HITP

数学奥林匹克系列

2010·第三辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰 主编

《数学奥林匹克与数学文化》是数学竞赛与数学文化方面的系列专业文集。本文集旨在为从事数学竞赛的师生与从事数学文化研究与传播的专业人员提供深度阅读，搭建表达平台，促进海内外华人同业人士的学术交流与合作，推动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社

HITP

数学奥林匹克系列

2010·第三辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰　主编

哈爾濱工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化.第3辑,竞赛卷/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-5603-2954-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课-中学-竞赛题-研究
Ⅳ.G634.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第179098号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张32　字数700千字
版　　次　2010年1月第1版　2010年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2954-3
印　　数　1~2 000册
定　　价　58.00元

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

第三辑(竞赛卷)

目 录 CONTENTS

高中联赛试题研究 Research on Test Questions of High School League Matches

地方数学竞赛试题研究 Research on Local Mathematical Test

IMO 试题研究 Research on IMO Test

IMO 备选题研究 Research on IMO Standby Test

一组数奥名题的赏析

邓寿才

1

1995 年国家集训队试题采用了一道单墫老师的创新题：

题 1 求最小正数 λ，使对任意 $n \geqslant 2$ 和 $a_i, b_i \in [1,2](i=1,2,\cdots,n)$，且 $b_1,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列，都有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{A}$$

为此，刘培杰主编在本书第一辑的第 32 页和第 46 页解析了本题，用巧妙的方法求出了出人意料的结果：

$$\lambda_{\min} = \frac{17\left[\frac{n}{2}\right]+1+(-1)^{n+1}}{10\left[\frac{n}{2}\right]+1+(-1)^{n+1}},\quad 2 \leqslant n \in \mathbf{N}$$

当 n 为偶数时，$\lambda_{\min} = \frac{17}{10}$.

1998 年全国高中数学联赛降低难度取 $\lambda = \frac{17}{10}$ 作为第二试的第二题：

题 2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n \in [1,2]$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{B}$$

本题的特点是：第一，证法技巧性强，当届许多参赛者都"栽"在本题上；第二，本题是少见的反向不等式，与常规的传统性题目比较，显得与众不同；第三，等号成立的条件特点：仅当 n 为偶数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有一半取 1，另一半取 2，$a_ib_i=2(i=1,2,\cdots,n)$，显得别具一格.

有的数奥资料上，将题 2 推广成：

题 3 设 $0 < p \leqslant a_i, b_i \leqslant 9(i=1,2,\cdots,n;2 \leqslant n \in \mathbf{N})$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\left(\frac{p^4+q^4}{p^3q+pq^3}\right)\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{C}$$

我们先建立式(B)的两个拓广,然后指出式(C)的再推广.

推广1 设$0<p\leqslant a_i\leqslant q,0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\frac{\alpha p+\beta q}{p^2+q^2}\right)\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{①}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{D}$$

其中

$$\lambda=\frac{(p^2+q^2)(\alpha p+\beta q)}{4\alpha\beta pq} \tag{②}$$

特别地,当取$p=\alpha=1,q=\beta=2$时,条件式①化为$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i,\lambda=\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

证明 设$\frac{a_i}{b_i}=\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$,则

$$\left.\begin{array}{l}0<p\leqslant a_i\leqslant q\\0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{p}{\beta}\leqslant\lambda_i\leqslant\frac{q}{\alpha} \tag{③}$$

我们不妨设

$$0<\frac{p}{\beta}=\lambda_1\leqslant\lambda_i\leqslant\lambda_n=\frac{q}{\alpha}(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda_i-\lambda_1\geqslant 0\\\lambda_i-\lambda_n\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)\leqslant 0\Rightarrow$$

$$\lambda_i^2+\lambda_1\lambda_n\leqslant(\lambda_1+\lambda_n)\lambda_i\Rightarrow \tag{④}$$

$$\lambda_ia_i^2+\lambda_1\lambda_n\left(\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\leqslant(\lambda_1+\lambda_n)a_i^2\Rightarrow \tag{⑤}$$

$$2\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\lambda_1\lambda_n\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2+\lambda_1\lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_ia_i^2+\lambda_1\lambda_n\left(\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\right]\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_1+\lambda_n)a_i^2=(\lambda_1+\lambda_n)\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\lambda_i}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha p+\beta q}{p^2+q^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\leqslant$$

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\text{(应用已知条件中的式 ①)}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

即式(D) 成立.

