杨益民 杨延龄 沙 峯 编著

文科数学

学习指导

微积分 · 线性代数 · 概率论与数理统计

中国建材工业出版社

文科数学学习指导

微积分·线性代数·概率论与数理统计

杨益民　杨延龄　沙　峯　编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

文科数学学习指导:微积分·线性代数·概率论与数理统计/杨益民,杨延龄,沙峯编著.——北京:中国建材工业出版社,2010.4

ISBN 978-7-80227-653-6

Ⅰ.①文… Ⅱ.①杨…②杨③沙… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料②线性代数—高等学校—教学参考资料③概率论—高等学校—教学参考资料④数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O172②O151.2③O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第040824号

内容简介

该书按照“全国硕士研究生统一考试数学考试大纲”三编写而成,同时参照文科数学教学基本要求,全书分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三个部分。按照考试大纲要求三部分内容分别为八章、六章、六章,各章以典型例题为主体构成一些基本单元,每个基本单元包括三部分:解题思路、详解、习题。

该书可作为正在学习文科数学的本科学生及准备报考硕士研究生考生的参考书。

文科数学学习指导

杨益民　杨延龄　沙　峯　编著

出版发行:中国建材工业出版社

地　　址:北京市西城区车公庄大街6号

邮　　编:100044

经　　销:全国各地新华书店

印　　刷:北京鑫正大印刷有限公司

开　　本:787mm×960mm　1/16

印　　张:16

字　　数:302千字

版　　次:2010年4月第1版

印　　次:2010年4月第1次

书　　号:ISBN 978-7-80227-653-6

定　　价:**30.00**元

本社网址:www.jccbs.com.cn

本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。联系电话:(010)88386906

前　言

大学文科数学由微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课组成。

本书按照“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”三编写，同时参照文科数学教学基本要求。可以作为正在学习文科数学的本科学生以及准备报考研究生的考生的参考书。

全书分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三个部分。按大纲要求，这三部分分别由八章、六章、六章组成。各章以典型例题为主体构成一些基本单元，每个基本单元包括三部分：解题思路、详解、习题。

第一部分是例题和解题思路。这些例题主要选自研究生入学考试试题，试题用五位编码，前两位是年，中间一位是科，后两位是小题的编号。个别试题根据大纲的最新要求作了适当的修改，还有些题目选自工科试题。例题解题思路包括该题用到的理论知识，方法与技巧，容易出现的错误，有时还包括总结性的内容，便于读者对知识与方法的系统掌握。

第二部分是比较详细的解答，便于读者学习。对于典型问题予以详细分类。先按照问题的所求分成几个大类。对于每个大类，再按照已知分成几个小类。每类精选若干例题，予以详尽解答，基本上涵盖了所有常见的典型问题。掌握了这些问题的解法，也就基本上理解了这门学科的主要思想、内容与方法。在这里，主要用一个方法解一种问题，个别题目一题多解。

第三部分是习题。与例题相配合，每个例题配有一到四个习题。供读者检验自己对概念的理解，以及对方法的掌握。有些习题具有一定难度。如果一时不能解决，也不要放弃。经过反复思考，最终找到解决方法，此时收获最大。而且，这也正是学习的乐趣所在。因此，虽然习题后附有答案与提示，也不要急于查看。一个基本单元中的例题与习题的解法基本相同，即当读者学习了例题之后，应可以比较顺利地解习题。

本书由北京工商大学应用数学系杨益民、杨延龄、沙峯编写。因水平有限，谬误难免，请读者批评指正。

在编写过程中我们得到了学校有关部门与中国建材工业出版社的大力支持，在此表示感谢。

作　者

2010 年 2 月

目 录

一 微积分

二　线性代数

三　概率论与数理统计

一 微积分

第一章 极限论

一 计算极限

【例 1.1】 (99401)设函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,则极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________.

【解题思路】 自然数求和.

【解】 极限四则运算.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(a^1a^2\cdots a^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{1+2+\cdots+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a.$$

习题

(a) (90301)极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

(b) (93401) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})=$________.

【例 1.2】 (89306)设函数$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to 0$时,

(A)$f(x)$与x是等价的无穷小.

(B)$f(x)$与x是同阶但不是等价的无穷小.

(C)$f(x)$是比x高阶的无穷小.

(D)$f(x)$是比x低阶的无穷小.

【解题思路】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\begin{cases}0, f(x)\text{是比 }x\text{ 高阶的无穷小}\\1, f(x)\text{是与 }x\text{ 等价的无穷小}\\k(k\neq0,1), f(x)\text{是与 }x\text{ 同阶但不等价的无穷小}\\\infty, f(x)\text{是比 }x\text{ 低阶的无穷小}\end{cases}$

【解】 无穷小比较.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=\ln2+\ln3=\ln6.$$

故选(B).

习题

(a)(92307)当 $x\to0$ 时,下列四个无穷小中,哪个是比其他三个更高阶的无穷小?

