SHUXUEMIUWU YU BEILUN

数学谬误与悖论

内蒙古人民出版社

数学谬误与悖论

〔美〕 布赖恩·H·本奇 著
陈国君 姚谒 译
徐 霆 审校

内蒙古人民出版社

数学谬误与悖论

〔美〕 布赖恩·H·本奇 著

陈国君 姚竭 译

*

内蒙古人民出版社出版发行

（呼和浩特市新城西街82号）

内蒙古新华书店经销 内蒙古新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：8.125 字数：173千

1990年6月第一版 1990年8月第1次印刷

印数：1—1,244册

ISBN 7-204-00862-6/G·106 定价：2.60元

译 者 的 话

《数学谬误与悖论》这本书是1984年美国《科学年鉴》推荐的25部优秀科学著作之一。书中搜集了有关数学、逻辑学、物理学和语言学方面的最重要和最有趣的谬误和悖论。从公元前 450年的芝诺悖论、世界公认的第一个谬误——欧布里德悖论直到1931年的哥德尔定理。

所谓悖论，从字面上讲就是自相矛盾的、似是而非的荒谬理论。关于悖论的定义，一种通俗的说法，悖论是一种导致逻辑矛盾的命题。这种命题，如果承认它是真的，那么它又是假的；如果承认它是假的，那么它又是真的。关于悖论的起源，可以追溯到古希腊和我国先秦哲学时代，但在那时及其往后的一个相当长的历史时期中，悖论往往泛指那些推理过程看上去是合理的，但推理的结果却又违背客观实际。例如，著名的芝诺悖论便属于这一类悖论。

我们都知道数学在整个科学发展中起重要的作用。然而，号称“绝对正确”、“天衣无缝”的数学居然能陷入自相矛盾之中，这真是不可思议。本书就是专门阐述与之类似的那些自相矛盾的结果以及它们“失足”的原因。书中语言生动，内容引人入胜，使读者会不知不觉地被引入到一个扑朔迷离的世界，是一本趣味性、知识性很强的读物。

例如，从$x=1$通过“推理”又可得到$x=0$，这显然是错误，那么问题究竟在哪里呢？书中在给出答案之前尽力启发读者

进行独立的思考以找出谬误所在。然后给出提示，最后再对每一个这样的谬误仔细地加以剖析，以清晰的思路找出其“失足”的原因。从而使读者在惊叹之余恍然大悟——“噢！原来如此。”这样能达到澄清一些似是而非的模糊概念。不但读起来有趣，而且还能加深印象。又如，善跑的名将阿基里斯竟然在“理论上”追不上爬行缓慢的乌龟。这真是滑天下之大稽，可谓是闻所未闻、荒谬绝论的悖逆之说。然而这种“有理”的悖逆之说乍听起来还很难分辨其真假。于是乎人们在惊叹之余又不免要去追究其实质，从而使人们在幽默与风趣中得到享受，即丰富了知识又开阔了眼界。

《数学谬误与悖论》这本书的内容由浅入深、通俗易懂，具有独特的魅力。具有初中以上文化程度的读者对于大部分内容都能看懂。特别是对中学生和大学生学好数学、逻辑学、物理学和语言学是有很大帮助的。他们可以从古今的数学思想中、经验中获得激励自己的意志，启迪自己的智慧。本书的内容也可以做为教师讲课时的辅助性资料，来引起学生的学习兴趣。

目前，我国有关悖论方面的书还很少，为此，我们将此书翻译过来奉献给我国的广大读者，以便增加对科学的兴趣。

由于我们的水平所限，译文可能会有不妥之处，欢迎读者批评指正。

译者　1987年7月

绪　　言

这本书收集和分析了来自数学、逻辑学、物理学和语言学等方面的最有趣的谬误和悖论。同时，本书还从总体上就数学领域中那些来源于悖论的重要结论、以及1931年发表的著名的哥德尔(Gödel)定理及其一些已有定论的问题进行了探讨。

