21世纪应用型本科系列教材

高等数学（上册）

（应用理工类）

寿纪麟　于大光　张世梅

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪应用型本科系列教材

高等数学（上册）

（应用理工类）

寿纪麟　于大光　张世梅

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
·西安·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:应用理工类.上册/寿纪麟等编著. —西安:西安交通大学出版社,2009.9

ISBN 978-7-5605-3165-6

Ⅰ.高… Ⅱ.寿… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 142225 号

书　　名　高等数学　上册　(应用理工类)

编　　著　寿纪麟　于大光　张世梅

责任编辑　叶　涛

出版发行　西安交通大学出版社

(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)

网　　址　http://www.xjtupress.com

电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)

(029)82668315　82669096(总编办)

传　　真　(029)82668280

印　　刷　陕西新世纪印刷厂

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张**　14.25　**字数**　262 千字

版次印次　2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5605-3165-6/O·299

定　　价　22.00 元

[illegible]、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

[illegible](029)82665248　(029)82665249

[illegible]82664954

前 言

近年来为培养应用型人才的本科大学迅速发展起来，我国高等教育从精英教育步入大众化教育的发展阶段，高等教育在不同层次上的建设已经不可避免，并已成为时代不可忽视的潮流之一。然而，目前还缺乏适用于这类教育的教材，本书就是针对应用型本科院校的教学需要而编写的。它与重点院校的教材相比，既有共同的基本内容，也有明显的差别。

首先，本书覆盖了教育部制定的本科《高等数学》的"教学基本要求"的内容，并且以"少而精"的教学原则，精选和安排教学内容，突出"三基"：即基本概念、基本理论和基本方法，特别强调常用函数及其图形、导数和积分的概念与其计算方法。

其次，在阐述一些重要概念与定理时，常常以具体例子为先导，从具体到抽象，使学生从实例中了解问题的由来，掌握分析和解决问题的思路，减少理解上的障碍。在确保教学内容整体框架的逻辑完整性的前提下，适度地减弱数学理论的严密性，如复杂定理的证明及技巧性较高的证明题等。为了适应不同专业的教学需要，对部分内容打"*"号，这些内容可以不讲或者选讲。

再次，为了适应应用型人才的培养，本书重点加强了应用性的例题和习题及解题的方法。在讲解微积分应用时，强调微积分的核心思想——"微元法"，并用它来指导分析和解决实际应用问题。此外还增添了"Matlab 简介"作为扩大应用范围的手段(见下册附录)。

同时在内容的论述上力求逻辑严谨，层次分明，清晰易懂，便于自学。

本书分上、下两册。上册分六章：第 1 章，函数、极限与连续；第 2 章，导数与微分；第 3 章，中值定理与导数的应用；第 4 章，一元函数积分学；第 5 章，定积分的应用；第 6 章，向量代数与空间解析几何。在下册中分多元函数微分学；重积分；线、面积分；微分方程；无穷级数五章。各章的每节后面都附有习题。

在本书编写的过程中得到西安交通大学城市学院的支持和鼓励。在教材评审中西安交通大学理学院的王绵森教授对教材内容的改进提出很多具体建议，这些建议对保证教材的质量起到十分重要的作用。在此一并表示衷心的感谢。

本书由西安交通大学城市学院的寿纪麟、于大光、张世梅编写。由于编写的时间仓促以及编者水平有限，不妥与错误之处在所难免，敬请同行与读者批评指正。

编者

2009 年 7 月于西安

目 录

第1章　函数、极限与连续

初等数学主要以常量为研究对象，而高等数学则主要研究变量. 反映了变量与变量之间的依赖关系的函数是微积分的研究对象. 极限的方法是研究变量数学的一种基本方法. 本章主要介绍函数、极限和连续性等基本概念及其性质. 掌握、运用好这些基本理论和方法是学好微积分的关键，也为今后的学习打下必要的基础.

1.1　函数的概念

1.1.1　区间与邻域

区间是一类实数的集合，它是某种介于两个实数之间的全体实数的集合. 如数集$\{x|a<x<b\}$和$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$都是区间，其中两个实数$a$和$b$称为**区间端点**. 在$\{x|a<x<b\}$中不包含区间的端点，称为**开区间**，用$(a,b)$表示，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$. 在$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$中包含区间的端点，称为**闭区间**，用$[a,b]$表示，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$. 两个端点之间的距离称为**区间长度**.

