数学分析（二）

数学分析

第二册

（試用教材）

华中师范学院数学系

一九七二年九月

目　　录

毛主席语录

要完全地反映整个的事物，反映事物的本质，反映事物的内部規律性，就必須經过思考作用，将丰富的感覺材料加以去粗取精、去伪存眞、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理論的系統，就必須从感性认識跃进到理性认識。

第五章 分析基础

数学是从人类的需要中产生的，是从实践中抽象出来的关于“**現实世界的空間形式和数量关系**”的规律的科学．我们都知道数是刻划量的特征的，人们在生产实践中逐渐地了解到用数去刻划量．关于数大家都清楚，象$1,2,3,\cdots$这样的数叫做自然数或正整数，象$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$ $\cdots\frac{m}{n}$（n，m是自然数）叫做分数．假如我们已经知道了正负整数、正负分数和零，我们把全体整数、分数和零叫做有理数集*．这些数是否够我们描述客观实际中所碰到的量呢？这个问题对于数学及现代化的科学技术来说都具有很大的意义．例如在测量长度时我们就会碰

* 集就是表示满足某种条件的事物的全体或总和的意思，数集就是数的全体或总和．

到只有上述的有理数是不够的，大家都知道，边长为1个单位的等腰直角三角形斜边长就不是有理数（根据勾股定理可知斜边长的平方为2．在第一节中将证明平方等于2的有理数是不存在的）；又如我们在研究图形的面积时也同样有这种情形，半径为1个单位的圆面积不是有理数．如果我们只限于在有理数集内研究问题，那么我们就只能说，边长为1个单位的等腰直角三角形的斜边长是不存在的，半径为1个单位的圆面积是不存在的，这是无论如何我们也不能承认的．因此客观实际本身不允许我们只限于停留在有理数集的范围内，而促使我们增添一类新数．

我们在学习数学分析第一册时清楚地看到，极限是数学分析中研究问题的有力工具，而极限概念与数集的性质有关．在第二章里，我们不加证明的叙述了单调有界变量有极限和连续函数的一些基本性质，这些命题的正确性都是以研究所谓实数和它的重要性质为基础的，为了更深刻的掌握数学分析的基本概念，本章我们从度量的角度出发描述实数的产生和发展，研究实数的若干重要性质，并在此基础上证明上述基本命题．

第一节　实数的描述

一、实数的概念

1.　*度量与有理数*

由于数物体的个数产生了自然数：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

但是在人们的社会实践中不仅需要数物体的数量，而且还需要度量其它的量，如长度、面积、重量、时间、温度等等．关于量的比较，开始人们是直接比较同类中两个量的大小、长短等等．随着生产经验的逐步积累，人们的认识也不断的深化，从直接比较同类的两个量，发展到把某一类量与同类中的一个固定的量相比较，这个固定的量叫做

度量单位(如米、尺；平方米、平方尺；斤、公斤；分、秒等等). 度量单位规定为1，以它为标准与其它的量相比较，看它包含多少个度量单位，这样一来，度量的结果，每一个量就都对应着一个数，即将度量问题转化为计数问题了. 下面以度量线段的长度为例具体地说明这一过程.

现在来度量线段 OP 的长度，取 OE 为单位长，这时会遇到下列情况：

(1) 线段 OE 恰好在线段 OP 上量 p 次，即线段 OP 包含 p 个单位长. 此时我们说 OP 的长度是 p 个单位，并用整数 p 表示 OP 的长（图 5-1）.

图 5-1

(2) 线段 OE 在 OP 上量 p 次后，还剩下小于 OE 的一段 AP (图5-2)，即线段 OP 在单位线段 OE 的两个相邻的整倍数 p 和 $p+1$ 之间，因而线段 OP 之长再不能用整数表示了. 在这种情况下，为满足度量的需要，产生了分数. 将原来的单位长 OE 分成 n 等分，再以其中的一个等分作为新的单位，其长度记作$\frac{1}{n}$，如果线段 OP 恰好包含着 m 个新的单位长，则将 OP 的长度记作$\frac{m}{n}$，这里 m，n 都是正整数，数$\frac{m}{n}$叫做分数.

