的子集的个数,故有 2 个,答案应该是 B.

对于集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 的子集的个数我们可以做如下的思考.

(1) 若 $M = \emptyset$, 则其子集有 1 个: $\emptyset$;

若 $M = \{a_1\}$, 则其子集有 2 个: $\emptyset, \{a_1\}$;

若 $M = \{a_1, a_2\}$, 则其子集有 4 个: $\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$;...

若 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 则其子集有 2^n 个.

(2) 对于集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 来说, 集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\}$ 的子集都是 M 的子集, 设为 k 个, 在集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\}$ 的每个子集里, 添加元素 a_n , 仍为 M 的子集, 故集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 则其子集有 $2k$ 个. 这样, 集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 的子集的个数就应该是 2 为首项, 2 为公比的等比数列的第 n 项, 故有 2^n 个.

(3) 对于集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 组成其子集可分 $n+1$ 类办法: n 个元素分别取 0 个, 1 个, 2 个, $\dots$, n 个元素, 故集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集共有 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ (个).

(4) 对于集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 组成其子集可分 n 个步骤: 对 a_1 , 可取或不取, 有 2 种方法, 对 a_2 , 可取或不取, 有 2 种方法, $\dots$, 对于 a_n , 可取或不取, 有 2 种

方法,故集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集共有 $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\uparrow} = 2^n$ (个).

考点说明

对于集合部分,我们应该了解它的含义、元素和集合之间的关系、全集的含义、空集的含义,理解集合之间的包含关系、相等关系及集合的运算(交集、并集、补集).能用 Venn 图、数轴、坐标系等形数结合的方法表达有关集合的关系及运算的问题.

集合考察的是基本关系和基本运算,一般是以选择题和填空题的形式出现,基本都放在整张试卷当中靠前边的部分,所以是比较容易的问题,但是不注意的话很可能把容易做对的题也给做错了,因为集合本身就能出考题,并且集合是近代数学的基础.

举一反三

(2008 年全国 II 卷) 设集合 $M=\{m \in \mathbb{Z} | -3 < m < 2\}$, $N=\{n \in \mathbb{N} | -1 \leq n \leq 3\}$, 设 $M \cap N = (\quad)$

A. $\{0,1\}$

B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{0,1,2\}$

D. $\{-1,0,1,2\}$

这是 2008 年全国第二套卷的第 1 题,咱们要记住集合当中那几个特殊的表达,那就是 N, Z, Q, R 等等. 这个题目我们应该首先把两个集合的元素给它具体化,第一个集合要求是整数,并且大于 -3 小于 2 , M 这个集合里边的元素就应该是一 2 、 -1 、 0 、 1 . N 这个集合是大于等于 -1 小于等于 3 , 因此 N 这个集合中的元素应该是一 1 、 0 、 1 、 2 、 3 . 这两个集合取交集,就把它们的公共元素拿出来组成的集合,那就应该有一 1 、 0 、 1 , 所以这个题的答案应该是 B.

(2007 年湖南卷) 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$, $S_1, S_2, \dots, S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集,且满足:对任意的 $S_i=\{a_i, b_i\}$, $S_j=\{a_j, b_j\}$ ($i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$), 都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x, y\}$ 表示两个数 x, y 中的较小者), 则 k 的最大值是 ()

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

这个题目的叙述比较长,也就是说在题目当中所含有的信息比较多,我们要把这信息给转化过来,首先我们知道 S_1, S_2 一直到 S_k 都是 M 含有两个元素的子集,也就是说我们在 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 这 6 个数当中取出两个数来组成的集合就可能是 S_1

一直到 S_i 当中的某一个,还满足什么呢?还满足这么一个式子,这个式子代表了什么意思呢?很显然要求是 $\frac{a_i}{b_i}$ 和 $\frac{b_i}{a_i}$ 这两个数当中找最小的,那最小的当然应该是拿出两个数来做比值的话,真分数是小的,我们可以找到两个数,左边这个指的是真分数,右边这个也指的是真分数,那就是做成的真分数当中要求分数的值不相等,所以说这个题就变成了一个由 1、2、3、4、5、6 取出两个数来做成真分数,集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 含两个元素的子集共有 $C_6^2 = 15$ 个, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}, \frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, k 的最大值是多少个呢?刚才我们说 15 个,要去掉 4 个相同的,最大值就应该是 11,这个答案应该是 B.

(2007 年北京卷)已知集合 $A = \{x | |x-a| \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

这是北京考题的第 12 题,是一个填空题.对这个题目,第一步我们应该解两个不等式,一个是含有绝对值的不等式,一个是二次不等式.含有绝对值的不等式里有 a ,那当然是 $|x-a| \leq 1$,它等价于 $-1 \leq x-a \leq 1$,也就得到了 A 这个集合 $[a-1, a+1]$. $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ 是两边,所以 B 这个集合答案应该是 $B = \{x | x \leq 1, x \geq 4\}$,而现在要求 $A \cap B$ 等于空集,我们得要求 $a-1 > 1, a+1 < 4$. 这样通过解不等式组就得到了 a 的取值范围应该是 $(2, 3)$.