类似地，还有两种**半开半闭区间**：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

对于数集E，如果存在正数K，使一切点$x\in E$，$|x|\leqslant K$都成立，则称E为**有界集**，否则就称为**无界集**. 例如，端点为有限值的区间为**有界区间**. 此外，还有**无界区间**，无界区间有：$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$，$(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$等.

需要说明的是：∞只是一个记号，不是一个数，与之相伴的一定是圆括弧.

在高等数学中，经常会用到一个特殊的开区间$(a-\delta,a+\delta)$　$(\delta>0)$，它表示的是数集$\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$，称为**点$a$的$\delta$邻域**，记为$U(a,\delta)$，其中$a$为**邻域的中心**，$\delta$称为**邻域的半径**，如图1-1所示.

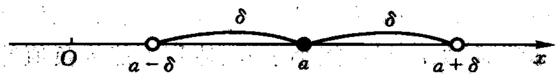

图1-1

通常邻域半径 δ 都取很小的正数，所以点 a 的 δ 邻域表示在数轴上点 a 的邻近点的集合. 若去掉邻域的中心，所得到的邻域称为**点 a 的去心 δ 邻域**. 记为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

1.1.2　函数的概念

在考察一个自然现象或变化过程时，往往会遇到各种不同的量. 在此过程中，有的量始终保持不变，这种量称为**常量**；有的量发生变化，这种量称为**变量**. 这些变量往往不是孤立变化的，而是相互有联系并遵循一定的规律变化的. 函数就是描述这种变量之间联系的数学概念.

现在考虑两个变量的情形. 例如，球的体积与半径之间的关系是 $V=\frac{3}{4}\pi r^3$. 当球的半径 r 取定一个数值时，其体积 V 也就随之确定了. 当半径 r 变化时，其体积 V 也发生变化.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，$D(f)$ 是一个给定的非空数集. 如果对于每个 $x\in D(f)$，变量 y 按照一定的对应法则总有确定的数值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 自变量 x 的取值范围 $D(f)$ 称为此函数的**定义域**，当自变量 x 取遍 $D(f)$ 中的各个数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合 $R(f)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

函数的定义域和对应法则是函数的两个要素. 只有当两个函数的定义域和对应法则分别相同时，这两个函数才是相同的，否则就是不同的.

顺便指出，数列 $\{x_n\}$ 可看成一类特殊的函数，即以正整数 n 为自变量，取值为实数的函数，记作 $x_n=f(n)$（自变量取值为 $n=1,2,\cdots$），因此，该函数的定义域为正整数集合 N_+.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如果不考虑函数的实际意义，只是抽象地研究用算式表达的函数，则函数的定义域就是使函数表达式有意义的一切实数所构成的集合. 例如，函数 $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-2x+1}$ 的定义域是 $D=[-3,1)\cup(1,3]$；公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表示了自由落体物体下落距离和时间之间的函数关系，由于考虑的是实际问题，其定义域为 $D=[0,+\infty)$. 一般情况下，如果函数用一个公式表示时，求其定义域应把握以下几点：① 分式的分母不为零；② 偶次根号下不能为负；③ $\log_a(h(x))$ 中的 $h(x)$ 应大于零等. 当然，在研究实际应用问题中还应考虑问题的实际背景，如时间不能小于零、体积不能为负值等.

若自变量在其定义域内任取一个值时，总是只有一个函数值与之对应，称此函

数为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 例如函数 $y=\sin^2 x$ 是一个单值函数，而函数 $y^2=3x+2$ 则是多值函数. 今后，若无特别说明，函数都是指单值函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，对于任意取定的 $x\in D(f)$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，在 xOy 平面上就确定了一个以 x 为横坐标、y 为纵坐标的点 (x,y). 当 x 取遍 $D(f)$ 上每一个数值时，就得到点 (x,y) 的一个集合 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D(f)\}$，称 C 为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

函数的表示有多种方法，常用的方法有解析法（公式法）、表格法和图形法等. 根据解析表达式形式的不同，函数可分为显函数、隐函数和分段函数三种. 其中，**显函数**是指函数可以由 x 的解析表达式直接表示，例如 $y=\sqrt{x^2-3x^3}$. **隐函数**指的是自变量和因变量之间的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 给出，例如：由 $x^2+y^2-R^2=0$ 确定的函数 $y=y(x)$. **分段函数**是指在函数定义域的不同范围内，对应法则用不同的解析表达式来表示.

