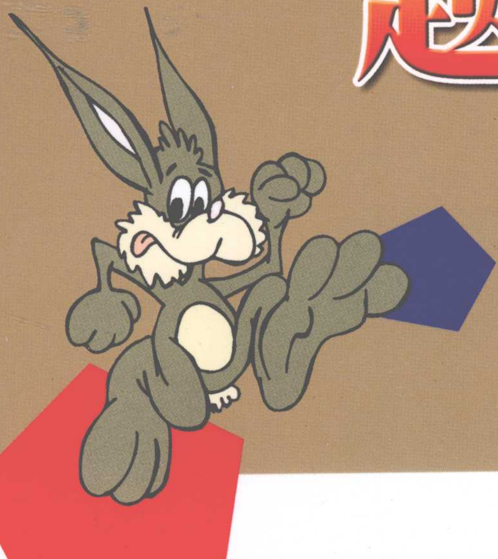
高中数学

一点通秘笈

知识点贯通题典



李正兴 著

上海科学普及出版社

高中数学一点通秘笈

知识点贯通·题典

李正兴　著

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学一点通秘笈:知识点贯通·题典/李正兴著.—上海:上海科学普及出版社,2010.1

ISBN 978-7-5427-4405-0

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第122935号

责任编辑 张建青

高中数学一点通秘笈

知识点贯通·题典

李正兴 著

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路832号 邮政编码200070)

http://www.pspsh.com

各地新华书店经销 常熟市新骅印刷有限公司印刷

开本 787×1 092 1/16 印张 31.75 字数 1 070 000

2010年1月第1版 2010年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5427-4405-0 定价:42.00元

序

《高中数学一点通秘笈》丛书是我退休之后撰写的一套高中数学系列教辅书，"一点通"是上海科学普及出版社的当家品牌.我在退休之前执教了18届高三毕业班，退休后又执教了2届高复班，当然还免不了开点讲座、做点辅导，届届都要撰写系列讲义，在实践中使用，在获得明显教学效果的基础上补充修改成书.写作贵在求新，不要重复自己，更不要重复别人，最重要的是把自己的教育理念、教学经验、新的体会、新的感受写出来，以细针密缕的功夫，写平正笃实的文章，这个特点不仅体现在本书的结构上，即使是例题与训练题也尽量不重复.这套丛书没有给出知识网络图，也没有详尽的知识点的梳理，更没有在各章综述和教学目标的条条杠杠上过多做文章，原因是这方面的资料市场上很多，上海科学普及出版社出版的由我著的《高中数学解题宝典 & 考点解密》中有详尽的叙述.本丛书我把重点放在学法的点拨和解题方法的指导上，把知识点、解题通法、数学思想融合在一起，言简意赅，重点突出.本丛书共有3本——《知识点贯通·题典》、《解题策略》、《应试精练》，可以独立成篇供选用，也可相互配合综合运用.《知识点贯通·题典》一般可放在高三第一轮复习时用，也可作为高一、高二学生提升解题能力的教辅.《解题策略》、《应试精练》可贯穿于高三复习的全过程，也可供高一、高二学生选用.

下面主要讲一讲《知识点贯通·题典》的特色：

本书的特色之一是兼顾各版教材，全面贯通知识.

全书把高中数学按60个知识性专题一一讲下来，逐章深入，以达到覆盖全部教学内容的目的.由于各省市在教材的内容上尚不完全相同，如全国教材有导数初步，则本书配合另辟一章，撰写了三讲："函数的极限、导数"、"导数的应用"、"定积分及其应用"；解析几何圆锥曲线部分，上海市教材与全国及其他省市教材的要求也不一样，于是关于圆锥曲线的第二定义也专门设置一讲等等，这样的安排有利于不同教材的学生使用.

以我的教学经验，有些学生数学成绩差，最严重的问题是数学知识上盲点太多，无法构建考点网络，问题的解答势必受阻，所以消除盲点，贯通知识是应当首先解决的目标.那么如何才能有效地消除盲点呢？优秀的教师总是把知识点体现在具体的问题之中：问题解决了，知识点也就"敲牢"了.我喜欢在引导学生解决问题的过程中再现知识，这样做使学生"常有醍醐灌顶，豁然开朗之感"、"在不知不觉中很好地掌握了一个知识体系"（我的学生语）.

本书的特色之二是引导学生掌握解题通法.

通法也就是最为基本的解题方法,教会学生掌握通法应当是数学教育最为基本的要求.本书精选例题,由基础题开始,再逐渐加大难度,每讲给出"学法点拨",每例展示"策略点击",引导学生提出问题、提炼重点、抓住关键,进行由此及彼的思考.当你弄懂了一道例题,理清了一些数学概念,掌握了若干数学方法,从而能解决一批习题,当你达到了"举一反三"的境界之时,你的学习就成功了.

本书的特色之三是解读名题.

大数学家希尔伯特说:"尽管数学知识千差万别,我们仍然清楚地意识到:作为整体的数学中,使用着相同的逻辑工具,存在着概念的亲缘关系,同时在它的不同部分之间,也有大量相似之处."这里的名题通常是经历时间洗礼或近年来高考中涌现出来具有创新精神的精彩好题,典型性强,具有启迪思维,揭示规律性的内涵.解读这类名题,也就是展示解题过程中存在的逻辑之美、节奏之美、数学思想之美.宋代理学家朱熹有一首《观书有感》的诗写得很精彩:"半亩方塘一鉴开,天光云影共徘徊。问渠哪得清如许,为有源头活水来。"学习数学也要追求豁然开朗,把书读活的感觉.

本书的特色之四是每讲配有实战训练试卷.

实战训练 60 套题量统一,区分度好,其中不乏近年涌现的妙题、好题、新题,创新题、能力题、压轴题,既可作为学习本讲后巩固提高的训练卷,也可作检测之用.

