

成人高等教育教材

高等数学

(第二册)

吴 满 温向阳 洪潮兴 陈凤平 编

华南理工大学出版社



成人高等教育教材

高等数学

第二册

吴 满 温向阳 编
洪潮兴 陈凤平

华南理工大学出版社

本书是根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“普通高等理工院校成人教育《高等数学》教学基本要求”，并针对成人教育的特点而编写的。

本书分三册出版，本册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、级数与微分方程。

本书内容丰富，叙述详细，且配有大量的例题和习题。除可作为普通高校成人高等教育的教材外，还可作为工程技术人员的参考书。

责任编辑：张巧巧

成人高等教育教材

高等数学

(第二册)

吴 满 温向阳 编
洪潮兴 陈凤平

*

华南理工大学出版社出版发行

(广州 五山)

广东省新华书店经销 华南理工大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 16.5 字数 370 千

1990 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 6 次印刷

印数 25501-30500

ISBN 7-5623-0203-0/O·19

定价：18.00 元

华南理工大学成人教育学院
成人高等教育教材编辑委员会

主 任 张刚能

副主任 吴 满 林社均

编 委 吴 满 许仁铭

陈守颐 罗龙开

刘乃新 韦 东

李诚琚

。同时，还举办了多层次、多规格、多形式的成人高等教育自学考试，并积极开展函授教育。在成人高等教育方面，我校先后开设了机械、电子、计算机、管理、法律、文学、教育、医学、艺术等十多个专业，为社会培养了大批专门人才。成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，是普通高等學校的基本任务之一。

我校在稳步发展全日制本科教育、研究生教育的同时，挖掘潜力，充分发挥学科齐全、师资力量雄厚、办学条件好和经验丰富等优势，为适应社会主义建设的需要，于1957年创办了高等函授教育，继而办起夜大学，发展到1987年经国家教委批准正式成立华南理工大学成人教育学院，统筹管理全校的成人高等教育工作。三十多年来，我校的成人高等教育为广东省、海南省、广西壮族自治区培养了一大批科技人才。特别是党的十一届三中全会以来，我校的成人高等教育主动地适应沿海地区改革开放的需要，面向珠江三角洲经济开发区的市、县、乡镇企业，开展多层次、多形式、多规格的普通专科教育，职业技术教育，大学后的继续教育。从1981年至1989年为广东省培养了本、专科毕业生五千多人；岗位培训、专业技术培训、高等教育自学考试辅导，大学后的继续教育等近两万人。这些学生回到生产和工作岗位后，大部分发挥了骨干作用，不少学生担任了工厂企业的领导、工程师、高级工程师等重要职务，为社会主义建设事业做出了较大的成绩，创造了良好的社会效益与经济效益。教材建设是成人高等教育的重要任务之一，对保证教育质量的提高起着十分重要的作用。几年来，我校组织有教学经验的教师编写了适应成人学习特点的“工业与民用建筑”、“电子技术”、“工业管理工程”等三个专业的系列专科教材和自学

辅导书，为促进提高教育质量起了积极的作用。

为了更好地搞好我校成人高等教育的教材建设，提高教材的质量，有组织、有计划地编写出版质量较高的成人高等教育的教材，特成立“华南理工大学成人教育学院成人高等教育教材编辑委员会”。编辑委员会的任务是：聘请有丰富教学经验的专家、教授有计划地编写成人高等教育教材、自学指导书；挑选国内出版的、质量较高的、适应成人学习的教材。学校和各系领导、华南理工大学出版社以及广大教师对我校“成人高等教育教材编辑委员会”的工作一贯给予热忱的支持，在此一并致谢。

编者的话

本书是根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“普通高等理工院校成人教育《高等数学》教学基本要求”，并参照由国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》、广东省高等教育自学考试各专业的《高等数学》考试大纲编写而成。

在编写过程中，我们吸取了我校成人教育学院组织编写过的几套高等数学教材的优点和长处，总结了编者多年来在成人教育的教学经验和体会，并针对其特点，注意精选内容，突出基本概念、基本理论和基本方法，力求做到概念准确、理论正确、说理清楚、叙述通俗易懂且详简适当。当中注意突出体现教学方法和学习方法，例题广泛，以利读者自学。