下面举几个分段函数的例子.

例 1.1　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

绝对值函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，图形如图 1-2 所示.

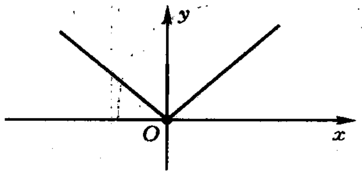

图 1-2

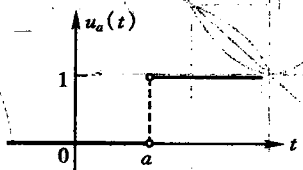

图 1-3

例 1.2　阶跃函数 $u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$ $(a>0)$.

这个函数的定义域为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，值域为 $\{0,1\}$. 此函数在电子技术中经常遇到，称为单位阶跃函数. 该函数的图形如图 1-3 所示.

例 1.3　设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

解　因为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，所以 $f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}$，

即 $f(x+3)=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2\\ -2, & -2<x\leqslant -1\end{cases}$，故函数 $f(x+3)$ 的定义域为 $D=[-3,-1]$.

1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数及其图形

函数关系是非常丰富且复杂的,但有几种最基本的函数,它们是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数,这几种函数统称为**基本初等函数**.这几种函数都是中学数学中已经讨论过的,这里将它们的主要性质简单总结一下,并做一些补充,以方便今后作进一步讨论.特别是由函数的图形可以很容易看出这些函数的有关性质,读者应熟悉各个基本初等函数的图形.

(1) 幂函数

幂函数 $y=x^\mu$(μ 是任意实数)的定义域要依据 μ 具体是什么数而定.

对于所有的实数 μ,幂函数 $y=x^\mu$ 具有公共的定义域 $(0,+\infty)$.当 μ 为正整数时,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$;当 μ 为负整数时,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 μ 取不同值时,幂函数 $y=x^\mu$ 的图形如图 1-4 所示.

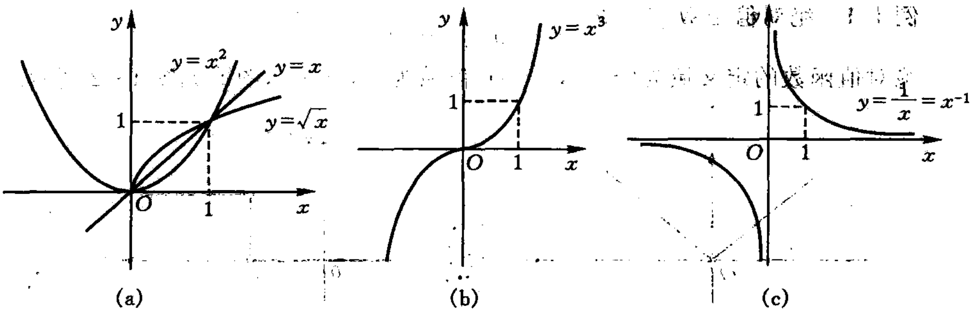

图 1-4

在中学数学中,介绍过函数的一个重要特性——**单调性**:在一个区间上,若函数随自变量的增加而增加时,则称该函数在该区间上是**单调增**的;若函数随自变量的增加而减少时,称该函数在该区间上是**单调减**的.从函数的图像上不难看出:当 $\mu>0$ 时,幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增的;当 $\mu<0$ 时,幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调减的.

函数还有一个重要特性,即它的**奇偶性**,奇偶性反映了函数的某种对称性.设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称,且对于属于 $D(f)$ 的任何 x 值,恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**,偶函数的图形是关于 y 轴对称的(图 1-5);如果对于属于 $D(f)$ 的任何 x 值,恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.奇函数的图形是关于原点对称的(图 1-6).

