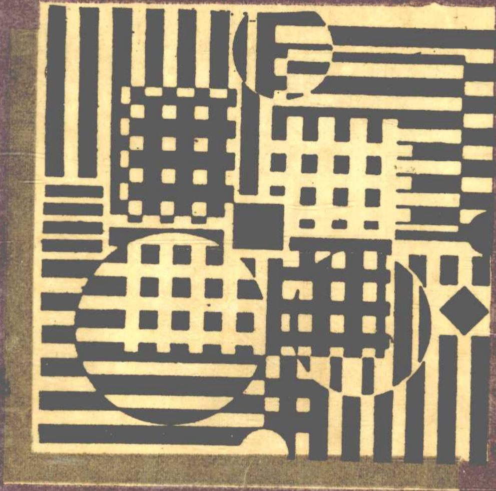
葛艾东 赵正宇 张燕荣 编



# 概率统计与随[illegible]

# 前　言

在自然界与人类社会中，存在着大量的随机现象.概率统计是研究随机现象统计规律的数学学科，在现代科学的许多领域，如物理、化学、生物、工程技术、人文、经济中有着广泛的应用，学习并掌握概率统计知识与研究方法，对理工科各专业技术人员十分必要.

为了给理科无线电类专业的学生提供一本合适的教学参考书，编者将历年来为本校无线电系与空间物理系学生讲授《概率统计》课程所用的讲义修改后编写成本书，并增补了一些内容.

本书采用直观、形象的办法，对概率统计的基本理论与方法作了全面系统的介绍，对书中的定理、引理和性质一般都给了严格的证明.考虑到理科无线电专业的特点与要求，在内容上进行了适当的取舍.书中例题丰富，讲述清楚，重点突出，便于自学，读者只要具备微积分与线性代数知识就可以毫无困难地阅读本书.

本书由三部分组成.第一部分概率论，包括概率基本知识，随机变量及其分布，数字特征与特征函数，大数定理与中心极限定理共五章，是本书的重点；第二部分数理统计初步，包括样本及其分布，参数估计，假设检验，回归分析共四章；第三部分随机过程，包括随机过程概念与描述方法，马尔可夫链，平稳过程共四章，由于平稳过程在无线电技术中较为重要，我们从时域和频域的不同角度对它作了较为详细的介绍.书中每章末配有一定数量的习题，以配合课程学习，加深对所学内容的理解与掌握.

由于编者学识水平有限，考虑不当与错误之处在所难免，恳请

# 目　录

# 第一章　随机事件与概率

## §1　随机事件及其运算

### 一、随机现象

在自然界和人类社会中，存在着两类不同的现象。一类是在一定条件下，我们可以预言它必定会出现或者必定不出现。例如，在标准大气压下水加热到 100℃必然沸腾；没有外力作用时，匀速直线运动的物体继续作匀速直线运动，以及同性电荷互斥等等。又如人不会死；异性电荷互斥等是不会出现的。总之，在准确地重复某些条件时，其结果总是肯定的，我们称这类现象为确定性现象或必然现象。另外还有一类所谓随机现象或不确定性现象，事先不可能预言其结果，即在相同条件下重复试验，每次结果未必相同。如抛一枚质地均匀的硬币，结果可能是正面向上，也可能是反面向上，掷前无法预言；某工厂生产的每一个灯泡，事前不能准确地知道寿命有多长，只知道灯泡寿命将是 0 与$\infty$之间的某个数。总之，这类现象在相同的条件下具有多种可能结果，人们无法预言每次结果。

表面看来，随机现象似乎是没有规律的，其实并非如此。人们通过长期的观察和实践，认识到只要在相同条件下，进行大量观测试验，随机现象都呈现某种规律性。如将均匀对称的硬币抛掷多次，正面和反面出现的次数比总是接近 1∶1，抛掷的次数愈多，愈接近这个比值。历史上，蒲丰抛过 4040 次，得到正面 2048 次；皮尔逊抛掷过 24000 次，得到 12012 次正面。又如炮弹着弹点的位置，事先无法预言，通过在相同条件下多次射击观察，发现着弹点位置

的分布有一定规律性，当射击次数足够大时，呈现所谓正态分布。当然还可以举出很多其他的例子。

从以上所述可以看到，随机现象的规律性，是在相同条件下所作大量试验与观察中呈现出来的一种完全确定的规律性。这种规律性是随机现象所特有的规律，是与大量试验观察分不开的，我们称之为随机现象的统计规律性。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。由于随机现象的广泛存在，因而概率统计在自然科学与社会科学的各个领域中得到了广泛的应用。学习概率统计的一些基本知识与研究方法，就显得十分重要，我们必须学好它。