为了给式(D) 配对,我们建立:

推广 2 设 $0<p\leqslant a_i\leqslant q,0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且

$$pq\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant\alpha\beta\sum_{i=1}^{n}a_i^2\tag{E}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\geqslant\sqrt{\frac{pq}{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\tag{F}$$

特别地,当取 $p=\alpha=1,q=\beta=2$ 时,式(F) 化为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\tag{⑥}$$

式(B) 与式 ⑥ 结合,可将式(B) 完善成一个双向不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\tag{G}$$

证明 应用柯西不等式,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)^2\geqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)\right]^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^4\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\right)^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^3\div\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^3\div\left(\frac{\alpha\beta}{pq}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\geqslant\frac{pq}{\alpha\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\geqslant\sqrt{\frac{pq}{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

等号成立仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=\sqrt{\dfrac{pq}{\alpha\beta}}$

最后,我们将式(C) 从定义域、系数、指数 3 个方面综合推广为:

推广 3 设 $k,m,\lambda_i>0,0<p\leqslant a_i\leqslant q,0<\alpha\leqslant b_i\leqslant\beta(1\leqslant i\leqslant n;2\leqslant n\in\mathbf{N})$,且满足关系

$$(pq)^k\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ib_i^{2m}\right)\geqslant(\alpha\beta)^m\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^{2k}\right)\tag{⑦}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i^{3k}}{b_i^m}\right)\leqslant\delta\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i^{2k}\right)\tag{H}$$

其中

$$\delta=\frac{\alpha^{2m}p^{2k}+\beta^{2m}q^{2k}}{(\alpha\beta)^{m}(\alpha^{m}p^{k}+\beta^{m}q^{2k})} \quad ⑧$$

显然,当取 $m=k=1$ 时,及 $p=\alpha=1,q=\beta=2,\lambda_i=1(i=1,2,\cdots,n)$ 时,式(H)化为式(B).

略证 设参数 $t\in\mathbf{R}^{+}$,令(记$\sum\limits_{i=1}^{n}$为$\sum$)

$(a_i^k,b_i^m,p^k,q^k,\alpha^m,\beta^m)=(a_{i1},b_{i2},p_1,q_1,\alpha_1,\beta_1)(1\leqslant i\leqslant n)\Rightarrow$

$$\begin{cases}p_1\leqslant a_{i1}\leqslant q_1\\ \dfrac{1}{\beta_1}\leqslant\dfrac{1}{b_{i1}}\leqslant\dfrac{1}{\alpha_1}\end{cases}\Rightarrow\frac{p_1}{\beta_1}\leqslant\frac{a_{i1}}{b_{i1}}\leqslant\frac{q_1}{\alpha_1}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}p_1q_1\sum\lambda_ib_{i1}^2\geqslant\alpha_1\beta_1\sum\lambda_1a_{i1}^2\\ \begin{cases}a_{i1}-\dfrac{p_1}{\beta_1}b_{i1}\geqslant0\\ a_{i1}-\dfrac{q_1}{\alpha_1}b_{i1}\leqslant0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left(a_{i1}-\frac{p_1}{\beta_1}b_{i1}\right)\left(a_{i1}-\frac{q_1}{\alpha_1}b_{i1}\right)\leqslant0\Rightarrow$$

$$\left(a_{i1}-\frac{p_1}{\beta_1}b_{i1}\right)\left(a_{i1}-\frac{q_1}{\alpha_1}b_{i1}\right)\left(\frac{a_{i1}}{b_{i1}}+t\right)\leqslant0\Rightarrow$$