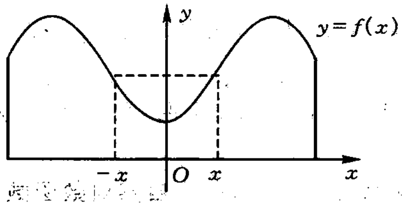

图 1-5

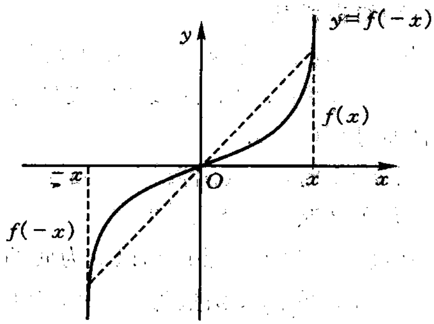

图 1-6

请读者自行验证：当 μ 为偶数时，幂函数 $y=x^{\mu}$ 是偶函数；当 μ 为奇数时，$y=x^{\mu}$ 为奇函数. 除了奇函数和偶函数以外，还存在大量的非奇、非偶函数. 可以证明，任何一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数一定能分解为一个奇函数和一个偶函数之和. 实际上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 是偶函数，$f_2(x)$ 是奇函数.

(2) **指数函数**

指数函数 $y=a^x$（a 是常数，且 $a>0,a\neq1$）的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由于对任意实数 x，总有 $a^x>0$，且 $a^0=1$，因此指数函数的图形总在 x 轴的上方，且通过点 $(0,1)$. 而且 $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 关于 y 轴对称.（图 1-7）

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调增的；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调减的.

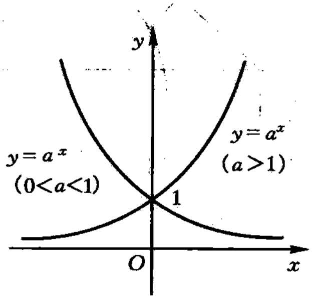

图 1-7

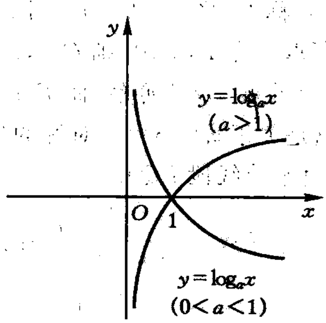

图 1-8

(3)**对数函数**

从中学数学已经知道，对数函数是指数函数的反函数，记为 $y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$）. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴的右方，且通过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增的. 当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减的.（图 1－8）

在高等数学中经常用到以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，称为**自然对数函数**，简记为 $y=\ln x$. 它的反函数为 $y=e^x$，其中 e(＝2.7182818…)是一个无理数.

为了对反函数的概念有更清晰的理解，下面来简要回顾一下反函数的概念.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$，若对任意的 $y\in R(f)$，在定义域 $D(f)$ 内必定有值 x 与之对应，即 $f(x)=y$，这样就可以把 x 看成是 y 的函数，并将这个函数用 $x=\varphi(y)$ 表示，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 相对于反函数，函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

如果对应于 y 的 x 不止一个，例如 $y=x^2$，对任意的 $y>0$ 总有两个 x 与之对应，这时反函数 $x=\pm\sqrt{y}$ 是一个多值函数. 但本书仍特别关注单值的反函数，如不特别说明，今后均指单值函数.

显然，如果 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数.

然而，习惯上把自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此可将 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$. 由于函数的实质是自变量和因变量的对应关系，至于 x 和 y 仅仅是记号而已，$x=\varphi(y)$ 和 $y=\varphi(x)$ 中表示对应关系的符号 φ 并没有改变，这就表示它们是同一个函数.

在同一个坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的（图 1－9）. 这是因为，在 $y=f(x)$ 上任取一点 $P(a,b)$，则 $Q(b,a)$ 一定是 $y=\varphi(x)$ 上的点，反之亦然. 而 $P(a,b)$ 和 $Q(b,a)$ 两点是关于直线 $y=x$ 对称的（即直线 $y=x$ 垂直平分线段 PQ）.