前一阶段人代会上出现过退休年龄不要一刀切的提案,本人深有同感,一名高中数学教师要对全部教材达到融会贯通以臻自如的境界,没有 20 年执教经验、没有执教过八届十届毕业班的功夫是很难达到的,我就是在执教了 14 届毕业班以后才开始撰写并出版了 14 本数学教育专著.然而当你达到对教材教法、学生学法等方面了如指掌,在课堂教学中随机应变、左右逢源,能"发挥到极至"之时就停下来了,这是很可惜的,于是就有了"正兴数学辅导工作室",这是我读书、写作、辅导的场所,退休生活显得充实,既能满足社会需求,也能为教育事业再做点贡献.

上海科学普及出版社徐林林、张建青两位编辑对本丛书的出版做了大量的工作,在此向他们表示衷心感谢.我还要感谢我的妻子杨蕙芬,正是由于她的支持,才能使我能静下心来写作,新世纪以来每年有新著出版.

限于本人水平,疏漏之处在所难免,欢迎读者批评指正.

E-mail:lizhengxing@hotmail.com

李正兴

二〇〇九年十二月十八日

于海上述而斋

目　录

第一章　集合和命题

高中数学课程以"集合和命题"作为开端是非常必要的.集合论是现代数学的基础,它的创始人是德国数学家康托尔.集合作为一种语言将贯穿在整个高中数学内容中;而集合与命题之间的联系以及基本的逻辑关系在数学表达和论证中起到十分重要的作用.

本章主要阐述两大部分内容,一是集合的一些初步知识,二是命题与条件.集合的初步知识包括:集合的有关概念、集合的表示及集合与集合之间的关系、集合的运算和对有限集的进一步研究等.命题与条件主要包括:命题的基本知识、四种命题形式及其相互关系、条件的判别等.

至今,集合理论和方法已渗透到现代数学的各个领域,如数学分析、泛函分析、概率论、信息论……,掌握集合思想已成为现代人应具备的数学素质,正如数学家A·N·科尔莫戈洛夫所言:"康托尔的不朽功绩,在他敢于向无穷大冒险迈进,他对似是而非之论,流行的成见,哲学的教条等作了长期不懈的斗争,由此使他成为一门新学科的创造者,这门学科(指集合论)今天已经成了整个数学的基础."

第一讲　集合的概念与运算

一、学法点拨

1. 理解集合的概念,掌握集合的两种表示方法(列举法与描述法),领会集合中元素的确定性、互异性和无序性,以及元素与集合的"属于"或"不属于"关系.

2. 能对集合不同表示方法作转换,明确元素的形式,理解集合之间的"包含"、"真包含"与"相等"关系,注意空集在解题中的运用.

3. 理解集合运算的含义,会进行集合间的"交"、"并"、"补"运算,并注意集合的包含关系与集合运算的联系,如$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$等,还要会运用文氏图表示集合运算.

4. 注意集合与方程、不等式、函数、解析几何等知识的联系,掌握集合的思想方法,特别是依据"正难则反"的原则运用"补集法"解题,在各类集合的运用中提高能力.

二、例题精讲

例1　(1) 将下列集合用列举法表示:

① 集合$A=\{y\mid y=x^2-1,\ |x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}\}$,② 集合$B=\{(x,y)\mid y=x^2-1,\ |x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}\}$;

(2) 已知集合$A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x+a}{x^2-2}=1\right\}$有唯一元素,用列举法表示满足条件的$a$的集合.

策略点击: 对于(1),集合A的元素是数y,它满足函数关系$y=x^2-1$在$|x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}$时$y$的取值,也是函数的值域;集合$B$的元素是点的坐标,是满足函数关系$y=x^2-1$在$|x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}$时对应的点集.前者是数,后者是形,是集合研究的两种重要对象.对于(2),解题关键是将集合的符号语言转换成图形语言,利用函数的图像分析自变量与函数值的对应关系,解题过程中注意不要忽视元素x的隐性限制条件$x^2\neq 2$.

解: (1) $\because\ |x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}$,$\therefore\ x=\pm 2、\pm 1、0$,对应的$y$值分别为$3、0、-1$,

集合A表示函数$y=x^2-1$在$|x|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{Z}$条件下的值域,$\therefore\ A=\{3,0,-1\}$.

集合 B 表示函数 $y=x^2-1$ 在 $|x|\leqslant 2$，$x\in\mathbf{Z}$ 条件下的点集，$\therefore B=\{(2,3),(-2,3),(-1,0),(1,0),(0,-1)\}$.

(2) 由集合中元素性质条件将 $\dfrac{x+a}{x^2-2}=1$ 转化为 $a=x^2-x-2$，$(x\neq\pm\sqrt{2})$.

函数 $y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$ $(x\neq\pm\sqrt{2})$ 的图像为挖去两点 $M(\sqrt{2},-\sqrt{2})$、$N(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 的抛物线，如图 1-1 所示.

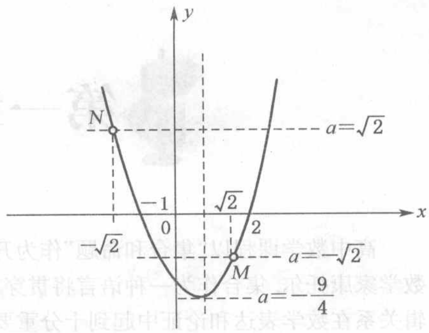


图 1-1

可知，当 $a=-\dfrac{9}{4}$ 时，x 有唯一值 $x=\dfrac{1}{2}$；

又 $x\neq\sqrt{2}$，故当 $a=-\sqrt{2}$ 时，x 有唯一值 $x=1+\sqrt{2}$；
又 $x\neq-\sqrt{2}$，故当 $a=\sqrt{2}$ 时，x 有唯一值 $x=1-\sqrt{2}$.