本书教材部分分三册。第一册内容有函数与极限、一元函数微分学及一元函数积分学；第二册内容有向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、级数与微分方程；第三册内容有线性代数与概率论，并含题解指导。第一、二册的题解指导以《高等数学题解指导》的名称自成一册。

本书可作为各类成人高等教育院校理工科的本科与专科教材，也可作普通高等学校理工科专科及少学时的本科专业的教材，还可作高等教育自学考试人员应考的主要参考书。在采用本书作教材时，可根据不同层次及不同专业对教学内容进行恰当的选取。

本书由“华南理工大学成人教育学院成人高等教育教材编辑委员会”统一领导组织编写。第一、二册及《高等数学

题解指导》由吴满、温向阳、洪潮兴、陈凤平编写，第三册由洪潮兴、谢满耀、温向阳编写。全书由洪潮兴、温向阳统编定稿，由华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷主审。

尽管编者力求把本书编好的愿望，但由于编者学识有限，书中不免有不足之处，恳请广大读者批评指正。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

本书在编写过程中，曾得到华南理工大学应用数学系研究生数学教研組主任何淑芷教授的指导和帮助，特此致谢。

目 录

第六章 向量代数与空间解析几何	1
§ 6-1 三元线性方程组与三阶行列式	1
一、二元线性方程组与二阶行列式	1
二、三阶行列式与三元线性方程组	4
三、行列式的性质	5
四、三元线性方程组	8
§ 6-2 向量	13
一、向量的概念	13
二、向量的加减法	15
三、数与向量的乘积	17
四、向量在轴上的投影	20
§ 6-3 空间直角坐标系	22
一、空间直角坐标系	23
二、向量的坐标表示	26
三、向量的模与方向余弦	29
四、空间解析几何的基本问题	31
§ 6-4 两个向量的数量积与向量积	34
一、两向量的数量积	34
二、两向量的向量积	39
三、向量的混合积	44
§ 6-5 曲面及其方程	47
一、曲面方程的概念	47
二、球面	48
三、旋转曲面	49

四、柱面.....	51
§ 6-6 空间平面及其方程.....	53
一、平面的点法式方程.....	53
二、平面的一般方程.....	57
三、有关平面的若干问题.....	59
§ 6-7 空间直线方程.....	63
一、空间直线的一般方程.....	63
二、直线的标准方程.....	64
三、两直线夹角.....	67
四、直线与平面的夹角.....	70
五、有关直线与平面相互关系的例题.....	72
§ 6-8 空间曲线及其方程.....	75
一、空间曲线的一般方程.....	75
二、空间曲线的参数方程.....	76
三、空间曲线在坐标平面上的投影.....	78
§ 6-9 二次曲面.....	80
一、椭球面.....	81
二、单叶双曲面.....	82
三、双叶双曲面.....	83
四、椭圆抛物面.....	84
五、双曲抛物面.....	84
习题.....	85
第七章 多元函数微分法	95
§ 7-1 多元函数的基本概念.....	95
一、平面区域.....	95
二、多元函数的概念.....	98
三、二元函数的极限.....	103
四、二元函数的连续性.....	106
§ 7-2 偏导数.....	108

一、偏导数定义及其计算法	108
二、二元函数偏导数的几何意义	114
三、高阶偏导数	115
§ 7-3 全微分及其应用	118
§ 7-4 多元复合函数的求导法则	126
一、复合函数求导法则	126
二、全导数	134
三、复合函数的高阶偏导数	136
四、全微分形式的不变性	140
§ 7-5 隐函数的求导方法	142
§ 7-6 偏导数的几何应用	151
一、空间曲线的切线与法平面	151
二、曲面的切平面与法线	156
§ 7-7 多元函数的极值及其求法	160
一、二元函数的极值	160
二、二元函数的最大、最小值	165
三、条件极值问题	167
习题	171
第八章 重积分	177
§ 8-1 二重积分的概念与性质	177
一、二重积分的概念	177
二、二重积分的性质	182
§ 8-2 二重积分在直角坐标系下的计算法	186
§ 8-3 利用极坐标计算二重积分	201
§ 8-4 二重积分的应用	209
一、曲面的面积	210
二、平面薄片的重心	215
三、平面薄片的转动惯量	219