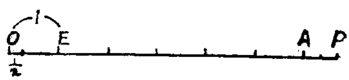

图 5-2

如果将单位线段 OE 分成 n 等分后，线段 OP 恰好包含 OE 的 $\frac{1}{n}$ 的 m 倍，则说线段 OP 与单位线段 OE 是可公度的（或可通约的）. 因为这时存在着一个新的公度单位 $\frac{OE}{n}$，它 n 倍后得 OE，m 倍后得 OP. 于是数 $\frac{m}{n}$ 表示单位长是 OE，线段 OP 与 OE 可公度时，OP的长度.

一般地，把形如 $\frac{m}{n}$ (m，n 是正整数)的数叫做有理数. 仅有正有理

数还远远不能满足需要，出现了负有理数，负有理数 $-\frac{n}{m}$ 代表与 $\frac{n}{m}$ 相反方向的量.

有理数可用直线上的点来表示，这是我们早已熟悉的了. 需要补充说明的是：因为任何两个有理数 $a<b$ 之间存在着无穷多个有理数，例如，$a_1=\frac{1}{2}(a+b)$，$a_2=\frac{1}{2}(a+a_1)$，$a_3=\frac{1}{2}(a+a_2)$，… 等等，所以，相应地，数轴上任何两个有理点之间，都有无穷多个有理点存在，因此我们说有理点在数轴上是处处稠密的.

2. 无公度线段与无理数

当确定了度量单位之后，凡与单位线段可公度的线段的长都可用有理数表示，那么，是不是所有线段都与单位线段可公度呢？换句话说，当度量单位确定了之后，有理数就足够表示所有线段的长度了吗？其实不然，还有与单位线段无公度的线段存在.

正方形的对角线与它的边无公度. 为确定起见，取边为单位长的正方形，对角线长记作 x，根据勾股定理，有

$$x^2=1^2+1^2=2$$

或

$$x=\sqrt{2}.$$

假若对角线与边可公度，根据上述，$x=\sqrt{2}$ 应该是有理数，因此，我们要证明对角线与边无公度只需证明 x 不是有理数就够了. 用反证法，假定 x 可以表示成既约分数 $\frac{p}{q}$（自然数 p 与 q 无公因子），则有

$$x^2=\frac{p^2}{q^2} \qquad 或 \qquad p^2=2q^2,$$

等号右边是偶数，因而等号左边，即 p^2 也应当是偶数，又因为奇数的平方仍为奇数，所以 p 是偶数，将它写作 $p=2r$，就有

$$(2r)^2=2q^2 \qquad 或 \qquad 2r^2=q^2$$

这又说明了 q 也应当是偶数. 于是 p 与 q 均能被 2 整除，这与 $\frac{p}{q}$ 是既

约分数的假定相矛盾，即假定 $x=\sqrt{2}$ 是有理数是不合理的. 所以正方形的对角线与其边无公度.

在数轴上以原点为起点用圆规截取长度等于$\sqrt{2}$ 的线段 OP（图 5-3)，则 P 点将不会与任何有理点重合. 这就是说，有理点在数轴上虽然是处处稠密的，但却沒有布满整个数轴，它们中间还有空隙. 或者说，数轴上除有理点外，还有另外的点存在.

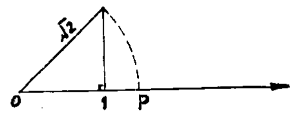

图 5-3

我们还可以找出其他很多与单位长无公度的线段来.

如同用有理数表示与单位可公度线段的长一样，我们用一种新的数——无理数代表与单位无公度线段的长度.