因此满足条件的 a 的集合为 $\left\{-\dfrac{9}{4},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

例 2 已知 $A=\{1,1+d,1+2d\}$，$B=\{1,r,r^2\}$ 其中 $d\neq 0$，$r\neq 1$. 若 $A=B$，试求集合 A.

策略点击： 两集合相等即为其中元素对应相等，而集合中的元素具有无序性，所以本题中元素的对应有两种形式，又集合中的元素具有互异性，所以对求出的 r、d 必须验证. 可见，数学概念是数学的核心，抓住了数学概念也就抓住了解题的根本.

解： 若 $\begin{cases}1+d=r, & ①\\ 1+2d=r^2, & ②\end{cases}$ ① 代入 ② 得 $1+2d=(1+d)^2$，解得 $d=0$ 与条件 $d\neq 0$ 矛盾；

$\therefore \begin{cases}1+d=r^2, & ③\\ 1+2d=r, & ④\end{cases}$ ④ 代入 ③ 得 $1+d=(1+2d)^2$，$\therefore d=0$（舍去）或 $d=-\dfrac{3}{4}$.

$\therefore A=B=\left\{1,\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}\right\}$.

例 3 (1) 设 $A=\{x\mid x^2-5x-6=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid ax^2-x+6=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的值；

(2) 集合 $A=\{x\mid x^2-(a+1)^2x+2a^3+2a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0\}$，求使 $A\subseteq B$ 成立的实数 a 的取值范围.

策略点击： 对于(1)，讨论两个方程解集之间的关系，由 $B\subseteq A$，应对 B 可能的情况逐个加以讨论，排除不可能的取值；对于(2)，讨论两个不等式解集之间的关系，B 中不等式 $x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0$ 左端因式分解后得 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$，则必须对 $3a+1$ 与 2 的大小关系进行分类讨论，再结合 $A\subseteq B$ 这一关系求出实数 a 的取值范围.

分类讨论是一种十分重要的数学思想方法，运用原则是：合理分类，不重复、不遗漏.

解： (1) 由已知得 $A=\{-1,6\}$，$\because B\subseteq A$，$\therefore B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{6\}$ 或 $B=\{-1,6\}$（列举所有可能情况，别忘记空集是任何集合的子集）.

① 若 $B=\varnothing$，则 $a\neq 0$ 且 $\Delta=(-1)^2-4\cdot a\cdot 6<0$，解不等式得 $a>\dfrac{1}{24}$.

② 若 $B=\{-1\}$，则 $a\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$，解方程得 $a=-7(\neq 0)$.

代入原方程得 $-7x^2-x+6=0$，即 $B=\left\{-1,\dfrac{6}{7}\right\}$，矛盾（必须检验：是否与题设矛盾，是否与集合元素之特征矛盾）.

③ 若 $B=\{6\}$，则 $a\cdot 6^2-6+6=0$，解方程得 $a=0$，
则 $B=\{x\mid -x+6=0,x\in\mathbf{R}\}=\{6\}$，$\therefore a=0$.

④ 若 $B=\{-1,6\}$，则 $a\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$ 且 $a\cdot 6^2-6+6=0$，依次解方程得 $a=-7$ 且 $a=0$，矛盾.

综上，$a>\dfrac{1}{24}$ 或 $a=0$.

(2) $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$,(当且仅当 $a=1$ 时 $A=\{2\}$)

$x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0\Rightarrow(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$(必须分类讨论 2 与 $3a+1$ 的大小关系).

① 当 $3a+1>2$,即 $a>\dfrac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$,

$\because A\subseteq B$,$\therefore 2a\geqslant 2$ 且 $a^2+1\leqslant 3a+1$,$\therefore a\geqslant 1$ 且 $0\leqslant a\leqslant 3$,$\therefore a\in[1,3]$.

② 当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时,$A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{10}{9}\right\}$,$B=\{2\}$,$\therefore A\subseteq B$ 不可能成立.

③ 当 $3a+1<2$,即 $a<\dfrac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

$\because A\subseteq B$,$\therefore 3a+1\leqslant 2a$ 且 $a^2+1\leqslant 2$,$\therefore a\leqslant -1$ 且 $-1\leqslant a\leqslant 1$,$\therefore a=-1$.

综上,所求实数 a 的取值范围是 $a=-1$ 或 $1\leqslant a\leqslant 3$.

例 4 (1) 已知全集为 $\mathbf{R}$,$A=\{x\mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1\right\}$,求$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$;

(2) 已知集合 $A=\{x\mid x^2+x-2\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid 2<x+1\leqslant 4\}$,$C=\{x\mid x^2+bx+c>0\}$,且 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求 b、c 的值.

策略点击:第(1)小题考查集合的表示、集合的运算、对数不等式及分式不等式的解法等数学基础知识和基本解题技能,解答时应通过求解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$ 及 $\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1$ 得到集合 A、B. 在进行集合运算时,通常借助数轴,这样可以直观地获得正确的结果. 解不等式时必须注意思维的严谨性. 解对数不等式应"抓住单调性,不忘定义域"实现超越不等式向一般代数不等式的转化.

第(2)小题在求解时一般先将参与运算的集合化简,再进行求解. 关键是把 $A\cup B$ 看作一个整体,该集合与集合 C 的交集为空集、并集为全集,因此该集合为集合 C 在 $\mathbf{R}$ 中的补集,进而求得集合 C. 本题的最终目标是求 b、c 的值. 而从条件与结论的匹配关系来看,集合 A、B、C 的限制条件均为不等式,如何从中获得等量关系进而求出 b、c 的值呢? 这就要从一元二次不等式、一元二次方程和二次函数这三者之间的关系入手,这是一种十分重要的思想方法. 要善于从数和形、等与不等、等价转化等角度去深刻理解这三者之间的关系.