(2006 年湖北卷)有限集合 S 中元素个数记作 $\text{card}(S)$, 设 A, B 都为有限集合, 结出下列命题:

- ① $A \cap B = \emptyset$ 的充要条件是 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$;
- ② $A \subseteq B$ 的必要条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$;
- ③ $A \subset B$ 的充分条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$;
- ④ $A = B$ 的充要条件是 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$;

其中真命题的序号是()

A. ③④

B. ①②

C. ①④

D. ②③

这是湖北的一个题目.

注意看,真命题的真字给了一个重点的符号,那也就是说真命题的序号一定要看清楚,真命题的序号是哪些呢? $A \cap B$ 元素的个数我们知道,应该等于 $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$, 现在有的条件是 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$, 说明 $\text{card}(A \cap B) = 0$, 也就是 $A \cap B$ 当中没有元素,那当然 $A \cap B$ 就是空集. 因此第一个是正确的,也就是来回都能推导. 第二个, A 是 B 的子集,那么 A 的元素的个数一定小于等于 B 的元素的个数. 但是 A 元素的个数小于等于 B 元素的个数,你推导不出来 A 是 B 的子集. 这样 A 是 B 子集的必要条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.

(B)也是对的.这样的话第一个和第二个都是正确的,就是在我们的答案当中B这个答案①②.

要点回顾

集合这部分要注意哪些问题呢?第一要注意集合的概念,第二要注意元素和集合、集合与集合之间的关系,再一个就是集合的运算.这是集合的三个重要的方面,希望同学们能够把它理解和掌握住.

第3单元 简易逻辑

这一单元主要讲的内容是简易逻辑,在简易逻辑里边我们重点讲解一下充要条件的有关问题.

例题点击

(2008年江苏卷)已知函数 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$, $f_2(x)=2 \cdot 3^{|x-p_2|}$ ($x \in \mathbf{R}$, p_1, p_2 为常数), 函数 $f(x)$ 定义为: 对每个给定的实数 x ,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{若 } f_1(x) \leq f_2(x), \\ f_2(x), & \text{若 } f_1(x) > f_2(x). \end{cases}$$

求: $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充分必要条件(用 p_1, p_2 表示);

这是2008年江苏试题的第20题. 它的分值是16分, 比较容易出错的地方就是第一个题目的充要条件的得出每一步都要做到等价转化, 否则这个题目做出来的结果就是错误的, 这也是主要的失分点.

由 $f(x)$ 的定义可知

$$f(x)=f_1(x) \text{ 恒成立} \Leftrightarrow f_1(x) \leq f_2(x) \text{ 恒成立}$$

$$\Leftrightarrow 3^{|x-p_1|} \leq 2 \cdot 3^{|x-p_2|} \text{ 恒成立}$$

$$\Leftrightarrow 3^{|x-p_1|-|x-p_2|} \leq 2 \text{ 恒成立.}$$

易知 $|x-p_1|-|x-p_2|$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最大值为 $|p_1-p_2|$, 故 $3^{|x-p_1|-|x-p_2|} \leq 2$ 恒成立 $\Leftrightarrow 3^{|p_1-p_2|} \leq 2 \Leftrightarrow |p_1-p_2| \leq \log_3 2$

故 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充要条件是 $|p_1-p_2| \leq \log_3 2$.

考点说明

对于逻辑用语的考察, 要了解命题及其逆命题、否命题和逆否命题, 逻辑连接词“或”、“且”、“非”的含义, 理解必要条件、充分条件和充分必要条件的意义及全称量词与存在量词的意义, 会分析四种命题的相互关系, 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

举一反三

(2008年全国卷)平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个,如两组对边分别平行,类似地,写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件:

充要条件① _____;

充要条件② _____.

这是2008年全国考题中的第16题.

这个题目有一定的开放性,也就是说我们由一个从平面几何的问题到空间几何,或者说立体几何这样,一个类比的过程.这样的话它也给出平面内的一个四边形为平行四边形的条件,那现在到空间中要想一个四棱柱为平行六面体的话,我们需要朝哪些方面去想呢?我们可以想一想底面的问题,我们可以想一想侧面的问题,我们还可以想一想对角线的问题.底面呢咱们知道要成为平行六面体的话,底面必须是平行四边形.要是平行六面体的话,它的底面也是平行四边形,要一个四棱柱的底面是平行四边形的话,这个一定是平行六面体,因此只要求底面是平行四边形就行了.要是看侧面的话,也就是要是看一组侧面的话,它必须是平行且相等.要看两组侧面的话,应该是这两组侧面互相平行.要看对角线的话,我们知道平行六面体的每一个对角面都应该是平行四边形,所以平行四边形的对角线应该交于一点.这样我们填空的时候可以在众多的充要条件当中选出两个就可以了.我们可以选底面是平行四边形,还可以选一组相对侧面平行且相等,或两组相对侧面分别平行或对角线交于一点,填到充要条件一,充要条件二当中.