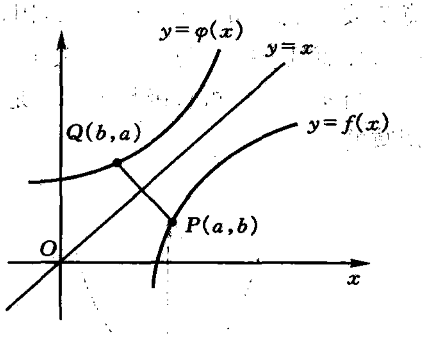

图 1－9

例 1.4 求函数 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$ 的反函数.

解 令 $z=\sqrt{1+x}$，则 $y=\dfrac{1-z}{1+z}$，故 $z=\dfrac{1-y}{1+y}$，即 $\sqrt{1+x}=\dfrac{1-y}{1+y}$，解出 x 得

$$x=\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1=-\frac{4y}{(1+y)^2}$$

交换变量 x、y 的记号，即得到所求反函数为 $y=-\frac{4x}{(1+x)^2}$.

(4) **三角函数**

常用的三角函数有**正弦函数** $\sin x$、**余弦函数** $\cos x$、**正切函数** $\tan x$、**余切函数** $\cot x$、**正割函数** $\sec x$、**余割函数** $\csc x$，它们都是周期函数.

正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，周期均为 2π，正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数，它们的图形见图 1－10 和图 1－11.

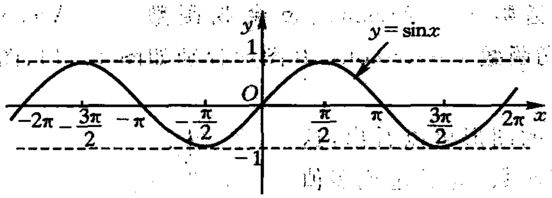

图 1－10

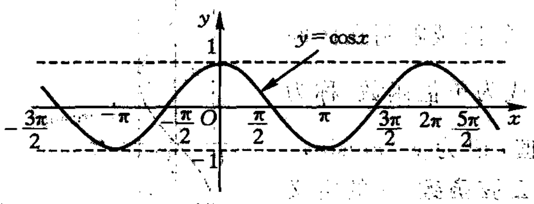

图 1－11

正切函数 $y=\tan x$ 定义域为 $\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，周期为 π，是奇函数；余切函数 $y=\cot x$ 定义域为 $\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，周期为 π，是奇函数. 它们的图形如图 1－12 和图 1－13 所示.

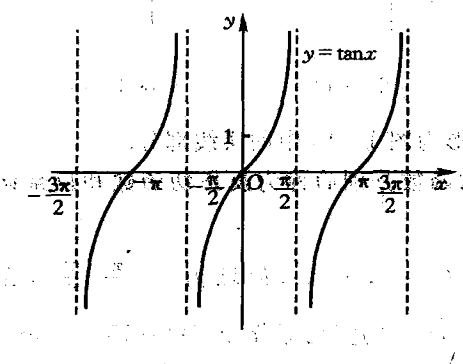

图 1－12

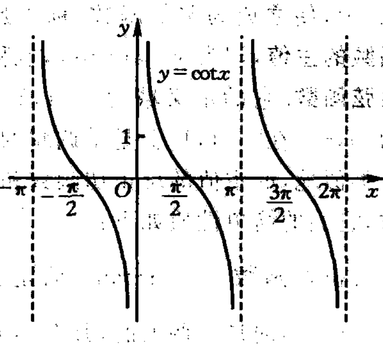

图 1－13

正割函数 $\sec x$ 是余弦函数 $\cos x$ 的倒数，余割函数 $\csc x$ 是正弦函数 $\sin x$ 的倒数，即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

它们都是以 2π 为周期的周期函数.

(5) **反三角函数**

三角函数的反函数称为反三角函数. 三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$ 的反函数依次为**反正弦函数** $y=\mathrm{Arcsin}x$、**反余弦函数** $y=\mathrm{Arccos}x$、**反正切函数** $y=\mathrm{Arctan}x$、**反余切函数** $y=\mathrm{Arccot}x$. 其图形分别如图 1－14、图 1－15、图 1－16 和图 1－17 所示.

从反三角函数的图形可以看出，这几个函数均为多值函数. 为了避免多值性，需要对它们的值域加以限制，使其成为单值函数.

将 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 的值域限制在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，使之成为单值函数，称为**反正弦函数的主值**，记为 $y=\arcsin x$，通常也把它称为**反正弦函数**. 它的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在 $[-1,1]$ 上是单调增的，其图形为图 1－14 中的实线部分.