解:(1) 由 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$ 得 $\begin{cases}3-x\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2},\\ 3-x>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x<3,\end{cases}$ $\therefore -1\leqslant x<3$.

$\therefore A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$,$\therefore \complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x<-1\}$.

由 $\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1$ 得 $\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$,解得 $-2<x\leqslant 3$,$\therefore B=\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$.

如图 1-2 所示,得$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid -2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

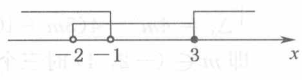


图 1-2

(2) $\because A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$,

$\therefore A\cup B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$.

由 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,得 $C=\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$.

又 $C=\{x\mid x^2+bx+c>0\}$,故 -2,3 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根. 由韦达定理可得:$b=-1$,$c=-6$.

例 5 已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$,集合 $B=\{(x,y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=30\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的值.

策略点击:本题的解法可以是:把集合 A、B 看作二元方程的解集,从而把 $A\cap B=\varnothing$ 转化为一个二元方程组无解的问题加以讨论,这是一种解题视角. 若把 A、B 看作是坐标平面上的点集,把问题转化为解析几何中直线问题求解,这是解决这一问题的另一视角. 从前面的分析可知,对同一问题观察的视角不同,解题的出发点也就不同,解法自然也就不同. 下面提供的是前一种解法,后一种解法的思路是:联立方程组 $\begin{cases}l_1:(a^2-1)x+(a-1)y=30,\\ l_2:(a+1)x-y=2a-1(x\neq 2),\end{cases}$ ① 验证 $a=\pm 1$ 时的情况;② $l_1\,/\!/\,l_2\Leftrightarrow\dfrac{a^2-1}{a+1}=\dfrac{a-1}{-1}\neq\dfrac{30}{2a-1}$,

求 a 的值；③ 以 $(2,\ 3)$ 代入求 a；综合 ①、②、③ 得 $A\cap B=\varnothing$ 时 a 的值.

解：由 $A\cap B=\varnothing$，即方程组 $\begin{cases}\dfrac{y-3}{x-2}=a+1,\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\end{cases}$ 无解，

即混合组 $\begin{cases}y-3=(a+1)(x-2), & ①\\(a^2-1)x+(a-1)y=30, & ②\\x\neq 2\end{cases}$ 无解.

由 ① 得 $y=(a+1)(x-2)+3$ 代入 ② 并整理得 $2(a^2-1)x=2a^2-3a+31$. ③

当 $a^2-1=0$ 即 $a=\pm 1$ 时，方程 ③ 无解；

当 $a^2-1\neq 0$ 时，$x=\dfrac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}$，令 $\dfrac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}=2$，解得 $a=-5$ 或 $\dfrac{7}{2}$.

故所求 a 的值为 $\pm 1,\ -5,\ \dfrac{7}{2}$.

三、名题解读

例 1 已知三个方程 $\begin{cases}x^2-mx+4=0,\\x^2-(m-1)x+16=0,\\x^2+2mx+3m+10=0\end{cases}$ 中至少有一个方程有实根，求实数 m 的取值范围.

解法导析：本题从正面理解"至少"可得 3 类：①只有一个方程有实根，有三种情况；②只有两个方程有实根，有三种情况；③三个方程都有实根，有一种情况，一一解来问题显得繁杂. 从反面理解，三个方程都没有实根，只有此一种情况，而它的反面就是至少有一个方程有实根的种种情况，这就提醒我们可以运用补集的思想方法. 即求出三个方程都没有实根时 m 的取值范围，再求它相对于 $\mathbf{R}$ 的补集. 从中可以看出正与逆必是事物矛盾的双方，反映在数学解题中主要体现于解题的思维进程上. 如通常把综合法的解题方法称为"正"，而把分析法、反证法的解题方法称为"逆". 同样，一般问题的解决过程，总是先从正面入手，进行思考，这是解题的一种基本思想方法. 但有时会遇到从正面入手不易解决，这时应从问题的反面去思考，也就是"正难则反". 而补集法正是"正难则反"的体现，用这种方法可以收到意料不到的功效，因为这种"逆"恰好弥补了"正"的不足.

解：从反面看，若三个方程都没有实根，则

$$\begin{cases}\Delta_1=m^2-16<0,\\\Delta_2=(m-1)^2-64=(m-9)(m+7)<0,\\\Delta_3=4m^2-4(3m+10)=4(m-5)(m+2)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<m<4,\\-7<m<9,\\-2<m<5\end{cases}\Rightarrow -2<m<4.$$

即 $m\in(-2,\ 4)$ 时三个方程都没有实根.

再求补集得三个方程至少有一个方程有实根时 $m\in(-\infty,\ -2]\cup[4,\ +\infty)$.

例 2 已知函数 $F(x)=kx^2-2\sqrt{4+2m-m^2}\,x$，$G(x)=-\sqrt{1-(x-k)^2}$，$m、k\in\mathbf{R}$.

(1) 求同时满足下列两个条件的所有实数对 $(m,\ k)$，

甲：$F(x)$ 取得最大值时的 x 值与 $G(x)$ 取得最小值时的 x 值相同；

乙：k 为整数.

(2) 把满足上述条件甲的实数对 $(m,\ k)$ 的集合记为 A，设 $B=\{(m,\ k)\mid(m-1)^2+k^2\leqslant r^2,\ r>0\}$. 求使 $A\subseteq B$ 的 r 的取值范围.