这个地方容易出现的错误就是,我们光考虑到由四棱柱推导出平行六面体来了,没有想到平行六面体还要推导出所说的那个条件,比如说底面是正方形的四棱柱肯定是平行六面体,但是平行六面体的底面不见得是正方形,希望大家注意充要条件一定是等价命题.

(2008年北京卷)“函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 存在反函数”是函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的增函数的()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

这是2008年北京的一个题目.

同学们知道,函数要是存在反函数的话,这个函数不一定是单调函数,我们可以看一个例子,就是 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 的时候是 $\frac{1}{x}$, $x=0$ 时是0,这个存在反函数,它的

反函数还是它本身,它不是单调函数,在整个定义域上不是单调函数.一个函数如果为增函数的话,我们注意到,确定这个函数的映射应该是一一映射,所以说这个函数它就一定存在着反函数.也就是说由前边推导不出后边来,后边能推导出前边.看一看谁是条件呢?前边是条件,后边是结论.现在就是说我们有结论了能推出条件来,但是由条件推不出结论来,因此这个题的答案应该是 B.

(2007 年山东卷)下列各小题中, p 是 q 的充要条件的是()

① $p: m < -2$ 或 $m > 6; q: y = x^2 + mx + m + 3$ 有两个不同的零点.

② $p: \frac{f(-x)}{f(x)} = 1; q: y = f(x)$ 是偶函数.

③ $p: \cos \alpha = \cos \beta; q: \tan \alpha = \tan \beta$.

④ $p: A \cap B = A; q: \complement_U B \subseteq \complement_U A$.

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①④

这是 2007 年山东省考题的第 9 题,这个题目告诉我们,要在这四个小题当中把是充要条件的两个选择出来,从这四个小题当中我们可以看到考的是充要条件的问题,事实上它考察了四个方面的数学知识点,我们应该逐个进行检验.

对第一个小题 p 这个条件已经很明确了,但是 q 这个,函数有两个不同零点的问题,它可以转化为 $y=0$ 时候的一个一元二次方程,有两个不同的实根的问题,有两个不同实根的充要条件就应该是 $\Delta = m^2 - 4(m+3) > 0$,这个解出来正好是 $m < -2$ 或 $m > 6$,也就是说 q 这个条件转化完了之后和 p 是一致的,因此第一个应该说 p 是 q 的充要条件.

对第二个来讲, $\frac{f(-x)}{f(x)} = 1$,我们可以得出 $f(-x) = f(x)$,只要是 $f(-x) = f(x)$,我们就说这个函数肯定是偶函数.但是 $f(x)$ 是偶函数,我们一定有 $f(-x) = f(x)$,但我们不敢保证 $f(x)$ 一定不等于 0,这样的话 $\frac{f(-x)}{f(x)}$ 很可能就没有意义,因此这个应该说 p 是 q 的充分而不必要的条件,当然这不在我们的选择之列.

第三个问题,不管通过特质还是利用函数的图像,我们既得不出 p 是 q 的充分条件,也得不出 p 是 q 的必要条件,因此第三个也是错误的.这个问题我们知道有一个充要条件是非常有名的,那就是在三角形 ABC 中, $\angle A > \angle B$ 的充要条件是 $\sin A > \sin B$,这个我们通过大角对大边,然后再利用正弦定理,非常容易证得.

第四个问题, $A \cap B = A$ 和 A 是 B 的子集及 $A \cup B = B$,是等价的,那我们就可以把 $A \cap B = A$ 转化为 A 是 B 的子集,也就是说 B 在 U 中的补集包含于 A 在 U 中的补集,同一道理我们有 B 在 U 中的补集包含于 A 在 U 中的补集也能得出 A 是 B 的子集,因此对第四个问题来讲,由 p 能推导出 q 来,由 q 也能推导出 p 来,所以 p 是 q 的充要条件.这个题目的答案就应该是 D,第一个和第四个是对的.

要点回顾

这一单元主要的内容是充要条件的概念、判定,同时也使我们注意到推理的合理性,由于条件、结论是构成命题的元素,因此可以说数学问题即是充分必要条件的有关问题.我们在解决问题的时候,第一要注意谁是条件谁是结论.第二要注意到条件和结论是构成命题的要素.数学问题都是由条件和结论组成的,因此我们在解决数学问题的时候,充要条件的部分尤其重要,同时我们也要注意到学习充要条件是为了我们更好地进行数学推理,我们要解开一个题目,必须具备一定的逻辑性才行,也就是说我们平时做题的时候都是利用充分条件、必要条件和充要条件的问题去解决我们所出现的数学问题.