

初等教育研究丛书

XIAOXUE
SHUXUE
JIETILUN

小学数学解题论

郜舒竹 刘长红 著

广西教育出版社

小学数学解题论

G623.505/1

郜舒竹 刘长红 著

广西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学数学解题论/郜舒竹著. —南宁: 广西教育出版社, 2006.9

(初等教育研究丛书)

ISBN 7-5435-4707-4

I. 小... II. 郜... III. 数学课—小学—解题

IV. G623.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 104792 号

初等教育研究丛书

小学数学解题论

郜舒竹 刘长红 著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号 邮政编码: 530022

电话: 0771-5865797 5852408(邮购)

本社网址 <http://www.gxeph.com>

读者电子信箱 book@gxeph.com

全国新华书店经销 广西民族语文印刷厂印刷

*

开本 890×1240 1/32 5.5 印张 150 千字

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—5 000 册

ISBN 7-5435-4707-4/G·3763 定价: 12.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与承印厂联系调换

前言

本书是作为小学教师教育“数学课程与教学论”课程的辅助教材编写的。所谓“数学课程与教学论”，无非是研究用于教育的数学及其教与学的问题，是数学教师专业教育与专业发展的重要课程。有观点认为，数学教师的本体性知识^①一旦确定，对数学教学起决定作用的将是条件性知识^②和实践性知识。这种认识的思想基础是：作为教育的数学是一成不变的，只需要对其进行所谓教学法的加工。实质上，它是将数学与教育割裂开来，把数学教育简单地视为“数学+教育学”，并且将研究的重心偏离到了教育学一方。

笔者曾经用下面三个问题对小学数学教师作访谈调查：

(1) 等底等高的圆柱和圆锥分别可以视为长方形和直角三角形(直角三角形的两条直角边的长度分别等于长方形的长和宽)绕一条边旋转而成，这里的直角三角形的面积显然是长方形面积的 $\frac{1}{2}$ ，旋转之后圆锥和圆柱的体积之间的倍数关系为什么不是 $\frac{1}{2}$ ，而是 $\frac{1}{3}$ 了呢？

(2) 解答下面两个问题的算式是一样的，你能看出这两个问题是一样的吗？

● 已知甲数的3倍等于15，求甲数。

● 已知甲数的3倍等于乙数的15倍，问甲数是乙数的多少倍？

① 即数学知识。

② 指的是教育学和心理学知识。

(3) 课堂语言中经常说“找规律”，那么“找规律”实际上是什么？

第一个问题是小学生学习圆锥体积公式时普遍感到困惑的；第二个问题体现的是小学中、高年级知识的关系；第三个问题实际是对数学的理解。调查的结果是，无一能够给出满意的回答。

作为数学教师，不能回答学生提出的问题，不了解学生已有知识和新知识之间的关系，对所教的数学没有足够的理解和认识，应该视为教师数学教育的失败。

作为数学教师，自然离不开教育学、心理学的知识，同时也离不开哲学、语言学、历史、艺术等学科。所有这些知识都应该融入到数学之中，数学应该成为“数学课程与教学论”的真实重心。

本书以小学数学中的“问题”作为切入点，重点讨论三个方面的内容：

1. 什么是问题？
2. 解决问题的方法是从哪里来的？
3. 解决问题有什么用处？

旨在帮助读者站在更高的层次审视问题和问题解决，进而提高自身素质、教学水平和研究能力。鉴于这方面的研究在我国尚不多见，加之作者水平所限，良好初衷得以实现与否，企盼读者及同行的评鉴。

全书共六章。第一章、第二章和第三章由郜舒竹编写，第四章、第五章和第六章由刘长红编写。

作者

于首都师范大学

目录

第一章 问题与问题解决概述.....	1
第一节 西方数学教育回眸.....	1
第二节 “问题解决”的缘起	7
第三节 “问题”的理解	10
第四节 “问题解决”的数学观	17
第二章 问题间的普遍联系	30
第一节 问题的背景	30
第二节 等价的问题	36
第三节 问题链	45
第四节 问题的演变	52
第三章 数学问题的解决	58
第一节 波利亚问题解决“四步曲”	58
第二节 问题解决的要素	68
第三节 问题解决中的矛盾分析	79
第四节 问题解决与数学发现	86
第四章 教师的问题观	96
第一节 成为解题高手	97