$$\left[a_{i1}^2-\left(\frac{p_1}{\beta_1}+\frac{q_1}{\alpha_1}\right)a_{i1}b_{i1}+\frac{p_1q_1}{\alpha_1\beta_1}b_{i1}^2\right]\cdot\left(\frac{a_{i1}}{b_{i1}}+t\right)\leqslant0\Rightarrow$$

$$\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}}\leqslant Aa_{i1}^2-Bb_{i1}^2+Qa_ib_i \quad ⑨$$

为了消去 a_ib_i,我们令

$$Q=t\left(\frac{p_1}{\beta_1}+\frac{q_1}{\alpha_1}\right)-\frac{p_1q_1}{\alpha_1\beta_1}=0\Rightarrow t=\frac{p_1q_1}{p_1\alpha_1+q_1\beta_1} \quad ⑩$$

记

$$A=\frac{p_1}{\beta_1}+\frac{q_1}{\alpha_1}-t,B=\frac{p_1q_1}{\alpha_1\beta_1}t \quad ⑪$$

于是

$$\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}}\leqslant Aa_{i1}^2-Bb_{i1}^2\Rightarrow\lambda_i\left(\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}}\right)\leqslant A\lambda_ia_{i1}^2-B\lambda_ib_{i1}^2\Rightarrow$$

$$\sum\lambda_i\left(\frac{a_{i1}^3}{b_{i1}}\right)\leqslant A\sum\lambda_ia_{i1}^2-B\sum\lambda_ib_{i1}^2\leqslant\delta_1\sum\lambda_ia_{i1}^2\Rightarrow$$

$$\sum\lambda_i\left(\frac{a_i^{3k}}{b_i^m}\right)\leqslant\delta\sum\lambda_ia_i^{2k}$$

其中 $\delta_1=\delta$.

2

许多数奥资料上都有如下题目：

题4　设 a,b,c 为任意正数，则有

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \tag{I}$$

众所周知，式(I)因题意简洁、结构匀称、外观优美而被人们所熟悉，而美国有一道竞赛将它推广后深受大家喜爱：

题5　设 a,b,c,d,e 为任意正数，则有

$$a^a b^b c^c d^d e^e \geqslant (abcde)^{\frac{a+b+c+d+e}{5}}$$

下面我们先再推广式(I)，然后建立该推广式的配对式.

推广4　$x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n; n \in \mathbf{N})$，则有

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \tag{J}$$

关于式(J)的证明有十余种，我们介绍几种初等的妙证：

证法1　(1) 当 $n = 1$ 时，式(J)显然成立；

当 $n = 2$ 时，由于

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_1 - x_2} \geqslant 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1^{x_1} x_2^{x_2} \geqslant x_1^{x_2} x_2^{x_1} \\ x_1^{x_1} x_2^{x_2} = x_1^{x_1} x_2^{x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1^{x_1} x_2^{x_2})^2 \geqslant (x_1 x_2)^{x_1 + x_2} \Rightarrow x_1^{x_1} x_2^{x_2} \geqslant (x_1 x_2)^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$$

此时式(J)成立，等号成立仅当 $x_1 = x_2$.

(2) 假设当 $n = k + 1$ 时，式(J)成立，记 $x_1 x_2 \cdots x_k = G^k$，那么有

$$(x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_k^{x_k} G^G)^{k+1} \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_k G)^{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + G} = (G^k \cdot G)^{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + G} =$$

$$G^{(k+1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k + G)} \Rightarrow x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_k^{x_k} G^G \geqslant G^{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + G} \Rightarrow$$

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_k^{x_k} \geqslant G^{x_1 + x_2 + \cdots + x_k} = (x_1 x_2 \cdots x_k)^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}}$$

即当 $n = k$ 时，式(J)也成立，等号成立仅当

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = G$$

综合(1)和(2)知，对任意 $n \in \mathbf{N}$，式(J)成立，等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证法2　(1) 由证法1知，当 $n = 1,2$ 时，式(J)成立.