解法导析：求解本题的难点在第(2)小题，攻克之道是一要正确领会子集的定义. 即对于 $A\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，都有 $x\in B$；

二要在解题时需仔细观察集合 A、B 中等式与不等式的特点，运用构造和换元的思想方法. 学习数学必须善于解题，解题意味着找到一条摆脱疑难、绕过障碍的途径，实现从已知到未知的转化. 而构造法解题的巧妙之处是不直接去解决问题 A，而是构造一个与问题 A 有关联的辅助问题 B，通过 B 的帮助解决问题 A. 如果构造的问题 B 比问题 A 更简单直观，那么这种思想方法是正确的，具有创造性的. 本题中可以运用

构造函数的方法，当构造的函数仍然较为复杂时，换元法可以出来帮忙，换元法能使问题中的数量关系明朗化，起到化难为易的效果. 换元法的关键在于选择适当的辅助未知数. 用此方法解题时要注意取值范围，根据题中的条件验证结果. 而三角换元法常可以达到把无理式转化为有理式，再运用三角知识求解. 这种题型对学生的创造性思维素质的培养具有很好的促进作用.

解：(1) $F(x)$ 取得最大值时，必有 $\begin{cases} k<0, \\ x=\dfrac{\sqrt{4+2m-m^2}}{k}, \end{cases}$

$G(x)$ 取得最小值时，$x=k$.

由题意，得 $\dfrac{\sqrt{4+2m-m^2}}{k}=k$，即 $k^2=\sqrt{4+2m-m^2}$. ①

$\because \sqrt{4+2m-m^2}=\sqrt{5-(m-1)^2}\leqslant\sqrt{5}$，$\therefore k^2\leqslant\sqrt{5}$.

又因为 k 是整数，$k<0$，$\therefore k=-1$.

代入 ①，得 $m=3$ 或 $m=-1$.

故满足题设条件的实数对为 $(3,-1)$ 和 $(-1,-1)$.

(2) 由(1) 知 $A=\{(m,k)\mid k^2=\sqrt{4+2m-m^2},\ k<0\}$.

通过观察集合 A、B，构造函数

$$f(m)=(m-1)^2+k^2=\sqrt{5-(m-1)^2}+(m-1)^2.$$

为了化无理式为有理式，不妨采用三角换元法.

令 $m-1=\sqrt{5}\cos\theta$，$0<\theta<\pi$，则

$$f(\theta)=\sqrt{5}\sin\theta+5\cos^2\theta=-5\sin^2\theta+\sqrt{5}\sin\theta+5=-5\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2+\frac{21}{4}\leqslant\frac{21}{4}.$$

$\because A\subseteq B$，必须且只须 $r^2\geqslant\dfrac{21}{4}$，所以正数 $r\geqslant\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

实战训练一 集合的概念与运算

一、填空题

1. 若集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4<0,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap\mathbf{N}^*$ 的真子集的个数是________.
2. 已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$. 若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$________.
3. $A=\{x\mid |x-a|\leqslant1\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant0\}$，$A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.
4. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，则满足 $B\subsetneqq A$ 的实数 m 的一切值为________.
5. 已知集合 $A=\{y\mid y=\log_2 x,\ x>1\}$，$B=\left\{y\,\middle|\, y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x},\ x>1\right\}$，则 $A\cup B=$________.
6. 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+p-1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则实数 p 的取值范围是________.
7. 设 $A=\{(x,y)\mid y=x+k,\ x、y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x^2-3x,\ x、y\in\mathbf{R}\}$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则 k 的取值范围是________.
8. 设集合 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid \log_2 x<1,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid |x-2|<1,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap(\complement_I B)=$________.
9. 集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$B=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$，其中 $r>0$，若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素，则 r 的值是________.
10. 设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15),\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\cos\dfrac{x}{2}>0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数是________.

11. 含有三个实数的集合既可表示为$\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$，也可表示为$\{a^2, a+b, 0\}$，则$a^{2009}+b^{2010}=$______.

12. 已知集合$A=\{0, 2, 3, 5, 8\}$，$B=\{1, 3, 5, 7, 10\}$，如果集合C满足：① 若将C中的各元素均减去2，则所得新集合C_1为集合A的一个子集；② 若将C中的各元素均加上3. 则所得新集合C_2为集合B的一个子集. 那么满足以上两个条件，且所含有的元素个数最多的集合$C=$______.

二、选择题

13. 设全集$I=\{(x, y) \mid x, y\in\mathbf{R}\}$集合$M=\left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x, y) \mid y\neq x+1\}$，则$\complement_I(M\cup N)$等于(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{(2, 3)\}$　　C. $(2, 3)$　　D. $\{(x, y) \mid y=x+1\}$

14. 已知全集$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，集合A、$B\subsetneqq U$，若$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1, 5\}$，则下列结论中正确的是(　　).

A. $3\in A, 3\in B$　　B. $3\notin A, 3\notin B$　　C. $3\notin A, 3\in B$　　D. $3\in A, 3\notin B$

15. 若集合$A=\{x \mid x<a\}$，$B=\{x \mid 1<x<2\}$，且$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，则实数$a$的取值范围是(　　).

A. $a\leqslant 1$　　B. $a<1$　　C. $a\geqslant 2$　　D. $a>2$

16. 若集合A_1、A_2满足$A_1\cup A_2=A$，则称(A_1, A_2)为集合A的一种分拆，并规定：当且仅当$A_1=A_2$时，(A_1, A_2)与(A_2, A_1)为集合A的同一种分拆，则集合$A=\{a_1, a_2, a_3\}$的不同分拆种数是(　　).

A. 27　　B. 26　　C. 9　　D. 8

17. 对于集合P和Q，定义$P-Q=\{x \mid x\in P$，且$x\notin Q\}$，若$P=\{x \mid \log_2 x<1\}$，$Q=\{x \mid |x-2|<1\}$，则$P-Q$为(　　).