## 二、随机试验与事件

要研究随机现象的统计规律性，离不开在相同条件下进行的大量观察或试验。为明确起见，一般我们把事先无法预言其结果，而在相同条件下可以重复进行的观测或试验，称为随机试验，或简称为试验，有时也记为 $E$。试验的每一个可能结果，一般称之为随机事件，简称为事件，以字母 $A$、$B$、$C$……表示。下面举一些例子说明。

例 1.1　掷一颗骰子，观察出现的点数，可有六种不同结果："出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"都是不同的事件；但还有其他事件："出现偶数点"，"出现奇数点"，"出现点数少于 4"等等。

例 1.2　盒中装有八个球(五个黑球，三个白球)，从中任取二个，那么"二个都是黑球"，"二个都是白球"，"一个是黑球，一个是白球"等都是随机事件，不难看出，"至少有一个白球"也是随机事件。

一般，我们把在一次试验中可能出现的每个结果称为基本事件，例如在例 1.1 中，"出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"都是基本事件；但"出现偶数点"事件，它是由基本事件："出现 2 点"，"出现 4 点"，"出现 6 点"复合而成的。一般我们称由若干基本事件

复合而成的事件为复合事件。“出现奇数点”,“出现点数小于4”都是复合事件。

必须注意,基本事件是相对于试验的目的而说的。例如量度人的身高(单位:米),一般说,区间(0,3)中的任一实数,都可以是基本事件,这时,基本事件有无穷个;但如果量度高度是为了了解乘车是否需要买全票、半票或免票,这时就只有三个基本事件了。

为研究方便起见,我们把在一定条件下必然发生的事件称为必然事件,记为$\Omega$;在一定条件下,必不发生的事件称为不可能事件,记为$\varnothing$。例如掷骰子,“出现点数不大于6点”是必然事件,“出现点数大于6点”是不可能事件。并且把必然事件和不可能事件也看作是随机事件,这对今后的讨论是方便的。

## 三、事件间的关系与运算

我们看到,在一个试验中,有多个随机事件。其中有些是比较简单的,有些是比较复杂的,彼此间又有一定的联系。分析事件之间的关系,并引进一些事件间的运算,有利于今后对事件和它的概率的叙述与计算。

1. 若两事件$A$与$B$不可能同时发生,则称事件$A$与$B$为互不相容事件。例如掷骰子“出现偶数点”与“出现1点”是互不相容事件;又如必然事件$\Omega$与不可能事件$\varnothing$是互不相容的。如果$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中的任意两个事件是互不相容的,则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为互不相容事件。基本事件是互不相容的。

2. 如果事件$A$发生必然导致事件$B$发生,则称事件$A$含于$B$或事件$B$包含$A$,记为$A\subset B$或$B\supset A$。如例1.1,以$A$表示“出现2点”,$B$表示“出现偶数点”,则$A\subset B$;对任一事件$A$,均有$\varnothing\subset A\subset\Omega$。如果$A\subset B$,同时$B\subset A$,则称$A,B$等价或相等,记作$A=B$。

3. “事件$A$与$B$至少有一个发生”也是一个事件,以$C$表示它,称它为$A$与$B$的和,记为$C=A\cup B$(或$C=A+B$)。如在例

1.2 中，$A$ 表示"两个都是白球"事件，$B$ 表示"一个是白球，一个是黑球"事件，$C$ 表示"至少有一个白球"事件，则 $C=A\cup B$（或 $C=A+B$）。对于任意两事件 $A$ 与 $B$，有 $A\cup B\supset A$ 和 $A\cup B\supset B$；当 $A\supset B$ 时，则 $A\cup B=A$。

类似地，"$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$（或 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$）。事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生"称为可列个事件的和，记作 $A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$（或 $A_1+A_2+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$）。我们可以把 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 理解为有限个事件的和的"极限"，即 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$。