(A)x^2.　(B)$1-\cos x$.　(C)$\sqrt{1-x^2}-1$.　(D)$x-\tan x$.

(b)(07301)当 $x\to0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$.　(B)$\ln(1+\sqrt{x})$.　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D)$1-\cos\sqrt{x}$.

【例 1.3】 (88411)求极限$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

【解题思路】 利用无穷小量的等价代换,变量代换,部分取极限等技巧进行化简.

【解】 三角函数.换元,等价无穷小.

令$t=x-1$.当 $x\to1$ 时,$t\to0$,$\tan\dfrac{\pi}{2}t\sim\dfrac{\pi}{2}t$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x&=\lim_{t\to0}(t^2+2t)\cot\frac{\pi}{2}t\\&=\lim_{t\to0}(t+2)\frac{t}{\tan\frac{\pi}{2}t}=\lim_{t\to0}(t+2)\frac{t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

习题

(a)(93301)极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$________.

(b)(05301)极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

【例 1.4】　(08315)计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

【解题思路】　在使用洛必达法则求极限的过程中,注意利用无穷小量的等价代换,有理化,变量代换,部分取极限等技巧进行化简.等价无穷小代换是求$\frac{0}{0}$未定式极限的一个重要技巧,即使有洛必达法则与泰勒公式等工具之后,等价无穷小代换仍然是非常有价值的技巧,应熟知一些常用的无穷小等价关系,例如当$x\to 0$时,

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x),$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},a^x-1\sim x\cdot\ln a(a>0),(1+x)^k-1\sim kx,\sqrt[k]{1+x}-1\sim\frac{x}{k}.$$

【解】　指数与对数函数.洛必达法则.

当$x\to 0$时,$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)\sim\frac{\sin x}{x}-1$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

习题

(a)(87411)求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan\frac{1}{x}}$.

(b)(09309)极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

【例 1.5】　(05315)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

【解题思路】　"$\infty-\infty$"型未定式,一般先通分,在使用洛必达法则求极限的过程中,可利用无穷小量的等价代换,部分取极限,换元等技巧进行化简.

【解】　洛必达法则.

当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x, 1-e^{-x}\sim x$，于是

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

习题

(a)(94411)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

(b)(97411)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$.

(c)(04315)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【例 1.6】 (03401)极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$________.

【解题思路】 幂指函数求极限有以下几种情况：

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=(\lim\limits_{x\to x_0}u(x))^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}=a^b$.

(2)形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数求极限的问题，底 $u(x)\to 1$，指数 $v(x)\to\infty$. 应将这个极限与 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 对比，将原极限中的底 $u(x)$ 写成 $1+f(x)$ 的形式，其中 $f(x)\to 0(x\to 0)$.

(3)对 1^∞ 型未定式 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的极限，可用公式 $\lim u(x)^{v(x)}=\exp\{\lim v(x)\ln u(x)\}$ 或 $\lim u(x)^{v(x)}=\exp\{\lim(u(x)-1)v(x)\}$ 进行计算.

注意结合洛必达法则，无穷小量的等价代换，部分取极限，换元等技巧进行计算.

【解 1】 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，于是

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^2.$$

【解 2】 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\to 0$，$\ln[1+\ln(1+x)]\sim\ln(1+x)\sim x$，

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}\right\}=e^2.$$

习题

(a)(89311)求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

(b)(91311)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(c)(00402)若$a>0,b>0$是常数,则极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x}+b^{x}}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$________.

【例1.7】 (89411)求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$.

【解题思路】 幂指函数求极限,∞^{0}型,或0^{0}型的未定式.

【解】 洛必达法则.

$$\lim_{x\to+\infty}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^{x})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^{x}}{x+e^{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}}=e.$$

习题

(a)(91411)求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^{2}})^{\frac{1}{x}}$.

(b)(88310)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{x}-1}{x\ln x}$.

【例1.8】 (02301)设常数$a\neq\frac{1}{2}$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^{n}=$________.

【解题思路】 求数列的极限,1^{∞}型未定式,不能直接应用洛必达法则,因为n是离散变量,$f(n)$不存在导数,但若能求得$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则由数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$的充分条件是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

【解1】 将自然数n换成实数t,得函数极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left[\frac{t-2ta+1}{t(1-2a)}\right]^{t}$. 换元$x=\frac{1}{t}$,变成极限$\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{1-2a+x}{(1-2a)}\right]$. 用洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{1-2a+x}{(1-2a)}\right]=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{1-2a+x}=\frac{1}{1-2a},$$

所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^{n}=\frac{1}{1-2a}$.

【解2】 等价无穷小代换.

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

习题

(a)(98411)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

【例1.9】 (07306)曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线的条数为________.

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【解题思路】 当 $x\to\infty$ 时,如果没有双侧渐近线,则要考虑单侧渐近线.至于研究铅直渐近线,则应看函数是否存在无定义点.

【解】 当 $x\to\infty$ 时,函数没有双侧渐近线.