A. $\{x \mid 0<x<1\}$　　B. $\{x \mid 0<x\leqslant 1\}$　　C. $\{x \mid 1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x \mid 2\leqslant x<3\}$

18. 设函数$f(x)=\frac{x}{|x|+1}\ (x\in\mathbf{R})$，区间$M=[a, b]\ (a<b)$，集合$N=\{y \mid y=f(x), x\in M\}$，则使$M=N$成立的实数对$(a, b)$有(　　).

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 无数多个

三、解答题

19. 设集合$A=\{x \mid |x-a|<2\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, \frac{2x-1}{x+2}<1\right\}$，若$A\subseteq B$，求实数$a$的取值范围.

20. 已知全集$I=\{$不超过10的正奇数$\}$，它的两个子集$A=\{1, 3, a^2-a+3\}$，$B=\{1, 5, a^3+a^2-2a+7\}$，且$3\in A\cap(\complement_I B)$，求：

(1) 实数a的值；

(2) $A\cap B$和$A\cup B$；

(3) $A\cup B\neq I$，且集合M满足$A\cap B\subsetneqq M\subsetneqq A\cup B$时，求$M$的子集个数.

21. 设a、b是两个实数，$A=\{(x, y) \mid x=n, y=na+b, n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x, y) \mid x=m, y=3(m^2+5), m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 144\}$，讨论是否存在$a$和$b$，使得$A\cap B\neq\varnothing$且$(a, b)\in C$.

22. 已知集合$A=\{x \mid x^2-(m+3)x+2(m+1)=0, m\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid 2x^2+(3n+1)x+2=0, n\in\mathbf{R}\}$，

(1) 若$A\cap B=A$，求m、n的值；

(2) 若$A\cup B=A$，求m、n的值.

23. (1) 设$a\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=ax^2-2x-2a$，若$f(x)>0$的解集为A，$B=\{x \mid 1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数a的取值范围；

(2) 设集合$A=\{(x, y) \mid y=2x-1, x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x, y) \mid y=ax^2-ax+a, x\in\mathbf{N}^*\}$，问是否存在非零整数$a$，使$A\cap B\neq\varnothing$?若存在，求出$a$的值及$A\cap B$；若不存在，请说明理由.

24. 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合：

① $1\notin S$；② 若 $a\in S$，则 $\dfrac{1}{1-a}\in S$. 求解下列问题：

(1) 若数列 $\{2\cdot(-1)^n\}$ 中的项都在 S 中，求 S 中所含元素个数最少的集合 S^*；

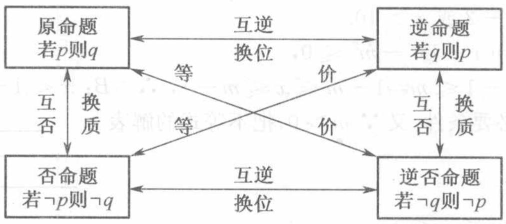
(2) 在 S^* 中任取 3 个元素 a、b、c，求使 $abc=-1$ 的概率；

(3) S 中所含元素个数一定是 $3n\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 个吗？若是，请给出证明；若不是，试说明理由.

第二讲　命题与充要条件

一、学法点拨

1. 四种命题反映出命题之间的内在联系，要注意结合实际问题理解其关系——特别是两种等价关系的产生过程，了解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义，正确表达相关数学内容：



2. 理解推出关系及命题证明的意义，会用反证法证明简单的数学命题，其一般步骤为：

① 反设：假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

② 归谬：从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

③ 结论：由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

3. 理解充分条件、必要条件与充要条件的含义，并能用来判别一些简单的数学问题的充分性与必要性. 有关充要条件探求问题中，易犯的解题错误是用"必要条件"（或充分条件）去替代"充要条件"，所以要深刻理解充要条件的定义，即就是要准确把握"若 p 则 q"的命题中条件和结论的逻辑关系，提高数学判断的能力.

二、例题精讲

例 1　命题甲：数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列；命题乙：数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=an^2+bn$ $(n\in\mathbf{N}^*)$（a、b 为常数，$n\neq 0$），判断这两个命题是否等价，并说明理由.

策略点击： 两命题等价，即可以互相推出，也即充要条件的证明，要证明命题 A 与命题 B 等价，既要从 A 推出 B，又要从 B 推出 A，两个方面都要进行论证.

解： 等价. 理由如下：

因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设它的公差为 d，首项为 a_1，则 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

$\because d\neq 0$，a_1 和 d 是确定的常数，

$\therefore S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，其中 $a=\dfrac{d}{2}$，$b=a_1-\dfrac{d}{2}\ (d\neq 0)$，故 S_n 是一个关于 n 的二次函数，且常数项为 0.

反之，若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=an^2+bn\ (n\in\mathbf{N}^*,\ a\neq 0)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=a+b$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=an^2+bn-a(n-1)^2-b(n-1)=2an-a+b$.

当 $n=1$ 时，$a_1=a+b$，$\therefore a_n=2an-a+b$，$(n\in\mathbf{N}^*)$.

$a_{n+1}-a_n=2a(n+1)-a+b-2an+a-b=2a\neq 0$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以数列 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列.

例 2 (1) 已知 A：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$B$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\ (m>0)$. 若 $\neg A$ 是 $\neg B$ 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围；

(2) 设有两个命题：①"关于 x 的不等式 $x^2+(a-1)x+a^2>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$"；②"函数 $f(x)=(2a^2+a+1)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数"，若命题①和②中至少有一个是真命题，求实数 a 的取值范围.