若在数轴上，以原点为起点，向右截与单位无公度的线段 OQ，那么这个线段的端点 Q 就对应着一个无理数——OQ 的长度，对应于无理数的点叫无理点. 若自原点向左截，得线段 OQ，则 Q点所对应的数叫负无理数. 因为数轴上的任何一点 P 与原点 O 所确定的线段 OP，或者与单位长可公度，或者与单位长无公度，二者必居其一. 所以数轴上的点，不是有理点便是无理点，也就是说，有理点和无理点填满了整个数轴，其间已再沒有空隙了.

无理数代表与单位无公度线段的长. 这样来描述无理数，只能表明无理数的客观存在性，还不能表明无理数究竟是什么样的数. 所以，还需作深入的讨论.

3. 无限小数及无理数

现在我们来研究有理数的十进小数表示，在此基础上给出无理数的定义，仍然从度量及数的几何表示出发.

我们知道，在数轴上用单位长自原点（对应于数 0 ）开始一段接一段地的往右量，就得到了正整数 1, 2, 3, …所对应的点. 向左量便得到负整数 -1, -2, …所对应的点（图 5-4）.

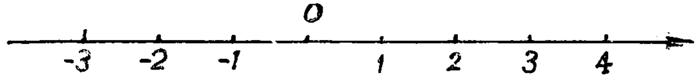

图 5-4

若将单位分成 10 等分，取其中一份的长作新单位同样地再去量，例如在整数 p 和 $p+1$ 所对应的点之间，得到与数

$$p+\frac{1}{10},\quad p+\frac{2}{10},\quad \cdots,\quad p+\frac{9}{10}$$

相应的一些点．再将原单位分成 100 等分，取其中一份长 $\frac{1}{10^2}$ 作新的单位再去量，例如在 $p+\frac{p_1}{10}$ 与 $p+\frac{p_1+1}{10}$ 所对应的点之间得到与数

$$p+\frac{p_1}{10}+\frac{1}{10^2},\quad p+\frac{p_1}{10}+\frac{2}{10^2},\quad \cdots,\quad p+\frac{p_1}{10}+\frac{9}{10^2}$$

相应的点，其中 p_1 是整数，且 $0\leqslant p_1\leqslant 9$．如此，依次将原单位缩小成 $\frac{1}{10^3}$，$\frac{1}{10^4}$，…，$\frac{1}{10^n}$，即得与数

$$p+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}\qquad 0\leqslant p_n\leqslant 9,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

相应的点．这样的数显然是有理数，简记为 $p.p_1p_2\cdots p_n$ 称为有限十进小数．

有限十进小数 $p.p_1p_2\cdots p_n$ 是一种特殊的分数，它的分母是 10^n，因此并不是每一个有理数都能表成有限十进小数，例如 $\frac{1}{3}=0.333\cdots$ 就不是有限小数．

在数轴上取不与有限十进小数相对应的点 α，例如无理点或有理点 $\frac{1}{3}$ 等等．由于它不能与有限十进小数对应的点重合，设它落在

$$p.p_1p_2\cdots p_n \quad 与 \quad p.p_1p_2\cdots p_n+\frac{1}{10^n}$$

之间，即

$$p.p_1p_2\cdots p_n<\alpha<p.p_1p_2\cdots p_n+\frac{1}{10^n}$$

这时 $p.p_1p_2\cdots p_n$ 叫做数 α 的精确到$\frac{1}{10^n}$的不足近似值，$p.p_1p_2\cdots p_n+\frac{1}{10^n}$叫做数 α 的精确到$\frac{1}{10^n}$的过剩近似值．譬如

$$1^2=1<2<2^2=4$$
$$(1.4)^2=1.96<2<(1.5)^2=2.25$$
$$(1.41)^2=1.9881<2<(1.42)^2=2.0264$$
$$(1.414)^2=1.999396<2<(1.415)^2=2.002225$$

等等．这样就得到$\sqrt{2}$的精确到 1 至 $\frac{1}{10^3}$ 的不足与过剩近似值：

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414;$$
$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415.$$