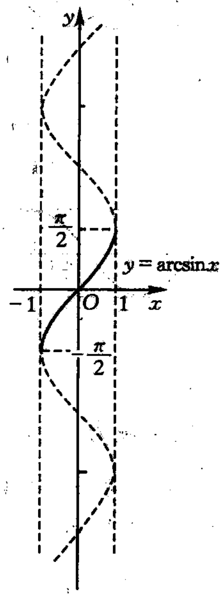

图 1－14

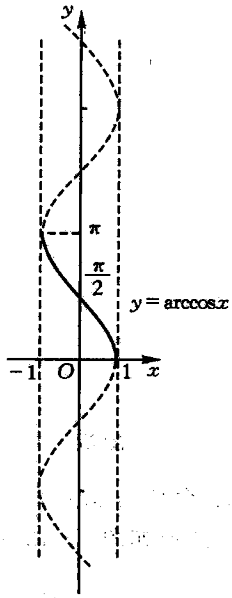

图 1－15

将 $y=\mathrm{Arccos}x$ 的值域限制在区间 $[0,\pi]$ 上，使之成为单值函数，称为**反余弦函数的主值**，记为 $y=\arccos x$，也称为**反余弦函数**. 它的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，在 $[-1,1]$ 上是单调减的. 其图形为图 1－15 中的实线部分.

类似地，取主值的反正切函数和反余切函数分别简称为**反正切函数**和**反余切函数**，它们的简单性质如下：

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增的，其图形为图 1－16 中的实线部分. 反余切函数 $y=\mathrm{arccot}x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调减的，其图形为图 1－17 中的实线部分.

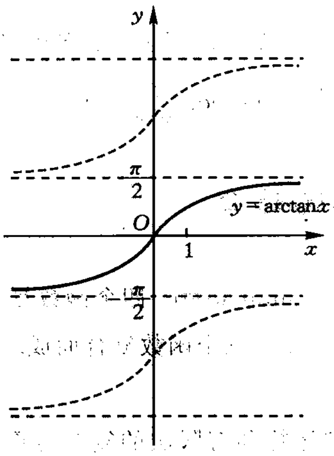

图 1-16

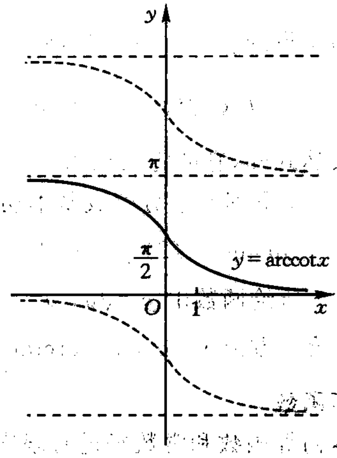

图 1-17

2. 复合函数

在实际问题中，经常会遇到一个函数和另一个函数发生联系. 例如，球的体积 V 是其半径 r 的函数：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，由于热胀冷缩，随着温度的改变，球的半径也会发生变化，由物理学知，半径 r 随温度 T 的变化规律是 $r=r_0(1+\alpha T)$，其中，r_0、α 为常数，将这个关系代入球的体积公式，即得到体积 V 与温度 T 的函数关系

$$V=\frac{4}{3}\pi[r_0(1+\alpha T)]^3$$

这种将一个函数的因变量表达式代入另一个函数的自变量而得的函数称为这两个函数的复合函数.

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $R(\varphi)$，当 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 定义域内，即 $R(\varphi)\subset D(f)$ 时，则对任意的 x，通过 $\varphi(x)$ 对应于 u，再通过 $f(u)$ 对应于 y，这样就确定了一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数 $y=f(u)=f[\varphi(x)]$，这个函数称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**.

并不是任何两个函数都可以复合为一个复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能复合. 这是因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而函数 $u=x^2+2$ 的值域为 $[2,+\infty)$，而 $[2,+\infty)$ 并不包含在 $[-1,1]$ 中.

例 1.5 设 $y=f(u)=\cos u$，$u=\varphi(v)=\sqrt{v^2+1}$，$v=\psi(x)=\frac{1}{x}$，