书中所提供的素材，已使数学的真实性与物理学的真实性这二者之间的那些极其微妙的联系成为本书的主题，而悖论和谬误正是探索这种联系的工具。因而，尽管书中的素材含有大量的在文集中被经常提及到的题目，从本书的第一章到第八章无论随便读至哪一章节，就其大多数单个悖论和谬误来说仍然有其明显的连续性，也都有可能使您感到它的奥妙无穷。

前三章涉及到的大部分例子是在目前通常被划归为谬误类的。就这点而论，它们本身在数学中有其特定的缺陷，这些缺陷是所有数学家都一致承认的。

为了鼓励读者努力发现那些缺陷似乎是合适的，因此在每介绍完一个具体的谬误之后我就停下来并发问：你能找出它的错误吗？并同时给出一个提示。在其余各章的讨论中，对这些题目并没有单纯的和公认的解释，因此，这个特点被渗透在四～八章中。

我始终假设我的读者具有一些中学一年级的代数知识。

个别结果也用到了一部分中学的几何知识。但是，本书标题所需要的任何数学内容却都高于这一水平。这包括在第一章中简要介绍的复数的基本概念；第二章中的数学归纳法、级数的极限的概念和一些概率的概念；第三章 中 的 间接证明法；以及第五章中的初等集合论。所有这些对于彻底地理解这些悖论是必要的。即使这样，我还是有意地略去了数学中的某些复杂部分。例如，哥德尔的不完备性定理的讨论被理所当然地简化了(甚 至 不完备性的类型，以及它的应用都被删去了)。对 于狭义相对论的分析也做了同样的处理。这些简化毫不影响这些结果的陈述。在少数情况下，不加证明地陈述结果似乎比在冗长和困难的数学推导过程中陷入困境要好得多。

在此我要感谢密执安大学(University of Michigan)的菲利普·S·琼斯(Phillip S·Jnoes) 博士对我的底稿提出了许多宝贵意见； 并还要感谢我的妻子玛丽 (Mary) 对本书的全部底稿进行了打字，以及她在其它许多方面的帮助和支持。

布赖恩·H·本奇

于纽约

目　　录

对于简单概念的思维错误

如果一个定义确已失去存在的意义，此时，那种仅为其存在而寻求的合理假设于是也变得毫无意义。因为我们需切记其定义(诸如全部的数理结构)所产生的功能本身，全都是人类所发明创造。

卡尔•弗雷德里希•高斯(Karl Friedrich Gauss)

每个人都出过错误。尤其在数学方面每个人都出现过错误。“每个人”包括数学家们，甚至有些时代的最伟大的数学家也是如此。

如果你把两个数相加得到一个错误的和数，这个错只不过是运算上的错误而已。如果这个错误是由一个看来似乎能使它成为正确的论据而引起的话，则这个错误就是一个谬误。虽然有时学生们对这种错误能给出似乎是很合乎逻辑的解释。然而这个和仍然是错误的。

这里有一个很简单的这类错误的例子。它做起来容易之极。请看下面这个和小孩一起来做的“游戏”(甚至于可以和没有防备的成年人)。你走到这个小孩跟前说你可以证明这个小孩有11个手指。小孩问：“多少？”谁都再清楚不过地知道几乎每个人都有10个手指。“数数吧。”

你可以用普通的办法去数手指，用你的手指依次按下他每只手的每一个手指。

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10

“噢”你说，“我们一定是搞错了，让我用另一种方法来数数看。”然后，你开始从小拇指的一边逆着数：

10，9，8，7，6

现在数到大拇指了，你停下来说：“把刚才数过的另一只手上的5个手指加到这上面来就是11了。”

一个错误的结论通过似乎是合乎逻辑地解释而成为正确的结论，这就是谬误。（一般地说，谬误一词也可用于形容思维上的错误，就是用于把不正确的事情说成对的，但是在数学中它却是经过一系列错误的推理而必然得到的结果。）事实上，谬误这个词在数学上也同样可指那类推理是错误的，然而结果却是正确的结论。例如，某个学生使用如下的方法对分数进行化简：