策略点击： 对于(1)，解不等式 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ 应注意式子的特点：$x^2-2x+1=(x-1)^2$，就很容易求解；$\neg A$ 是 $\neg B$ 的充分不必要条件是 $\neg A\subsetneqq\neg B$，由于 $\neg A\Rightarrow\neg B$ 的逆否命题是：$B\Rightarrow A$，所以本题也可以由 B 是 A 的充分不必要条件求 m 的取值范围；由 $\neg A\subsetneqq\neg B$ 布列不等式，再借助数轴寻求 m 的取值范围是好方法. 对于(2)，命题①和②中至少有一个是真命题时 a 的取值范围是命题①和②均为假时 a 的取值范围的补集.

解：(1) **解法一：** $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2\Leftrightarrow -2\leqslant 1-\dfrac{x-1}{3}\leqslant 2\Leftrightarrow -3\leqslant -\dfrac{x-1}{3}\leqslant 1\Leftrightarrow -3\leqslant x-1\leqslant 9\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 10$，$\therefore \neg A$：$x<-2$ 或 $x>10$.

$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\Leftrightarrow (x-1)^2-m^2\leqslant 0$，

$\because m>0$，$\therefore -m\leqslant x-1\leqslant m\Leftrightarrow 1-m\leqslant x\leqslant m+1$，$\therefore \neg B$：$x<1-m$ 或 $x>m+1$.

$\because \neg A$ 是 $\neg B$ 的充分不必要条件，又 $\because m>0$，把不等式的解表示在数轴上，如图 1-3 所示，

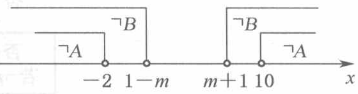


图 1-3

$\therefore \begin{cases} m>0, \\ 1-m\geqslant -2, \\ 1+m\leqslant 10, \end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 3$.

解法二： 同解法一，得 $A=[-2, 10]$，$B=[1-m, 1+m]$.

若 $B\Rightarrow A$，则有 $B\subseteq A$，如图 1-4 所示，

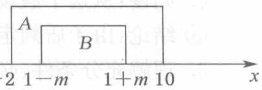


图 1-4

$\therefore \begin{cases} 1-m\geqslant -2, \\ 1+m\leqslant 10, \\ m>0, \end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 3$.

(2) 设命题①为假，则 $(a-1)^2-4a^2\geqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant \dfrac{1}{3}$；

再设命题②为假，则 $2a^2+a+1\leqslant 0$ 或 $2a^2+a+1\geqslant 1\Leftrightarrow a\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 或 $a\geqslant 0$.

若命题①、②同时为假，则 $-1\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 或 $0\leqslant a\leqslant \dfrac{1}{3}$.

从而命题①、②中至少有一个为真时，a 的取值范围是 $a<-1$ 或 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 或 $a>\dfrac{1}{3}$.

例 3 (1) 求关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$ 的两个实根均大于 1 的充要条件；

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=p^n+q\ (p\neq 0,\ p\neq 1)$，求数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件.

策略点击： 充要条件的求解中，由于考虑不周，通常易犯的错误是用"必要条件"(或充分条件)去替代"充要条件"，所以准确把握充要条件的证明，应从两个方面"操作". 一般地，证明"A 是 B 的充要条件"时，充分性应证明 $A\Rightarrow B$，必要性应证明 $B\Rightarrow A$；证明"A 的充要条件是 B"时，充分性应证明 $B\Rightarrow A$，必要性应证明 $A\Rightarrow B$. 这是充要条件证明问题中常见的两类情形，即要分清什么是条件部分，什么是结论部分，要仔细把握两者的区别与联系. 对于(1)，可以从方程角度入手，也可以转化为函数，通过图像特征寻求充要条件. 对于(2)，解题关键是抓住数列前 n 项和与通项之间的内在联系，严格运用定义判定，即既要由 $a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2) \end{cases}$ 的关系寻找 a_{n+1} 与 a_n 的比值，同时又要注意充分性的证明. 充要条件的探求中，运用"$\Leftrightarrow$"是一种简洁明了的"方式".

解：(1) **解法一**：设方程的两根为 x_1、x_2，则

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1>1,\\ x_2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1-1>0,\\ x_2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ (x_1-1)+(x_2-1)>0,\\ (x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2>2,\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -2k+1>2,\\ k^2+2k>0\end{cases}$$

解得 $k<-2$.

解法二：记 $f(x)=x^2+(2k-1)x+k^2$，所求充要条件为

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -\dfrac{2k-1}{2}>1,\\ f(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2k-1)^2-4k^2\geqslant 0,\\ k<-\dfrac{1}{2},\\ 1+2k-1+k^2>0,\end{cases}$$ 解得 $k<-2$. 所求的充要条件是 $k<-2$.

(2) $\because a_1=S_1=p+q$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^{n-1}(p-1)$，

而 $p\neq 0$ 且 $p\neq 1$，$\therefore n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)}=p$.

若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p$，$\therefore \dfrac{p(p-1)}{p+q}=p$.

$\because p\neq 0$，$\therefore p-1=p+q$，$\therefore q=-1$. 这是 $\{a_n\}$ 为等比数列的必要条件.

下面证明 $q=-1$ 是 $\{a_n\}$ 为等比数列的充分条件.

当 $q=-1$ 时，$S_n=p^n+1\ (p\neq 0,\ p\neq 1)$，$a_1=S_1=p-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=p-1$.

$\therefore a_n=(p-1)p^{n-1}\ (p\neq 0,\ p\neq 1)$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(p-1)p^{n-1}}{(p-1)p^{n-2}}=p$ 为常数.

$\therefore q=-1$ 时数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，即数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件为 $q=-1$.

例 4 已知函数 $f(x)=a^x+\dfrac{x-2}{x+1}\ (a>1)$.