801	§ 8-5 三重积分的概念及其计算方法	220
111	一、三重积分的概念	220
211	二、在直角坐标系下计算三重积分	222
811	三、利用柱面坐标计算三重积分	226
611	四、利用球面坐标计算三重积分	229
621	五、三重积分的应用	235
101	习题	238
101	第九章 曲线与曲面积分	243
011	§ 9-1 对弧长的曲线积分	243
111	一、对弧长的曲线积分的概念	243
121	二、对弧长的曲线积分的计算方法	247
131	§ 9-2 对坐标的曲线积分	254
311	一、对坐标的曲线积分的概念	254
601	二、对坐标的曲线积分的计算方法	260
681	三、两类曲线积分的关系	269
691	§ 9-3 格林公式	271
701	§ 9-4 曲线积分与路径无关	281
111	一、平面曲线积分与路径无关的条件	281
711	二、全微分求积	281
721	§ 9-5 曲面积分	298
111	一、对面积的曲面积分	299
231	二、对坐标的曲面积分	308
601	三、高斯公式	321
101	习题	324
101	第十章 无穷级数	332
111	§ 10-1 常数项级数的概念与性质	332
121	一、级数的基本概念	332
131	二、级数的基本性质	337

§ 10-2	常数项级数的审定法	341
一、	正项级数及其审敛法	341
二、	交错级数及其审敛法	354
三、	绝对收敛与条件收敛	357
§ 10-3	幂级数	361
一、	函数项级数的一般概念	361
二、	幂级数及其收敛性	363
三、	幂级数的运算	371
§ 10-4	把函数展开为幂级数	377
一、	泰勒中值公式	377
二、	泰勒级数	381
三、	把函数展开成幂级数	382
四、	函数的幂级数展开式的应用	390
§ 10-5	傅立叶级数	395
一、	三角级数与三角函数系的正交性	395
二、	以 2π 为周期的函数的傅立叶级数	397
三、	$[-\pi, \pi]$ 与 $[0, \pi]$ 上的函数的傅立叶级数	407
四、	以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数	410
习题		416
第十一章	微分方程	421
§ 11-1	微分方程的基本概念	421
§ 11-2	可分离变量的一阶微分方程	426
一、	可分离变量的一阶微分方程	427
二、	齐次方程	434
§ 11-3	一阶线性微分方程	437
一、	一阶线性微分方程	437
二、	贝努利方程	444
§ 11-4	可降阶的高阶微分方程	445
一、	$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	446

110	二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	447
115	三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	448
118	§ 11-5 线性微分方程解的结构	452
123	一、二阶线性齐次方程解的结构	452
128	二、二阶线性非齐次方程解的结构	457
133	§ 11-6 二阶常系数线性齐次微分方程	459
138	§ 11-7 二阶常系数线性非齐次微分方程	468
143	一、 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 型	469
148	二、 $f(x)=A\cos\omega x$ 或 $f(x)=A\sin\omega x$ 型	473
153	§ 11-8 常系数线性微分方程组解法举例	478
158	习题	481
163	习题答案	488
168		
173		
178		
183		
188		
193		
198		
203		
208		
213		
218		
223		
228		
233		
238		
243		
248		
253		
258		
263		
268		
273		
278		
283		
288		
293		
298		
303		
308		
313		
318		
323		
328		
333		
338		
343		
348		
353		
358		
363		
368		
373		
378		
383		
388		
393		
398		
403		
408		
413		
418		
423		
428		
433		
438		
443		
448		
453		
458		
463		
468		
473		
478		
483		
488		
493		
498		
503		
508		
513		
518		
523		
528		
533		
538		
543		
548		
553		
558		
563		
568		
573		
578		
583		
588		
593		
598		
603		
608		
613		
618		
623		
628		
633		
638		
643		
648		
653		
658		
663		
668		
673		
678		
683		
688		
693		
698		
703		
708		
713		
718		
723		
728		
733		
738		
743		
748		
753		
758		
763		
768		
773		
778		
783		
788		
793		
798		
803		
808		
813		
818		
823		
828		
833		
838		
843		
848		
853		
858		
863		
868		
873		
878		
883		
888		
893		
898		
903		
908		
913		
918		
923		
928		
933		
938		
943		
948		
953		
958		
963		
968		
973		
978		
983		
988		
993		
998		