再把原单位分成 10^{n+1} 等分，其新单位为 $\frac{1}{10^{n+1}}$．又有

$$p.p_1p_2\cdots p_{n+1}<\alpha<p.p_1p_2\cdots p_{n+1}+\frac{1}{10^{n+1}}\qquad(0\leqslant p_{n+1}\leqslant 9)$$

这样一步步地作下去，这个手续给出了一个无限小数

$$p.p_1p_2\cdots p_n\cdots$$

这样的无限小数什么时候代表有理数呢？为了回答这个问题，这里先举个例子，

例 将 $\frac{40}{11}$ 化成小数．用 11 除 40 得

$$\begin{array}{r|l} 40 & \ 11 \\ \underline{33\ \ } & \ 3.63 \\ 70 & \\ \underline{66} & \\ 40 & \\ \underline{33} & \\ 7 & \end{array}$$

这个余数与第一个余数相同，都是 7，所以再继续除下去，所得的商必然是 6，3；6，3 循环的出现，于是

$$\frac{40}{11}=3.6363\cdots$$

如果在一无限小数中，从小数点后某一位起，就是同一组数字循环的出现，那么这个小数就叫循环小数．循环的这组数字叫循环节．如 3.6363…，就是循环节为 63 的循环小数．

下面来证一般情形：每一有理数 $\dfrac{m}{n}$ 都是循环小数．

在证明之前首先注意，将 $\dfrac{40}{11}$ 化成小数的除法过程也可以写成如下的形式：

$$
\begin{aligned}
& \quad\ (\text{商})(\text{余数})\\
40 &= 3\cdot 11+7\\
10\cdot 7 &= 6\cdot 11+4\\
10\cdot 4 &= 3\cdot 11+7\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

下面的证明就是这个过程的一般情况．

証　用 n 除 m，得商数 a，余数 r_1；用 10 乘 r_1，再用 n 除，得商 a_1，余数 r_2；用 10 乘 r_2，除以 n，得商数 a_2，余数 r_3；依次作下去，用式子表示就是

$$
\begin{aligned}
m &= an+r_1, & 0 &\leqslant r_1<n\\
10r_1 &= a_1n+r_2, & 0 &\leqslant r_2<n\\
10r_2 &= a_2n+r_3, & 0 &\leqslant r_3<n\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

或

$$\frac{m}{n}=a+\frac{r_1}{n}$$

$$\frac{r_1}{n}=\frac{a_1}{10}+\frac{r_2}{10n}$$

$$\frac{r_2}{n}=\frac{a_2}{10}+\frac{r_3}{10n}$$

$$\cdots\cdots$$

从而有

$$\frac{m}{n}=a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots$$

$$=a.\ a_1a_2\cdots \qquad (1)$$

这就将$\frac{m}{n}$化成小数了.

由于诸余数 r_1, r_2, $\cdots r_n\cdots$都在0与$n-1$之间，至多能有n个不同，即在n次除法內，必有某一余数r_k重覆出现，设$r_{k+l}=r_k$，那末它们乘以10用n除所得的商与余数亦应相等，即

$$\begin{array}{ll} r_{k+l+1}=r_{k+1}, & a_{k+l+1}=a_{k+1} \\ r_{k+l+2}=r_{k+2}, & a_{k+l+2}=a_{k+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{k+2l-1}=r_{k+l-1}, & a_{k+2l-1}=a_{k+l-1} \\ r_{k+2l}=r_{k+l}=r_k, & a_{k+2l}=a_{k+l}=a_k. \end{array}$$

所以在小数(1)中数字

$$a_k,\ a_{k+1},\ \cdots a_{k+l-1}$$

总是周期的循环出现，这便证明了(1)是循环小数.

若在除法过程中某一余数是零，那么(1)是有限小数，它可以看做是从小数点后某一位起都是零的循环小数.