第二节 挖掘问题的教育功能	106
第三节 解题之后回头看	110
第四节 问题的发现与创造	118
第五章 “问题解决”的教学观	123
第一节 问题解决与知识建构	126
第二节 问题解决与数学思考	131
第三节 问题解决与教师角色	137
第六章 小学数学问题的评价	141
第一节 评价的意义	142
第二节 评价的标准	145
第三节 “好题”赏析	149



第一章 问题与问题解决概述

第一节 西方数学教育回眸

一、20 世纪以前

追溯对于西方数学教育影响最大的,莫过于古希腊。比如,众所周知的古希腊哲学家柏拉图(Plato,约前 427—前 347),同时也是一位杰出的数学教育家,在他所创办的学园门口刻着他的格言:“不懂几何者不得入内!”这并非是对所谓不懂几何者的歧视,而是体现了对数学的崇尚。古希腊的数学、科学和哲学都是以“学派”发展起来的,“学派”也是一种教育团体,其主要学者都给人讲学。柏拉图学派培育了欧多克斯(Eudoxus)、欧几里得(Euclid)、梅内克莫斯(Menachmus)等一批数学家。

毕达哥拉斯(Pythagoras)学派把数学分为四大科:算术、几何、天文、音乐,这是人类第一次把数学按其研究的内容进行的分科。公元 4 世纪后,罗马帝国开始被宗教神学垄断,直至文艺复兴时期,数学教育才有了新的发展。英国的数学教育家雷科德(Robert Recorde)写成算术、几何、代数等一系列的数学教科书,奠定了之后几百年间数学教育的基本内容,将数学教育从教会中解救出来。

19 世纪末,随着科学技术的迅猛发展,资本主义逐步发展到帝国主义阶段,这也是知识快速发展的一个阶段。科技的发展迫切需要培养新型的技术人才和劳动者,从而促使了教育体制的改革。当时的英国,经济飞速发展,被称作“世界银行”、“世界工厂”。世界范围内的首次数学教育改革由此



开始,其代表人物首推英国的培利(J. Perry, 1850—1920)和德国的克莱因(F. Klein, 1849—1925)。

1901年,培利在题为《数学的教学》(*Discussion on the Teaching of Mathematics*)的著名报告中,针对传统数学教育的诸多弊端,提出了数学教育改革的鲜明主张:

- 要从欧几里得《几何原本》的束缚中解脱出来;
- 给予实验几何充分的重视;
- 重视实际的测量问题和近似计算的问题;
- 充分利用坐标纸;
- 增加立体几何(包括画法几何)的内容;
- 更多地利用几何直观;
- 尽早引入“微积分”的知识。

这些主张给当时保守的英国数学教育以强烈冲击。为了说明这些主张,培利还论述了数学教育的作用以及数学教育的目标和意义:

- 通过数学教育培养高尚情操和愉悦的心情;
- 通过启发学生的主动思考,培养逻辑思维能力;
- 使学生认识到数学是学习、研究自然科学的有力武器;
- 通过学生亲身动手实验,训练数学技能;
- 让每个学生都能像运用自己的手脚那样运用数学逻辑进行思考,这样将会终身受益,不断进步;
- 教育学生主动地探求事物本身的规律,不固执己见,也不盲从权威;
- 让从事应用科学的人懂得,数学是应用科学的基础,数学能够促进应用科学的发展;
- 为了防止哲学空洞、抽象的发展,数学应该成为哲学思考的基础,能够给哲学研究者提供迅速、准确的逻辑思维方法。

在数学教学方法方面,培利反对“学究式”的教学(也就是把数学的过程描述为空洞的逻辑推理的过程),提倡结合实际问题的过程进而激发学生学习的教学方式。

在数学学习过程方面,培利提倡积极主动、独立思考的学习方式。



他说:“按我的经验,一般的人都可以成为知识的发现者和创造者,而且这种锻炼越早越好。对于简单的事物,与其教师指出,不如让学生自己去发现。这样,学生就会体会到数学的价值以及自身的价值。这样的训练将使学生终身受益。”

培利关于数学教育的观点,对许多国家的数学教育改革起到了积极的推动作用。

1902年,美国数学会主席摩尔(E. H. Moore, 1862—1932)提出“统一数学”的观点,即把中小学数学的诸多学科融合在一起。在数学教学方法上,他还提倡“实验室式”的教学方法。