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$$

和

$$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$$

在这种情况下，这个学生得到的是正确的结果，但是这种方法没有逻辑根据，于是在一般情况下这种方法将失效。

推理过程中的这种错误有时之所以能出现，是在某种特定条件下所得到的经验，使你确认为同样的推理过程在与之相联系但又不同的条件下同样是正确的结果。这样的错误可以发生在很简单的问题上，也可能发生在一个比较复杂的问题上。在简单的问题中最通常的结局是，你认识到你必须放弃使用这种推理，尽管很难说出要这样做的原因。但对于比较复杂的问题，你就或许得出这样的结论：这种推理无论如

何还得用，即便所得到的结果看上去与你原有的对客观事物的看法相互矛盾。

没有人能够完全弄清楚为什么推理和数学看上去能如此经常地被用来解释现实世界，然而经验却已告诉我们，当推理和数学论证的结果与你对现实世界的经验不一致时，这其中就很可能存在着一些比较复杂的谬误。只要我们还不知道这种谬误是什么，那么在这种情况下它就是悖论。在某些情况下，正象你所看到的那样，这种悖论是纯数学方面的，在另外一些情况下，悖论是在语言学或是现实世界的某些事件中出现的（与推理有关的）。对于数学方面的大多数悖论来说，若能删除其中那些荒谬的推理部分从而产生出一种“净化”的数学，它定会比那种含有“杂质”的数学能更好地描述现实世界。您说是吧。

在考察关于简单概念的思维错误过程中，我们将发现在对现实世界的推理时所以能产生错误，其原因是对现实世界的一些方面缺乏经验。在数学推理过程中所以能产生错误，其原因必然是运用了某些超出了数学范筹的规律。在论证过程中也有一些情况就是没有正确研讨现实世界。

眼见为实

我们认为我们所面对着的这个世界是合理的。不过推理却能把我们要弄得实在可以。虽然我们所用的推理正确，但却得出了起码是常识的观点认为是错误的结果（亦或是非常识的观点）。考虑下面的例子。

一个一角的硬币和一个半元的硬币的外边缘哪个长呢？单通过眼睛观察以及常识，大多数人就将会回答说半元的硬

币一定比一角的硬币的外边缘长。但是通过论证可以使你相信它们的外边缘长度是相同的。

很可能你已经知道了圆的直径和圆的周长这两者之间的联系，这种联系通常被表达为

$$C=\pi d$$

其中C表示圆周长；d表示圆的直径；希腊字母π（读作pi）表示比3稍大一些的一个神密的常数。数学家们是怎样得到这个奇怪的结论呢？其实只有天知道。总之，测量象圆这样的曲线且要求具有任意的精确度，这是极端困难的。

如果关于圆周长和圆直径这二者之间联系的理论是正确的，那么，半元硬币的边缘就一定比一角硬币的边缘长。因为半元硬币的直径比一角硬币的直径要长，直径是直的这非常容易测出来。然而，你却不要仅仅因为在学校里学过这一知识就承认这个结论。这只要通过一个简单的实验就能解决这个麻烦事。事实上，只要你具体做一下下面的这个试验，你就可以发现这个问题的答案。

假设我们通过每个硬币的中心钻个小孔，然后通过这个孔穿进一个轴。这两个硬币将互相接触。如图1—1所示。

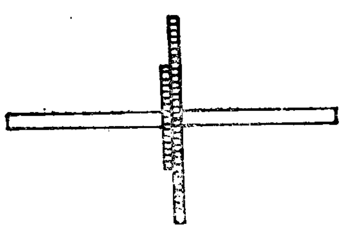

图1-1

将这两枚硬币进一步固定，以便防止当其中的一个转动时，另一个打滑。当你使大一点的硬币在水平桌面上滚动时，小硬币也同时随着转动。如果你在半元硬币的边缘上及与此位置相对应的一角硬币的边缘上各做一个记号，你就可以记录下这两枚硬币滚动了多远的距离。设半元硬币上的记号为A点，一角硬币上的记号为B点。