(2) 假设当 $n = k$ 时，式(J)成立，那么当 $n = k + 1$ 时，依假设有

$$(x_2^{x_2} x_3^{x_3} \cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \geqslant (x_2 x_3 \cdots x_{k+1})^{x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1}} \tag{①}$$

$$(x_1^{x_1} x_3^{x_3} \cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \geqslant (x_1 x_3 \cdots x_{k+1})^{x_1 + x_3 + \cdots + x_{k+1}} \tag{②}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_k^{x_k})^k \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_k)^{x_1 + x_2 + \cdots + x_k} \tag{k+1}$$

$$(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k = (x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \qquad (k+2)$$

将以上 $k+2$ 个式子相乘，得

$$(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^{k(k+1)} \geqslant (x_1x_2\cdots x_{k+1})^{k(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})} \Rightarrow x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}} \geqslant (x_1x_2\cdots x_{k+1})^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}}$$

即当 $n=k+1$ 时，式(J) 仍然成立，等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$.

综合上述，对任意 $n\in\mathbf{N}$，式(J) 成立，等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证法 3 简记 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\sum$，$\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 为 $\prod$，由证法 1 有

$$(x_i^{x_i}x_j^{x_j})^2 \geqslant (x_ix_j)^{x_i+x_j} \Rightarrow \prod (x_i^{x_i}x_j^{x_j})^2 \geqslant \prod (x_ix_j)^{x_i+x_j} \Rightarrow$$

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^{x_i}\right)^{2C_n^2} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{(n-1)\sum\limits_{i=1}^n x_i} \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^n x_i^{x_i}\right)^{n(n-1)} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{(n-1)\sum\limits_{i=1}^n x_i} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^n x_i^{x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}}$$

等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证法 4 (1) 由证法 1 知，当 $n=1,2$ 时，式(J) 成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时，式(J) 成立，那么当 $n=k+1$ 时，记

$$\begin{cases} T = x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}} \\ m = x_1x_2\cdots x_{k+1} \\ S = x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} \end{cases} \quad (\text{约定 } x_0=1) \Rightarrow \left(\frac{T}{x_i^{x_i}}\right)^k = (x_1^{x_1}\cdots x_{i-1}^{x_{i-1}}x_{i+1}^{x_{i+1}}\cdots x_{k+1}^{x_{k+1}})^k \geqslant$$

$$(x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{k+1})^{s-x_i} = \left(\frac{m}{x_i}\right)^{s-x_i} \Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{T}{x_i^{x_i}}\right)^k \geqslant \prod_{i=1}^{k+1}\left(\frac{m}{x_i}\right)^{s-x_i} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{T^{k+1}}{\prod\limits_{i=1}^{k+1} x_i^{x_i}}\right)^k \geqslant \frac{m^{\sum\limits_{i=1}^{k+1}(s-x_i)}}{\prod\limits_{i=1}^{k+1} x_i^{s-x_i}} = \frac{m^{(k+1)s-s}}{m^s\cdot T^{-1}} = \frac{m^{(k-1)s}}{T^{-1}} \Rightarrow \left(\frac{T^{k+1}}{T}\right)^k \geqslant \frac{m^{(k-1)s}}{T^{-1}} \Rightarrow$$

$$T^{k^2-1} \geqslant m^{(k-1)s} \Rightarrow T^{k+1} \geqslant m^s \Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1} x_i^{x_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{k+1} x_i\right)^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1} x_i}{k+1}}$$

即当 $n=k+1$ 时式(J) 也成立，等号成立仅当

$$x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$$

总结上述，对任意 $n\in\mathbf{N}$，式(J) 成立，等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

式(J)虽然将式(I)从3元正数推广到了任意自然数 n，但它还可再从指数上推广为：

推广 5 设 $x_i>0, p_i\in(0,1)$，且 $\sum\limits_{i=1}^n p_i = 1(1\leqslant i\leqslant n\in\mathbf{N})$，则有

$$\prod_{i=1}^n (x_i^{x_i})^{p_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^n p_ix_i} \qquad (\mathrm{K})$$

显然,当 $p_i=\frac{1}{n}(1\leqslant i\leqslant n)$ 时,式(K)化为式(J).