第六章 向量代数与空间解析几何

§ 6-1 三元线性方程组与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

用消元法容易得:

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \end{cases}$$

为简便起见, 记 $D = a_1b_2 - a_2b_1$, $D_x = (c_1b_2 - c_2b_1)$, $D_y = (a_1c_2 - a_2c_1)$, 则上式可简写为

$$\begin{cases} Dx = D_x \\ Dy = D_y \end{cases} \quad (2)$$

当 $D \neq 0$ 时, 可得方程组 (1) 的唯一解.

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad (3)$$

为了便于推广和运用, 我们将数 D 、 D_x 、 D_y 叫做二阶行列式, 并改写为:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

一般地, 我们有如下定义

定义1 设有 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} 四个数, 排成两行(横

向)、两列(纵向)的正方形数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 叫做与数表 A 相对应的二阶行列式, 并记为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

二阶行列式是一个数, 它是两项的代数和, 每项是取自行列式的不同行不同列的两元素的乘积, 位于主对角线(从左上方向右下方方向)上的一项为正, 另一项为负。

行列式 D 叫做方程组 (1) 的系数行列式, 而 D_x 、 D_y 则是用方程组 (1) 中的常数项分别替换 D 中的第一列与第二列而得。公式 (3), 叫解线性方程组的克莱姆法则。

例1 用克莱姆法则解下列线性方程组

$$\begin{cases} 7x + 24y = 3 \\ 5x + 17y = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 24 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} = 7 \times 17 - 5 \times 24 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 2 & 17 \end{vmatrix} = 3 \times 17 - 2 \times 24 = 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7 \times 2 - 3 \times 5 = -1$$

由 (3) 式得:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{-1} = -3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$$

当 $D=0$ 时, 公式 (3) 不适用, 但公式 (2) 仍然是正确的。这时有两种情形,

(i) D_x, D_y 不全为 0, 不妨设 $D_x \neq 0$, 则对任意的实数 x 都不可能使 (2) 式中的 $x \cdot D = D_x$ 成立, 故方程组 (1) 无解。

(ii) $D_x = D_y = 0$, 此时有

$$\frac{a_1 x + b_1 y = c_1}{a_2 x + b_2 y = c_2}.$$

则方程组 (1) 的两个方程实质上是一个方程, 因此方程组 (1) 有无穷多组解。

以上讨论的结果在几何上表现为: 在平面直角坐标系中, 有两条直线 $a_1 x + b_1 y = c_1$ 及 $a_2 x + b_2 y = c_2$, 若 $D \neq 0$, 二直线有唯一交点; 若 $D=0$ 而 D_x, D_y 不全为 0, 则二直线平行; 若 $D=D_x=D_y=0$, 则二直线重合。

必须注意, 为了使条件整齐对称, 我们经常使用连比式。按理说, 应限制分母不为 0, 但在本书中我们统一规定: 在连比式中, 如果某分母等于 0, 则认为其分子也等于 0。

例 2 讨论方程组

$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -0.6x + y = b \end{cases} \text{ 的解.}$$

解: $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -0.6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$
 $D_x = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 7 + 5b, D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -0.6 & b \end{vmatrix} = 3b + 4.2$
 故若 $b \neq -1.4$, 则 $D_x \neq 0, D_y \neq 0$, 方程组无解。若 $b = -1.4$, 则 $D_x = D_y = 0$, 方程组有无穷多解。为取出方程组的若干解, 设 x 取任意实数 k , 则 $y = -1.4 + 0.6k$, 对不同的 k 值可得不同