1904年,德国著名数学家克莱因开始发表数学教育的观点并著书立说,于1907年出版《中等学校的数学教育讲义》,1908年出版《高观点下的初等数学》。这两本书被公认为数学教育的经典著作。克莱因倡导用函数概念统一作为教育的数学,他在上述著作中指出:“我确信,几何形式的函数概念应该成为数学教育的灵魂。以函数概念为中心,将全部数学内容集中在它的周围,进行充分的综合。”这种数学教育的思想和方法对各国数学教育的影响意义极为深远。

这一次世界范围的数学教育改革运动成为20世纪历次数学教育改革的前导,后来人们称之为“培利运动”或“培利—克莱因运动”。

二、美国的进步主义教育

美国的进步主义教育(Progressive Education)兴起于19世纪末,美国实用主义哲学家约翰·杜威(John Dewey, 1859—1952)是其主要代表人物。进步主义的教育观点是针对20世纪以前的“传统教育”提出的,认为“传统教育”远离生活,不适应美国现实的需要,有三个主要弊端:

第一,“传统教育”传授过时、过死的知识,这种知识以固定教材的形式提供给学生,教师照本宣科,学生死记硬背;

第二,“传统教育”按照传统的道德规范去训练学生;



第三,实施“传统教育”的教师是传授知识和技能以及实施行为准则的代理人。

根据杜威的观点,古希腊人推崇永恒不变的知识作为课程内容,是由当时人们“崇尚永恒”的文化背景决定的。古代科技不发达,面对众多的未解之谜,人们感受到自然的威胁,而寻求解脱的方式通常有两种:一是和解的方式,即祈祷、献祭等取悦于对方的方式,或奉献虔诚与忠实的内心;另一种是用行动改变外界,即发明许多技艺。他们排斥实际活动的一个显著理由,就是实际活动具有不确定性。所以人们的推断理智思维所能达到的境界,才是他们所要追求的安全避难所。因此,当时的数学知识也是脱离现实生活的。

进步主义认为教育的主要内容应该是表现个性、培养个性、反对灌输,以自由活动取代外部约束;主张从经验中学习,反对从教科书和教师中学习;主张各种技能、技巧能够满足直接的需要,反对以训练的方法获得孤立的技能和技巧;教育同现实需要相适应,反对为遥远的未来做准备;让学生熟悉变化中的世界,反对固定不变的目标和教材。他们提出“经验的学习”、“教育即生活”、“教育过程即生长过程”等口号。

另外,进步主义还试图突破“工具主义”的数学观^①,认为如果数学只是一种工具,那么儿童在受教育阶段就不是真实地生活着,而是为了将来成人的生活而生活着,眼前的生活是虚幻的。这显然不符合儿童的实际生活需要,要突破这种工具意义上的数学,就必须向儿童的实际生活靠拢。杜威认为,人要生存就不能不活动,活动是人能维持生活的起码条件。数学不仅是一种工具,更应该是贴近儿童生活的活动,通过活动获得经验,获得有用的数学知识^②。

三、新数学运动与回到基础

1957年10月4日,苏联成功发射第一颗人造卫星,引起美国的极

① 参见本章第四节。

② 这里的“有用的数学知识”系指生活中的直接应用,显然忽略了数学的理性价值。



大震惊。美国政府经过反省后普遍认为,美国的数学和科学教育水平已经落后于苏联,必须立即开始数学教育的改革。自此,一场有史以来规模最大的数学教育现代化运动——新数学运动(New Math),在世界范围内拉开了帷幕。

从 1958 年到 1962 年,一系列国际数学教育会议先后召开,旨在完成数学教育现代化运动的准备、发动工作。会议集中指出传统数学教育的诸多弊端,概括为如下六条:

- 数学教育中缺乏近、现代的数学思想和方法。
- 数学教育的内容陈旧,基本上沿袭 16 世纪前后的内容,特别是几何,基本上是 2000 多年前《几何原本》的翻版。
- 数学内容的编排体系零散,各个学科各自为政、互不联系,缺乏共同的理论基础。
- 过分强调繁琐的计算和技巧,使得学生学到的数学脱离实际,收效甚微。
- 教学方法单调。长期以来数学教学方法形成了划一的模式,即以粉笔、黑板作为工具,教师以讲授为主,所有内容几乎都遵循“定义、定理、例题、作业”的模式进行教学,偏重演绎,忽视归纳。
- 大学、中学、小学相互脱节。

自 1962 年至 1970 年,以美国为首,包括欧洲、东南亚的许多国家纷纷开始实施数学教育现代化运动。各个国家制定的大纲、教材以及所采用的教学方法种类繁多、各具特色,其共同特点可以概括为如下几点:

- 课程内容结构化。以近代数学中集合、关系、映射、运算、群、环、域、向量空间的代数结构为主线,把初等数学统一起来。
- 强调公理方法。认为代数也应该像几何那样公理化和系统化。
- 增加现代数学内容,集合、逻辑、群环域、矩阵、向量、微积分、概率统计、计算机科学等内容在许多教材中都有反映。
- 淡化几何,强化代数。认为原来的欧几里得几何的公理体系是不严谨的,与其用不严谨的欧几里得的公理体系训练学生的思维,还



不如用数理逻辑、集合论等来训练学生的思维。几何知识可以通过实验几何、解析几何获得。

●精简传统数学课程内容。因为需要引进近、现代数学内容,必然需要对传统内容删减。欧几里得几何内容删减最多,其次是三角恒等式等内容。

●教学方法多样化。追求教学手段的现代化,强调趣味性和直观性,提倡发现法。

从各国改革的程度上看,大致可以分为三种类型。

类型1:以美国为首的一些西方国家,改革力度最大,所编教材力求达到上述的所有要求。

类型2:基本保留传统教材的体系,适当增加一些现代数学的内容。苏联是这一类型的代表。

类型3:介于前两种类型之间的“中间型”。打破了单科独进的传统教学方式,将传统课程内容重新组合并适当增加新内容编排。

新数学运动使得世界上大部分国家的数学教育面貌发生了巨大变化,联合国教科文组织认为这种变化的意义可以概括为以下几方面:

●数学成为一个开放体系呈现于学生面前。

●学生对使用的方法有明晰的概念,对归纳法和演绎法的互补作用有所认识。

●学生学习数学的动机源自内部需要,即兴趣。

●学生在学习的过程中从被动地听解释,变为主动地参与问答。

●课堂教学的组织形式更为多样、灵活。

●数学知识以螺旋上升的方式呈现。

●大量运用图像和直观传播物,引出了“数学心理学”的研究。

新数学运动是社会发展的要求,是历史的必然。但在实践的过程中,不可避免地出现了种种问题,比如:

●由于过分强调公理化和严谨性,导致学生计算能力的削弱。同时由于许多内容学生难以接受,因此新数学运动表现为数学教育质量



下降。

●贯穿新数学运动的课程内容的集合论过于抽象,学生很难理解。

●数学教师的水平没有及时跟上,导致实际教学中出现许多形式主义的现象。

由于此类问题不断涌现,20世纪70年代以后,对新数学运动的批评愈演愈烈,“回到基础(Back to the Basics)”的呼声最终使得新数学运动销声匿迹。

虽然新数学运动的实际效果并不理想,但是“回到基础”并不意味着对新数学运动的全盘否定,更加不是要回到“旧数学”。暂时的曲折并不能说明改革的不必要。事实证明,新数学运动对今后数学教育的发展仍具有不可估量的积极意义。

第二节 “问题解决”的缘起

一、数学教育的困境

培利—克莱因运动以及美国的进步主义教育无疑对20世纪以前的“传统教育”作了彻头彻尾的批判。然而这虽然符合了儿童的生活需要,却没有满足社会对数学教育的需求。本来杜威并不是没有考虑社会需求,他竭力批判传统教育的二元论,即在个人与社会之间取舍的做法,希望消除二元论,在个人与社会之间寻求一种平衡,但当进步主义的推行者们将之推行于数学教育的实践时,却将支撑点放在了与传统教育相反的一侧,即儿童一侧,于是杜威向往的平衡很快被打破了。

新数学运动试图克服进步主义的弊端,却忽略了学生认知水平及身心发展的特点。某种意义上它又回到了进步主义教育所批判的“传统教育”,这一历程恰好体现了“肯定—否定—否定之否定”的基本规律。至此,数学教育陷入了困境。

既不能把数学看做是玄之又玄的理性知识,也不能认为一切数学



知识都与儿童的生活经验相联系。如果所有数学的学习都必须通过生活经验来获得,那么必然大大影响人类获取知识的进程,违背了人类社会的效率需求。数学作为一门古老的学科,必然有区别于人类简单活动的一面。

由此看出,数学教育的基本矛盾集中体现于“数学”与“教育”的对立上。为了寻求数学教育新的发展,必须协调这一矛盾,因此人们开始重新思考数学教育的基本问题:数学教育的内容究竟应该是什么?即“数学是什么(What is mathematics)?”当然,这一问题就不是进步主义教育家们所能回答的了。