(1) 证明：函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数；

(2) 用反证法证明方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

策略点击：对于(1)，用直接证法；对于(2)，用间接证法(反证法)，两者可作比较，从而找出两种证法思路上表达上的异同. 反证法的证题思路是：先假设所证命题结论的反面成立，然后设法导出矛盾. 这个矛盾可以是对所证命题的已知条件的否定，也可以是对某公理或某定理的否定，无论是哪一种否定都说明假设是错误的，于是所证命题的结论应该成立. 反证法的理论依据是逻辑学和集合论.

证明：(1) 任取 x_1、$x_2\in(-1,+\infty)$. 不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$a^{x_2-x_1}>1$ 且 $a^{x_1}>0$，

$\therefore a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>0$.

又 $\because x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

$\therefore \dfrac{x_2-2}{x_2+1}-\dfrac{x_1-2}{x_1+1}=\dfrac{(x_2-2)(x_1+1)-(x_1-2)(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{3(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)}>0$，

于是 $f(x_2)-f(x_1)=a^{x_2}-a^{x_1}+\dfrac{x_2-2}{x_2+1}-\dfrac{x_1-2}{x_1+1}>0$，

故函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数.

(2) **证法一**：假设存在 $x_0<0\ (x_0\neq -1)$ 满足 $f(x_0)=0$，即设方程 $f(x)=0$ 有负根 x_0，则 $a^{x_0}=-\dfrac{x_0-2}{x_0+1}$，$\because x_0<0$ 且 $a>1$，由指数函数的性质得 $0<a^{x_0}<1$，

$\therefore 0<-\dfrac{x_0-2}{x_0+1}<1$，即 $\dfrac{1}{2}<x_0<2$，与假设 $x_0<0$ 矛盾. 故方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

证法二：假设存在 $x_0<0\ (x_0\neq -1)$ 满足 $f(x_0)=0$.

① 若 $-1<x_0<0$，则 $\dfrac{x_0-2}{x_0+1}<-2$，$a^{x_0}<1$，$\therefore f(x_0)<-1$ 与 $f(x_0)=0$ 矛盾；

② 若 $x_0<-1$，则 $\dfrac{x_0-2}{x_0+1}>0$，$a^{x_0}>0$，∴ $f(x_0)>0$ 与 $f(x_0)=0$ 矛盾.

故方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

三、名题解读

例 已知函数 $f(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|$ ($a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq-2$).

(1) 若 $f(x)$ 能表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 的和，求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的解析式；

(2) 命题 p：函数 $f(x)$ 在区间 $[(a+1)^2,+\infty)$ 上是增函数；命题 q：函数 $g(x)$ 是减函数，如果命题 p 且 q 为假、p 或 q 为真，求 a 的取值范围；

(3) 在(2)的条件下，比较 $f(2)$ 与 $3-\lg 2$ 的大小.

解法导析：本题立意新颖，衔接自然流畅，在考查命题知识的同时，主要考查命题转换、逻辑推理和分析问题的能力，还能考查学生从条件下提炼出解题关键信息的能力. 同时考查的知识点也比较多.

命题转换是解决数学问题的一种重要的策略，最为重要的是应准确地把握问题的条件和结论，多角度思维，这样才能有助于选择恰当的命题转换方式. 数学是一门科学，在解决数学问题时常常要运用科学方法，根据公理、定义、定理和公式严密推断结论的真实性.

解：(1) ∵ $f(x)=g(x)+h(x)$，$g(-x)=-g(x)$，$h(-x)=h(x)$，∴ $f(-x)=-g(x)+h(x)$.

∴ $\begin{cases}g(x)+h(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|,\\-g(x)+h(x)=x^2-(a+1)x+\lg|a+2|.\end{cases}$ 解得 $g(x)=(a+1)x$，$h(x)=x^2+\lg|a+2|$.

(2) ∵ 函数 $f(x)=\left(x+\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)^2}{4}+\lg|a+2|$ 在区间 $[(a+1)^2,+\infty)$ 上是增函数，

∴ $(a+1)^2\geqslant-\dfrac{a+1}{2}$，解得 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\dfrac{3}{2}$ 且 $a\neq-2$.

又由函数 $g(x)=(a+1)x$ 是减函数，得 $a+1<0$，∴ $a<-1$ 且 $a\neq-2$.

∴ 命题 p 为真的条件是：$a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\dfrac{3}{2}$ 且 $a\neq-2$；

命题 q 为真的条件是：$a<-1$ 且 $a\neq-2$.

由条件知命题 p、q 有且仅有一个是真命题，故 $a>-\dfrac{3}{2}$.

(3) 由(1)得 $f(2)=2a+\lg|a+2|+6$，

又 ∵ $a>-\dfrac{3}{2}$，∴ $f(2)=2a+\lg(a+2)+6$.

设函数 $u(a)=2a+\lg(a+2)+6$，

∵ $u'(a)=2+\dfrac{1}{(a+2)\ln 10}>0$，∴ 函数 $u(a)$ 在区间 $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上为增函数.

(也可以不运用导数，直接由基本函数的单调性得出判断.)

又 ∵ $u\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3-\lg 2$，∴ 当 $a>-\dfrac{3}{2}$ 时，$u(a)>u\left(-\dfrac{3}{2}\right)$，即 $f(2)>3-\lg 2$.

实战训练二 命题与充要条件

一、填空题

1. 写出 $1<a+b<10$ 的一个充分不必要条件________.
2. 设命题甲为："$0<x<5$"，命题乙为："$|x-2|<3$"，则甲是乙的________条件.
3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，则"$a_1>0$ 且 $q>1$"是"对于任意正整数 n，都有 $a_{n+1}>a_n$"的________条件.
4. 已知命题 p：$|x-2|<a\ (a>0)$，命题 q：$|x^2-4|<1$，若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a