4. "事件 $A$ 与 $B$ 同时发生"这也是一事件，以 $D$ 表示它，称为事件 $A$ 与 $B$ 的积，记为 $D=A\cap B$ 或 $D=AB$。例如上述例中，$AC=A,CB=B,AB=\varnothing$。显然对任一事件 $A$，据定义有：$A\cap\Omega=A,A\cap\varnothing=\varnothing$。$A,B$ 互不相容即是 $AB=\varnothing$。同样"$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件称为 $n$ 个事件的积，记为 $A_1\cap A_2\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$（或记为 $A_1A_2\cdots A_n=\prod\limits_{k=1}^{n}A_k$）。类似可以定义可列个事件的积，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。（或记为 $A_1A_2\cdots=\prod\limits_{k=1}^{\infty}A_k$）。也可以认为是有限个事件积的"极限"，即 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$。

5. "事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生"这也是一个事件，称为 $A$ 与 $B$ 的差，记为 $A-B$. 例如以 $A$ 表示掷骰子"出现偶数点"，$B$ 表示"出现点数不超过 4 点"事件，则 $A-B$ 表示"出现点数为 6 点"这一事件。根据事件差的定义，对任意事件 $A$，有 $A-A=\varnothing,A-\varnothing=A,A-\Omega=\varnothing$。

6. 二事件 $A,B$ 若满足 $A\cup B=\Omega, A\cap B=\varnothing$，也就是说，两事件不能同时出现，但必出现其一，称 $A,B$ 互逆，或者说 $A$ 是 $B$（或 $B$ 是 $A$）的对立事件，记作 $A=\overline{B}$（或 $B=\overline{A}$）。例如以 $A$ 表示掷骰子"出现偶数点"事件，则 $\overline{A}$ 表示"出现奇数点"事件。我们要特别注意两对立事件与两互不相容事件是不同的，对立事件一定是互不相容事件，但反过来则不一定成立了。例如"出现偶数点"与"出现 1 点"是互不相容事件，但不是对立事件。据定义，显然有 $\overline{(\overline{A})}=A, A-B=A\overline{B}$。

7. 若事件序列 $\{A_n\}$ 满足：$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$，则称 $\{A_n\}$ 为非减事件序列；若 $\{A_n\}$ 满足：$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，则称 $\{A_n\}$ 为非增事件序列。非减事件序列与非增事件序列统称为单调事件序列。

对于非减事件序列 $\{A_n\}$，规定 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为这序列的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$（即 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$）；类似地，对于非增事件序列 $\{A_n\}$，规定 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为这序列的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$（即 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$）。

8. 事件的运算，一般满足如下规律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

分配律还可以推广到有穷或可列无穷个事件的情形，即

$$A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i),$$

$$A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\cup A_i);$$

(4) 德莫根律：$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}, \overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$，推广到有限个或可列无穷个 $A_i$，则有

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}.\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

事件间的关系，我们可以用平面上某正方形中的图形来表示，

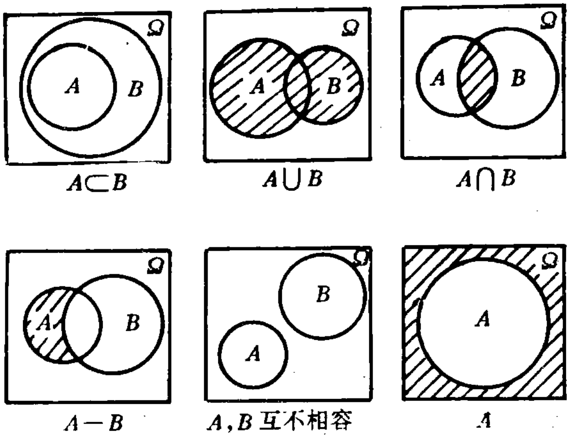



图 1.1

这就是所谓文(Venn)图。如图 1.1 所示。

例 1.3 向一指定目标连射三枪，以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“第 $i$ 枪击中目标”，试以 $A_1,A_2,A_3$ 与事件的关系及运算表示下列各事件：

(1)第一枪、第三枪至少有一枪击中；(2)只有第一枪击中；(3)只击中一枪；(4)至少击中一枪；(5)三枪都击中；(6)三枪都没有击中；(7)至多只有一枪击中。

解：根据事件的关系与运算，得解如下：

(1)$A_1 \cup A_3$； (2)$A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$； (3)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A_1}A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；
(4)$A_1 \cup A_2 \cup A_3$； (5)$A_1 \cap A_2 \cap A_3$； (6)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；
(7)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A_1}A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