证法 1 应用加权几何平均 - 调和平均不等式有

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^{x_i})^{p_i}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_ix_i}\geqslant\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\left(\frac{1}{x_i}\right)}\right]^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}=$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}(\text{应用加权不等式})\geqslant$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}$$

即式(K)成立,等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证法 2 设关于 $x>0$ 的函数为

$$f(x)=\ln x^x=x\ln x\Rightarrow f'(x)=\ln x+1\Rightarrow f''(x)=$$

$$\frac{1}{x}>0\Rightarrow f(x)\text{ 为凸函数}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)\geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\ln x_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\ln\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{p_ix_i}\geqslant\ln\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}\Rightarrow$$

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_ix_i}\right)\geqslant\ln\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}\Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_ix_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}$$

即式(K)成立,等号成立仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

让我们回顾式(J)

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{x_i}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}}$$

如果我们记 $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$,则式(J)化为

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{x_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}x_i^{A}\tag{L}$$

在式(L) 中作置换$\prod\limits_{i=1}^{n} \to \sum\limits_{i=1}^{n}$,那么它有配对式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{A} \tag{M}$$

吗?如果置换成功,式(M) 成立,那么还需要什么条件吗?而事实上

配对 设 $x_i \geqslant 1(1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})$,证 $A = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{A}$$

证明 若 $x \geqslant y \geqslant 1$,有

$$\begin{aligned}
(x^x + y^y) - (x^y + y^x) = {} & (x^x - x^y) - (y^x - y^y) = \\
& x^y(x^{x-y} - 1) - y^y(y^{x-y} - 1) \geqslant \\
& x^y(y^{x-y} - 1) - y^y(y^{x-y} - 1) = \\
& (x^y - y^y)(y^{x-y} - 1) \geqslant 0 \Rightarrow \\
& x^x + y^y \geqslant x^y + y^x \Rightarrow \\
& x_i^{x_i} + x_j^{x_j} \geqslant x_i^{x_j} + x_j^{x_i}(i \neq j) \Rightarrow \\
& \sum (x_i^{x_i} + x_j^{x_j}) \geqslant \sum (x_i^{x_j} + x_j^{x_i})(\text{记} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{为} \sum) \Rightarrow \\
& (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum (x_i^{x_j} + x_j^{x_i}) \Rightarrow \\
& n\sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} + \sum (x_i^{x_j} + x_j^{x_i})(\text{注意} \frac{2}{n}\mathrm{C}_n^2 = n-1) = \\
& \sum_{i=1}^{n} (x_i^{x_1} + x_i^{x_2} + \cdots + x_i^{x_n}) \geqslant \\
& n\sum_{i=1}^{n} (x_i^{x_1} x_i^{x_2} \cdots x_i^{x_n})^{\frac{1}{n}} = \\
& n\sum_{i=1}^{n} x_i^{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{A}
\end{aligned}$$

等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

如果我们设

$$\begin{cases} T_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \\ G_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T_{n+1}}{T_n} = x_{n+1}^{x_{n+1}} \\ \dfrac{G_{n+1}}{G_n} = x_{n+1} \end{cases}$$

因为不论当 $0 < x_{n+1} \leqslant 1$ 还是 $x_{n+1} \geqslant 1$,总有

$$\frac{x_{n+1}^{x_{n+1}}}{x_{n+1}} = x_{n+1}^{x_{n+1}-1} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{T_n} \geqslant \frac{G_{n+1}}{G_n} \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{G_{n+1}} \geqslant \frac{T_n}{G_n} \Rightarrow$$

$$\frac{T_n}{G_n} \geqslant \frac{T_{n-1}}{G_{n-1}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{T_1}{G_1} = 1 \tag{N}$$

同理,如果再设

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^{x_i}, \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

我们可得到式(N)的配对式

$$M_n - A_n \geqslant M_{n-1} - A_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant M_1 - A_1 = 0 \tag{O}$$

可见式(N)和式(O)是一对非常漂亮的不等式链.