二、问题解决的缘起

1920年以前,美国的数学教育主要受进步主义教育思想的影响,数学教育改革的观点也主要来自教育家。1920年全美数学教师协会(NCTM)^①成立,首任主席明确提出:“要确保数学在教育界的价值和利益,数学课程的研究、改革和调整应由数学教师来完成,而不是教育改革者。”

继“新数学运动”和“回到基础”之后,人们普遍看到数学教育的质量走向衰落。其间有报告数字显示美国人学习数学和科学的比例正在下降,学校的要求和大学入学的标准正在降低。其中有两份著名的报告,其一为《国家在危机中》(*A Nation at Risk*)。这是一份总结性的教育改革文件,描述了一系列的教育危机和各种教育观点,特别指出了数学教育的缺陷。此文件是经过民众调查提出的,其中提到了民众对学校教育质量的不满,提出了对教师以及教科书的要求,呼吁制定学校数学^②的标准。另一份报告为1980年4月NCTM发表的题为《行动纲领》(*An Agenda for Action*)的文件。文中针对数学教育提出了八条建议,其中第一条指出:

① National Council of Teachers of Mathematics

② 即教育数学,英译为 School Mathematics。



“问题解决应该成为 80 年代学校数学的中心。”^①

这一口号的提出,在世界范围内引起了极大的反响。人们似乎看到了数学教育新的出路。在这一观念的引领下,为了统一规范美国各州的数学教育水平,NCTM 开始着手研制相关文件,并于 1989 年发布了《学校数学的课程与评估标准》^②,1991 年发布了《数学教学的专业标准》^③,1995 年发布了《学校数学的评价标准》^④。这三份文件出台后不久,1997 年 NCTM 又成立了由数学教师、教育专家、数学专家组成的写作组,着手编写统一的新标准。编写的原则确定为:

- 为前面出台的三个标准建立统一的基础。
- 对前面三个标准中与课堂教学有关的内容进行整合。
- 把 K12 重组为 4 个学段。第一学段:幼儿园到 2 年级;第二学段:3 年级到 5 年级;第三学段:6 年级到 8 年级;第四学段:9 年级到 12 年级。

新标准最后定名为《学校数学的原则与标准》^⑤(简称《美国 2000 标准》),共 8 章,402 页,于 2000 年正式公布。标准中规定了问题解决的四项目标:

1. 通过问题解决建构新的数学知识^⑥;
2. 解决数学和其他学科中出现的问题^⑦;
3. 选择和应用各种恰当的策略解决问题^⑧;
4. 监控并反思问题解决的过程^⑨。

① Problem Solving should be the focus of School Mathematics.

② Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics

③ Professional Standards for Teaching Mathematics

④ Assessment Standards for School Mathematics

⑤ Principles and Standards for School Mathematics

⑥ Build new mathematical knowledge through problem solving.

⑦ Solve problems that arise in mathematics and in other contexts.

⑧ Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems.

⑨ Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving.



第三节 “问题”的理解

由于“问题解决”是英语“Problem Solving”的译文,因此我国数学教育领域广泛使用的“问题解决”或“解决问题”等概念,实质上是中西融合的产物,已经在通常意义的基础上有了较大发展。值得注意的是,融合能够促进发展,同时也会导致冲突,这种冲突在此集中体现于理解方面的差异以及概念界定方面的混乱。因此,对有关概念做一全面的了解和统一的界定就显得十分必要了。本节重点讨论与这些概念密切相关的核心词汇——问题。

一、通常意义下“问题”的涵义

“问题”一词,在我国《现代汉语词典》中的释义有四条,其中与本书内容相关的有两条:

- 要求回答或解释的题目。
- 须要研究讨论并加以解决的矛盾、疑难。

第一条释义更接近英语中“question”的涵义。比如说教师向学生的“提问”,学生向教师提出的“问题”等,都可以归为此。这一释义比较强调问题的客观性和常规性,忽略问题解决者的主动性以及解决问题的能力。第二条释义比较接近英语中的“problem”,但这一释义似乎更偏重工作实践领域的范畴,强调的是解决问题的结果,并不是指学习者所面临的那种问题。比如“在西部开发的过程中,要注意解决好生态环境保护的问题”这句话中的“问题”就应该属于这一释义。

由此看来,通常意义下“问题”的涵义与我们所理解的“问题解决”中“问题”的涵义出入较大。

二、心理学领域中“问题”的涵义

“问题解决”是心理学研究人类学习过程的老课题。不同的心理学派对“问题”和“问题解决”持不同的观点。