## 四、事件与集合 样本空间

为了更准确地理解和掌握事件的运算及其规律，我们可以把随机试验中的随机事件当作点的集合。每一个基本事件用只含一个元素 $\omega$ 的单点集 $\{\omega\}$ 表示，由若干基本事件组成的复合事件则

由它所包含的基本事件所对应的元素组成的集合表示，所有基本事件所对应的全部元素组成的集合就称为样本空间。由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件中的一个，因此，样本空间作为事件是必然事件，仍以 $\Omega$ 表示样本空间。样本空间的每一个元素称为样本点。显然，不含有基本事件对应的元素的空集就是不可能事件。任一事件就是样本空间的子集。这样，事件的定义与集合的概念就等同起来，事件之间的关系与运算和集合论中集合之间相应的关系与运算一致，为我们的研究带来了方便。

下面我们举些例子，说明如何写出随机试验的样本点及样本空间。

例 1.4 将一枚硬币连抛两次，观察正、反面出现的情况，其基本事件为

$$A_1 = \{\omega_1\} = \{(\text{正面、正面})\},$$
$$A_2 = \{\omega_2\} = \{(\text{正面、反面})\},$$
$$A_3 = \{\omega_3\} = \{(\text{反面、正面})\},$$
$$A_4 = \{\omega_4\} = \{(\text{反面、反面})\},$$

样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.

例 1.5 记录电话交换台在 $(0,t)$ 内来到的呼叫次数，则基本事件为

$$A_0 = \{\omega_0\},A_1 = \{\omega_1\},\cdots,A_n = \{\omega_n\},\cdots.$$

其中 $\omega_k=$“$k$ 次呼叫”$(k=0,1,2\cdots)$。

样本空间为

$$\Omega = \{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}.$$

若简记 $\omega_i=i$，则

$$\Omega = \{0,1,2,\cdots\}.$$

例 1.6 观察某地一昼夜间的平均气温，以 $\omega_a$ 表示“平均温度为 $a$℃”，则基本事件为

$$\{\omega_a\} \qquad (-\infty < a < \infty).$$

样本空间为

$$\Omega = \{\omega_a: \quad -\infty < a < \infty\}.$$

简记 $\omega_a$ 为 $a$，则

$$\Omega = \{a: \quad a \in R_1\} = (-\infty, \infty),$$

即全体实数(实际上 $\Omega$ 中有许多点是多余的，因为温度不可能低于 $-273$℃)。

例 1.7　向平面某一区域 $S$ 内发射炮弹，以 $\omega(a,b)$ 表示坐标为 $(a,b)$ 的着弹点位置，若简记 $\omega(a,b)$ 为 $(a,b)$，则基本事件为

$$\{\omega(a,b)\},$$

或

$$\{(a,b)\} \quad ((a,b) \in S)。$$

样本空间为

$$\Omega = \{(a,b): (a,b) \in S\},$$

即 $\Omega$ 与 $S$ 相重。

## §2　事件的概率及其计算

在一次试验中，随机事件是否发生，不能事先预言。但在多次试验中，我们就可以看到，有些事件出现的可能性要大些，有些事件出现的可能性要小些。例如掷骰子“出现偶数点”比“出现 2 点”的可能性要大些；“出现偶数点”与“出现的奇数点”可能性是一样的。当然，我们不能停留在定性的了解与描述上，必须用一个数字 $P(A)$ 标志事件 $A$ 出现的可能性，较大的可能性用较大的数字来标志，较小的就用较小的数字，这数字 $P(A)$ 就称为事件 $A$ 的概率。

如何来确定事件 $A$ 的概率 $P(A)$ 呢？在概率论的发展史上，人们曾针对不同的问题从不同的角度合理地给出事件的概率及其计算，并能满足实际需要。但都存在一定的缺陷，所以只能说给出的概率都是一种计算概率的方法。

## 一、古典概率

我们在前面说到掷骰子，由于骰子制造是均匀的，人们有理由认为，每个面出现的可能性是一样的。又如抛硬币，“出现正面”和“出现反面”的可能性是一样的。对于这类问题，由于所研究的对象具有所谓物理或几何方面的对称性，而可能结果只是有限个，人们最早给出一种计算这类问题的概率的方法(即所谓古典概率)。

1. 如果随机试验 $E$ 只有有限个不同的基本事件：$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$；且每个基本事件的出现都是等可能的，设任一事件 $A$ 是由 $k(\leqslant n)$个不同的基本事件组成，则定义 $A$ 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含有的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n} \tag{1.1}$$