根据以上讨论得知无限小数

$$p.p_1p_2\cdots p_n\cdots$$

可以分成两类：

(1) 循环小数；

(2) 不循环小数.

因为有理数是循环小数，反之每一循环小数都是有理数（见第六章），所以循环小数表示有理数. 对于不循环的无限小数，我们给出如下的定义：

定义 无限不循环小数叫无理数.

例如

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$$

$$\pi = 3.14159\cdots\cdots$$

$$e = 2.71828\cdots\cdots$$

都是无理数．

全体有理数与无理数统称实数．实数与直线上的点成一一对应．

二、实数的連續性

我们都知道，一条直线是连续的，因为它在任何地方都不间断．而实数与直线上的点又是一一对应的，所以像直线一样，实数也有连续性；有理数就沒有这种连续性，因为在数轴上有理点之间还有空隙．为了从理论上阐述实数的连续性，先引进数集合确界的概念．

定义 设 E 是一个数集（有限个或无限个实数）．如果能找到一个数 M，使数集 E 中的一切数 x 满足 $x \leqslant M$（或 $x \geqslant M$），那么叫数集 E 是有上（下）界，如果数集 E 既有上界同时又有下界，那么叫数集 E 为有界数集．

例 1 一切眞分数所成的数集是有界的．

因为一切眞分数 x 都小于数 1 大于数 -1，所以数 1 是一切眞分数的上界，-1 是它的下界，故一切眞分数所成的数集是有界的．

例 2 一切自然数所成的数集是有下界而无上界的．

例 3 一切整数所成的数集既无上界又无下界．

例 4 满足不等式 $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ 的实数 x 所成数集是有界的．

例5 满足不等式 $1 < \frac{m}{n} < \sqrt{3}$ 的有理数 $\frac{m}{n}$ 所成数集是有界的．

分析上面几个例子，我们可以看出，如果一个数集有上（下）界，那么必有无穷多个数是它的上(下)界．如在例 1 中数 1 是一切眞分数所成数集的上界，那么大于 1 的任何实数都是眞分数集的上界．并且在这里我们进一步看出，数 1 是眞分数所成数集的最小上界．例 4，例 5 所指出的数集，$\sqrt{3}$ 就是它的最小上界．这里，最小上界可能属于数集也可能不属于数集．如果最小上界属于数集，那么它是数

集中的最大数，如例4中最小上界 $\sqrt{3}$ 就是数集中的最大数；如果最小上界不属于数集，那么它就是上界中的最小数，如例5中的最小上界 $\sqrt{3}$ 就是这种情况．完全类似地可以讨论最大下界的问题．

对于有限数集（即数集是由有限个数所成）来说，它必有上下界，并且数集中的最大数就是最小上界，数集中的最小数就是它的最大下界．对于无限数集来说，我们就不能比较这无限个数中的大小了，因此代替它的最大数与最小数的作用的将是最小上界与最大下界，为此给出下面的定义．

定义 设数集 E 是有上界的，又实数 β 是数集 E 上界中的最小数，那么称数 β 为数集 E 的上确界，记为

$$\beta=\sup E \quad \text{或} \quad \beta=\sup_{x\in E}\{x\}$$

註：这里用 $E=\{x\}$，x 表示是 E 中的数，记号"$\in$"表示数 x 属于集 E．

数 β 称为数集 E 的上确界，完全相当于数 β 适合于下面的条件：

(1) 对于数集 E 中的一切数 x，都有 $x\leqslant\beta$；

(2) 对于任意小的数 ε* >0，在数集 E 中至少存在有数 x_0，使

$$x_0>\beta-\varepsilon$$

条件（1）说明数 β 是数集 E 的一个上界，条件（2）说明凡是比数 β 小的任何数（$\beta-\varepsilon$）都不是数集 E 的上界，因此，综合这两个条件恰好说明数 β 是数集 E 的最小上界，即数 β 是数集 E 的上确界．