首先让A点与桌面接触，然后向前滚动半元的硬币，直到A点再一次与桌面重合为止。如果不让半元硬币在桌面上任何滑动的话，则第一个A点和再一次与桌面重合的A点之间的距离就自然等于半元硬币的周长。因为一角硬币也跟着旋转一周。所以也同样导致B点和它开始的位置的重合。测量一下一角硬币的圆周线，你就可以发现一角硬币的周长是比半元硬币的周长长，还是和半元硬币的周长相同或是比半元硬币的周长短了。我们甚至不用真正动手实验，而只是通过图1—2就可以看出结果了。

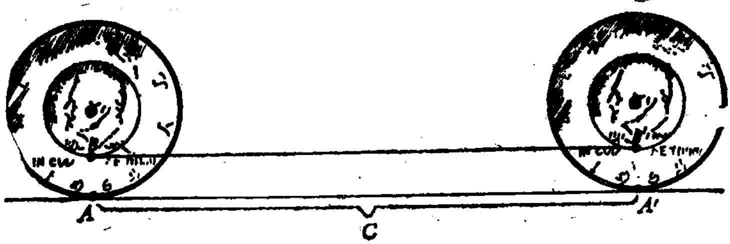

图1-2

毫无疑问，图中C所标明的长度就是半元硬币的圆周线长。一角硬币也旋转了一周，同样，它也画出了它的周长，

其长度明显地等于C，这似乎说明两个直径不同的圆有相同周长，它与我们在学校里所学的知识恰恰相反。事实上，我们很容易发现这个方法可以用来证明任意两个圆都有相同的周长，因此更进一步地说，能证明所有的圆都有相同的周长。

这个惊人的结论是亚里士多德（Aristotle）早在二千多年以前发现的。和我们现在一样，他当时也不相信这个结论。这个推证过程一定是存在着某种错误（事实也的确如此）。

再来重复做一下这个试验，如果这次让一角硬币沿着桌子的边缘向前滚动，则“所有圆的周线”的长度就是不同的了。如图1—3所示。

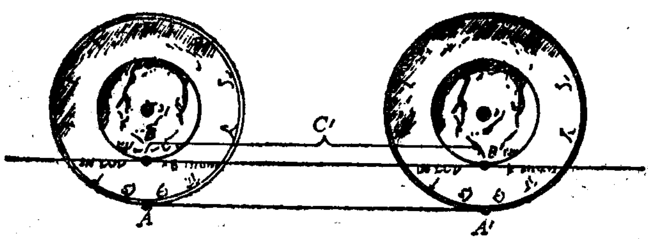

图1-3

如果你对用同时滚动两枚硬币来测量圆的周长的方法感到厌倦的话（这也并不奇怪），那就要稍事麻烦，把一角硬币和半元硬币分开，分别做沿着同一桌面滚动的试验就是了。还可以试着用一段细绳在每一枚硬币的边缘上缠绕一圈，当细绳被打开后，它们的长度也分别等于各自硬币的周

长。如果你做的相当认真的话，这种方法将使你测出它们的周长分别比它们直径的三倍多一点。从而我们所熟悉的公式是正确的可能性毕竟要大一些。

以上的亚里士多德证明，是悖论中的典型一例。它有两个结论，一个是通过直接测量法而获得的（用小绳）。而另一个则使用了推理。二个结论的建立似乎都有十分正确的依据为基础。大多数人一定难以解释：为什么用滚动两枚中心固定在一起的硬币的方法就得不出正确的答案呢。尽管这两种结论都有道理，但它们却是恰好对立的。

Ⅰ. 圆周长取决于该圆的直径。

Ⅱ. 圆周长不取决于该圆的直径。

既然已有理由确认Ⅱ是错误的，那么它就是一个谬误。当一个结论是错误的时候，则这个结论就是一个谬误。但排除我们已经发现在论证过程中存在什么错误，否则我们就不能肯定它是一个谬误。