从外形结构而言,式(M)并非形单影只,它有一个搭挡:

题 6 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为正数,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n (2 \leqslant n \in \mathbf{N})$ 为 n 个同号非零实数,记 $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^S \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} \right) \tag{P}$$

证法 1 由已知条件知 $0 < \frac{\alpha_i}{s} < 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$,且 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s} = 1$,应用加权不等式有

$$\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{n} (x_i^s)^{\frac{\alpha_j}{s}} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{s}(x_j^s) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} \right) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{s} x_i^s \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{s} \right) x_i^s =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^s \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^s \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j} \right)$$

等号成立仅当

$$x_1^s = x_2^s = \cdots = x_n^s \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

证法 2 当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 同为正数时,不妨设

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^{\alpha_1} \geqslant x_2^{\alpha_1} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\alpha_1} > 0 \\ x_1^{\alpha_2} \geqslant x_2^{\alpha_2} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\alpha_2} > 0 \\ \cdots\cdots \\ x_1^{\alpha_n} \geqslant x_2^{\alpha_n} \geqslant \cdots \geqslant x_n^{\alpha_n} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{(应用排序原理)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^s = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_1} x_i^{\alpha_2} \cdots x_i^{\alpha_n} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} x_i^{\alpha_j}$$

当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 同为负数时,同理可证式(P)成立,等号成立仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3

1977 年美国数奥(USAMO)有一道美妙趣味题:

题 7 设 $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$,求证:

$$a^b b^c c^d d^a \geqslant b^a c^b d^c a^d \tag{Q}$$

其参考证明太复杂,不够简捷明快,我们先推广式(Q).

推广 6 设 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 或 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$,则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_{i+1}} \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i+1}^{a_i} \tag{R}$$

或

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_{i+1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i+1}^{a_i} \tag{R′}$$

其中约定 $a_{n+1} \equiv a_1$.

显然,当 $n = 4$ 时,式(R) 等价于式(Q).

证明 (1) 当 $n = 2$ 时,式(R) 化为等式

$$a_1^{a_2} a_2^{a_1} = a_2^{a_1} a_1^{a_2}$$

其中 $0 < a_1 \leqslant a_2$.

当 $n = 3$ 时,式(R) 即为

$$a_1^{a_2} a_2^{a_3} a_3^{a_1} \geqslant a_2^{a_1} a_3^{a_2} a_1^{a_3} \tag{①}$$

其中 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 x, a_3 = a_1 y \\ 0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow ① \Leftrightarrow a_1^{a_1 x} \cdot (a_1 x)^{a_1 y} \cdot (a_1 y)^{a_1} \geqslant$$

$$(a_1 x)^{a_1} \cdot (a_1 y)^{a_1 x} \cdot a_1^{a_1 y} \Leftrightarrow (y x^y)^{a_1} \geqslant (x y^x)^{a_1} \Leftrightarrow$$