完全类似地可定义数集 E 的下确界 α：

$$\alpha=\inf E \quad \text{或} \quad \alpha=\inf_{x\in E}\{x\}$$

它也完全相当于：

(1) 对于数集 E 中的一切数 x，都有 $x\geqslant\alpha$

---

* ε 是希腊字母，代表任意的小正数，读埃披西隆。

(2) 对于任意小的数 $\varepsilon>0$，在数 E 中至少存在有这样的 x_0，使

$$x_0<\alpha+\varepsilon$$

例 6 证明数集$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$($n$为自然数)上确界为 1下确界为$\frac{1}{2}$.

事实上，(1)数集$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的任何一个数$\frac{n}{n+1}$，都有

$$\frac{n}{n+1}<1$$

(2) 对于任意小的数$\varepsilon>0$，总可以找到数集$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$中的这样的数$\frac{n}{n+1}>1-\varepsilon$. 此时只须取$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$的自然数即可. 故有

$$1=sup\left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

同样，(1)任何数$\frac{n}{n+1}\geqslant\frac{1}{2}$，(2)对于任意小的数$\varepsilon>0$，总可以找到这样的数$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{2}+\varepsilon$，此时取 $n=1$ 即可. 故

$$\frac{1}{2}=inf\left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

分析前面举过的例，不难看出有界数集一定有确界存在，下面来证明这个论断.

定理(确界存在) 如果数集 E 有上(下)界，则它一定存在上(下)确界.

证明的思路是根据确界的概念. 由于确界是一个数，因此根据引入实数的方法找出这个数，其次再来证明这个数是确界.

証明 为了确定起见，只证明上确界情况.

设数集 E 中的数为 $x=q\cdot q_1q_2q_3\cdots q_n\cdots$. 因为数集 E 是有上界的，所以必有这样的整数 p 存在：使 E 中有大于 p 的数，但沒有大

于$p+1$的数（图5-5）.

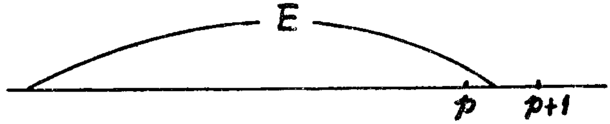

图 5-5

于是把区间$[p, p+1]$用数

$$p.1,\ p.2,\ \cdots,\ p.9, \tag{4}$$

分为10等分，在（4）中取$p+\frac{p_1}{10}=p.p_1$（p_1是从0到9的整数）.使E中有大于$p.p_1$的数，但没有大于$p+\frac{p_1+1}{10}$的数. 再把$\left[p.p_1, p+\frac{p_1+1}{10}\right]$分为10等分，作具有同样特性的区间$\left[p.p_1p_2, p.p_1+\frac{p_2+1}{10^2}\right]$，抓住这个特性，继续作下去将得到数

$$\beta=p.p_1p_2\cdots p_n\cdots \tag{5}$$

（5）中的p_i都是从0到9的整数．数β按我们的作法它具有这样的特性：数集E中有大于数β的不足近似值β_n^-的数，但沒有大于数β的过剩近似值β_n^+的数，现在我们证明数β是数集E的上确界.

事实上，第一，按我们的作法可知，数集E中的一切数x，都满足$x\leqslant\beta$. 如果不然，在数集E中有某个数$x'>\beta$，那么必有（在细分过程中）x'大于数β的过剩近似值β_n^+，此与数β的特性发生矛盾，这个矛盾说明在数集E中沒有大于β的数x'. 故β是数集E的一个上界.

第二，比β小的数β'（$\beta'<\beta$）都不是数集E的上界. 如果不然，数β'是数集E的一个上界，那么必有β的某个不足近似值$\beta_n^->\beta'$，从而β_n^-也就大于数集E中的所有数，此与数β的特性发生矛盾. 这个矛盾说明了凡是比β小的数都不是数集E的上界. 综