显然，不可能事件$\varnothing$的概率为 $P(\varnothing)=0$

例 1.8 号码锁有 4 个拨盘，每个拨盘上有 0—9 共 10 个数字，当这 4 个拨盘上的数字，组成某一个 4 位数字(开锁号码)时。锁才能打开。如果不知道这个开锁号码，一次就能打开的概率是多少？

解 在这个号码锁上，可以显示出 $10^4$ 种 4 位数字，这是总的基本事件数。当不知道开锁号码时，在一次开锁拨号过程中，拨任何一种 4 位数字是等可能的，而开锁号码只有一个，故所含的基本事件只有一个，一次能打开的概率是

$$p=\frac{1}{10^4}=0.0001.$$

可见，当不知道开锁号码时，一次能把锁打开的可能性很小。

例 1.9 随机地将 15 名新生平均分配到三个班级中去，这 15 名新生中有 3 名是优秀生。问：(1)每一个班级各分配到一名优秀生的概率是多少？(2)3 名优秀生分配在同一个班级的概率是多少？

解 基本事件总数，就是 15 名新生平均分到三个班级中的分

法总数，它为

$$\frac{15!}{5!5!5!}.$$

以 $A$ 表示“每一个班级各分配到一名优秀生”事件；以 $B$ 表示“三名优秀生分配在同一班级”事件。

(1)将 3 名优秀生分配到三个班级，使每个班级都有一名优秀生的分法共有 3! 种。对于每种分法，其余 12 名新生平均分配到三个班级中的分法有$\frac{12!}{4!\ 4!\ 4!}$种。故 $A$ 含有的基本事件数为

$$k_A = \frac{3! \times 12!}{4!4!4!},$$

故得

$$P(A) = \frac{3! \times 12!}{4!4!4!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{25}{91} = 0.2747.$$

(2)将 3 名优秀生分配在同一班级中的分法共有 3 种。对于这每种分法，其余 12 名新生的分法(一个班级 2 名，另两个班级各 5 名)有$\frac{12!}{2!\ 5!\ 5!}$种，故 $B$ 所含有的基本事件数为

$$k_B = \frac{3 \times 12!}{2!5!5!},$$

$B$ 的概率为：

$$P(B) = \frac{3 \times 12!}{2!5!5!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{6}{91} = 0.0659.$$

例 1.10　设有 $n$ 个质点，每个质点都能以同样的概率$\frac{1}{N}$落到 $N(N \geqslant n)$ 个盒子中的每一个里。试求事件 $A$：“某指定的 $n$ 个盒子中各有一个质点”的概率。

解　由于每个质点可落入 $N$ 个盒子中的任一个，故 $n$ 个质点落入 $N$ 个盒子的方式共有 $N^n$ 种，即基本事件总数为 $N^n$。而某预先指定的 $n$ 个盒子中各含有一个质点的可能方式为

$$n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

故 $A$ 含有的基本事件总数为

$$k_A = n!.$$

依定义

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

这是古典概型中一个很典型的例子。若把质点解释为粒子，把盒子解释为相空间中的小区域，这个问题便相应于统计物理学中的所谓麦克斯韦一玻尔兹曼(Maxwell－Boltzmann)统计。若对质点和盒子作另外不同的假设，即假定质点不可辨别；每个盒子能容纳任意多个质点，或只能容纳一个质点，对同一事件 $A$，得出的 $P(A)$就会不同，这就是所谓玻色一爱因斯坦(Bose－Einstein)统计及费米一狄拉克(Fermi－Dirac)统计。

例 1.11　有 $r$ 个($r \leqslant 365$)旅客乘火车途经 365 站，每人在每站下车是等可能的，其概率为$\frac{1}{365}$. 试求没有一个以上的人同时下车的概率。

解　$r$ 个旅客在 365 站的任一站都可下车，故基本事件总数为 $365^r$。依题意，该事件所含的基本事件数为

$$365 \times 364 \times \cdots \times (365 - r + 1),$$

它恰是 365 个数中任取 $r$ 个数的排列数

$$A_{365}^r = \frac{365!}{(365 - r)!},$$

故所求概率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{365!}{(365 - r)!} \Big/ 365^r \\ &= \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - r + 1)}{365^r} \\ &= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-1}{365}\right). \end{aligned}$$

当 $r$ 较小时，得近似式

$$P \approx 1 - \frac{1}{365} - \frac{2}{365} - \cdots - \frac{r-1}{365}$$