$$y x^y \geqslant x y^x \Leftrightarrow x^{y-1} \geqslant y^{x-1} \tag{②}$$

观察式 ② 知,当 $y = x = 1, y \geqslant x = 1, y = x > 1$ 时式 ② 成立,且均取等号

当 $y > x > 1$ 时,式 ② 化为

$$x^{\frac{1}{x-1}} \geqslant y^{\frac{1}{y-1}} \tag{③}$$

设关于 $t > 1$ 的函数为

$$f(t) = \ln t^{\frac{1}{t-1}} = \frac{\ln t}{t-1}$$

求导得

$$f'(t) = \frac{g(t)}{t(t-1)^2} \tag{④}$$

其中

$$g(t) = t - 1 - t\ln t \Rightarrow \tag{⑤}$$

$$g'(t) = -\ln t < 0 \Rightarrow g(t) \text{ 为减函数,则} \Rightarrow$$

$$g(t) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(t) < 0 \Rightarrow$$

$$f(t) \text{ 与 } g(t) \text{ 在}(1, +\infty) \text{ 内为减函数} \Rightarrow$$

$$f(x) > f(y) \Rightarrow \ln x^{\frac{1}{x-1}} > \ln y^{\frac{1}{y-1}} \Rightarrow$$

$$x^{\frac{1}{x-1}} > y^{\frac{1}{y-1}} \Rightarrow \text{式 ③ 成立}$$

从而式 ① 成立,等号成立仅当

$$x = y = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

(2) 假设当 $n = k$ 时,式(R) 成立,即当 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ 时

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^{a_{i+1}} \geqslant \prod_{i=1}^{k} a_{i+1}^{a_i} \qquad ⑥$$

等号成立仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$.

记式(R) 左边是 P_k,右边为 Q_k,那么当 $n = k + 1$ 时,由于

$$\left.\begin{aligned} P_{k+1} &= \left(\frac{a_k^{a_{k+1}} \cdot a_{k+1}^{a_1}}{a_k^{a_1}}\right) P_k = \prod_{i=1}^{k+1} a_i^{a_{i+1}} \\ Q_{k+1} &= \left(\frac{a_1^{a_{k+1}} \cdot a_{k+1}^{a_k}}{a_1^{a_k}}\right) Q_k = \prod_{i=1}^{k+1} a_{i+1}^{a_i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_k}{Q_k} \cdot \frac{a_1^{a_k} a_k^{a_{k+1}} a_{k+1}^{a_1}}{a_k^{a_1} a_{k+1}^{a_k} a_1^{a_{k+1}}} \qquad ⑦$$

当 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant a_{k+1}$ 时,由归纳假设有 $P_k \geqslant Q_k$,由 $0 < a_1 \leqslant a_k \leqslant a_{k+1}$ 应用式 ① 有

$$a_1^{a_k} a_k^{a_{k+1}} a_{k+1}^{a_1} \geqslant a_k^{a_1} a_{k+1}^{a_k} a_1^{a_{k+1}} \Rightarrow \qquad ⑧$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \geqslant \frac{P_k}{Q_k} \geqslant 1 \Rightarrow P_{k+1} \geqslant Q_{k+1} \qquad ⑨$$

即当 $n = k + 1$ 时式 ② 仍然成立,等号成立仅当

$$\left.\begin{aligned} a_1 = a_2 = \cdots = a_k \\ a_1 = a_k = a_{k+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$$

综合(1) 和(2) 知,对于任意 $n \geqslant 2$ 的自然数,式(R) 恒成立,等号成立仅当 $n = 2$ 或 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n (n > 2)$.

从外形结构上看,式(R)“孤单寂寞”吗?其实,他也有配对式:

配对 设 $\mathrm{e} \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i+1}^{a_i}, n \geqslant 2 \qquad (S)$$

其中约定 $a_{n+1} = a_1$.

证明 (1) 当 $n = 2$ 时,式(S) 化为等式

$$a_1^{a_2} + a_2^{a_1} = a_2^{a_1} + a_1^{a_2}$$

当 $n = 3$ 时,式(S) 化为

$$a_1^{a_2} + a_2^{a_3} + a_3^{a_1} \geqslant a_2^{a_1} + a_3^{a_2} + a_1^{a_3} \qquad ⑩$$

设

$$\left.\begin{aligned} a_2 = a_1 + x, a_3 = a_1 + y \\ \mathrm{e} \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant y$$

设

$$T = f(x) + f(y) + g(x, y) \qquad ⑪$$

其中