你能找出它的错误吗？
提示：硬币上的A点和B点
是怎样在桌面上移动的？

我们通过滚动硬币的方法来测量的究竟是什么呢？看上去这种方法是在测量它们周界的长度，然而被测量的肯定不是它们的周界长度。如果你测量硬币周长的方法是对头的，其测量结果是不会出现谬误的呀。

当在桌面上滚动半元硬币时，*A*点在再一次与桌面重合并停止转动的同时，它所运行的轨迹是如图1—4所示的一条特殊曲线。

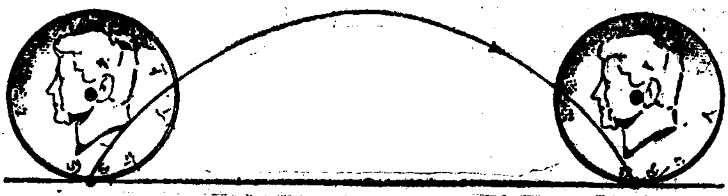

图 1－4

这条曲线被称为旋轮线。它有许多有趣的性质。例如，以旋轮线和硬币沿着滚动的直线为边界所围成图形的面积恰好等于硬币本身圆面积的三倍。此外，当一个物体沿着一条不在同一铅垂线上的两个点所连接的曲线上往下滑时所需用时间最短的曲线也是旋轮线。

如图 1—5。（你以前可能会认为沿 S和F两点之间的直线下滑最快。在这种情况下，一般人的想法都是这样的。可是，你会看到物体沿着旋轮线下滑在一开始时就会产生最大的加速度，从而使物体运动的平均速度增大。也许将来会有一天玩具制造商会制造出一种供孩子们玩的旋轮线形滑梯呢。）

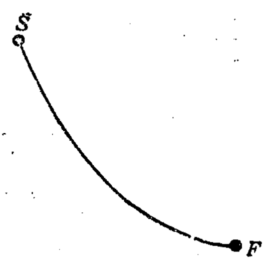

图 1－5

因为在硬币滚动时，它的起点A和终点位置A'两点之间的距离当中直线是最短的，所以旋轮线必定要长于此线段。由于硬币是滚动的，因而A点移动的速度一定要比硬币

上与桌面接触的那个想象的“点”的移动速度快些。这个点是带引号的，它在硬币行程中的每一瞬间都是不同的点（不带引号的）。然而我们可以把这些连续的点理解为一个存在的统一体——一个“点”的统一体。

这可能看上去是奇怪的，但硬币边缘上的每一点都和硬币与桌面接触的那个“点”有着不同的运动速度。这种奇怪的现象可以被这样解释：即A点向前移动的速度是每一时刻都在发生变化的。当A点是在硬币的后半部时，A点的运动速度要比硬币与桌面接触的那个“点”慢；当A点转至硬币的顶部时，由于硬币的旋转，将迫使A点的运动速度要比硬币与桌面接触的那个“点”快，当A点抵达它的行程的后四分之一时，它的运动速度开始下降，最后达到和硬币与桌面接触的那个“点”的运动速度相同。

这些变化是由于硬币的旋转而引起的。我们可以把A点看作是公共汽车上的一个乘客。设公共汽车以匀速向前行驶，当A向汽车后部行走时（此时他运动的速度比公共汽车的速度慢），想起了他应走到汽车前部去买票（此时他运动的速度比公共汽车的速度快），之后向他原来的地方走回去（此时他的速度再一次比公共汽车的速度慢）。尽管这一过程是比较复杂的，但A和公共汽车还是一起到的站。

在两枚被固定在一起的硬币中，B点同样的也画出了一条独特的轨迹，这条轨迹是另一种旋轮线。如图1—6所示。

同A点一样，B点在它不同的运行区间里，它运动的速度也是不同的。如同我们所看到的那样，这种曲线的形状因受到某种外力的作用而发生了明显的改变（就一般旋轮线而