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0,$$

于是,$y=0$ 是一条单侧水平渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0.$$

于是,$y=x$ 是一条单侧斜渐近线.

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty,$$

于是,$x=0$ 是铅直渐近线.故选(D).

习题

(a)(03407)曲线 $y=xe^{x^{\frac{1}{2}}}$

(A)仅有水平渐近线. (B)仅有铅直渐近线.

(C)既有铅直又有水平渐近线. (D)既有铅直又有斜渐近线.

二　已知极限

【例 1.10】　(06419)试确定 A,B,C 的常数值,使得 $e^{x}(1+Bx+Cx^{2})=1+Ax+o(x^{3})$,其中 $o(x^{3})$ 是当 $x\to0$ 时比 x^{3} 的高阶无穷小.

【解题思路】　高阶无穷小,洛必达法则,泰勒公式;已知极限求参数.

一般地,已知 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$,

(1)若 $g(x)\to0$,则 $f(x)\to0$;

(2)若 $f(x)\to0$,且 $A\neq0$,则 $g(x)\to0$.

【解 1】　用洛必达法则计算极限.

已知函数的商的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}(1+Bx+Cx^{2})-1-Ax}{x^{3}}=0$,用洛必达法则计算导数的商的极限,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{e^{x}(1+Bx+Cx^{2})+e^{x}(B+2Cx)-A}{3x^{2}}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}(1+Bx+Cx^{2})+2e^{x}(B+2Cx)+2Ce^{x}}{6x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}(1+Bx+Cx^{2})+3e^{x}(B+2Cx)+6Ce^{x}}{6}\\
&=\frac{1+3B+6C}{6}.
\end{aligned}$$

导数的商的极限存在,由洛必达法则,与函数的商的极限相等.即 $\frac{1+3B+6C}{6}=0$.同时,由上面计算过程中的第一式和第二式中极限等于 0,还有

$$\lim_{x\to0}[e^{x}(1+Bx+Cx^{2})+e^{x}(B+2Cx)-A]=1+B-A=0,$$

$$\lim_{x\to0}[e^{x}(1+Bx+Cx^{2})+2e^{x}(B+2Cx)+2Ce^{x}]=1+2B+2C=0.$$

最后,解方程组 $\begin{cases}1+B-A=0\\1+2B+2C=0\\1+3B+6C=0\end{cases}$,得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

【解 2】　泰勒展开.

将 e^{x} 在 $x=0$ 展开,得 $e^{x}=1+x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})$,代入等式,得

$$\left(1+x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})\right)(1+Bx+Cx^{2})=1+Ax+o(x^{3}),$$

比较两边同次幂系数，得$\begin{cases} B+1=A \\ \frac{1}{2}+B+C=0 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{2}B+C=0 \end{cases}$．解得$A=\frac{1}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}$.

习题

(a)(04301)若极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则常数$a=$______，$b=$______.

(b)(09302)当$x\to 0$时，函数$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则______.

(A)$a=1, b=-\frac{1}{6}$.　　(B)$a=1, b=\frac{1}{6}$.

(C)$a=-1, b=-\frac{1}{6}$.　　(D)$a=-1, b=\frac{1}{6}$.

三　判定极限

【例 1.11】　(06301)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$______.

【解题思路】　(1)数列极限，利用$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

(2)可利用幂指函数求极限.

【解 1】　记$x_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$，则$x_{2n}=\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{(-1)^{2n}}=\frac{2n+1}{2n}$，

$$x_{2n+1}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{(-1)^{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n+2},$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

【解 2】　改写，由连续，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}.$$

数列$\{(-1)^n\}$有界，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=e^0=1.$$

习题

(a)(00306)设对于任意x，函数$h(x)$，$f(x)$，$g(x)$满足$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，

且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0$，则极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$________.

(A)存在且等于0. (B)存在但不一定等于0.

(C)一定不存在. (D)不一定存在.

(b)(08401)设$0<a<b$，则极限$\lim\limits_{n\to 0}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$________.

(A)a. (B)a^{-1}. (C)b. (D)b^{-1}.

【例 1.12】 (93206)当$x\to 0$时，函数$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是

(A)无穷小量. (B)无穷大量.

(C)有界但非无穷小量. (D)无界但非无穷大量.

【解题思路】 当$x\to 0$时，显然$\frac{1}{x^2}\to\infty$，但是$\sin\frac{1}{x}$在-1和1之间不断地摆动，并且不断地重复函数值零. 因此不难排除(A)、(B)、(C)三个选项.

【解】 令$x_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}(n=1,2,\cdots)$，则$x_n\to 0.f(x_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\to\infty$.

所以当$x\to 0$时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$不是无穷小量，也不是有界量.

又令$z_n=\frac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$，则$z_n\to 0.f(z_n)=0$. 所以当$x\to 0$时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$不是无穷大量.

于是当$x\to 0$时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$无界但非无穷大量，故应选(D).

习题

(a)(87207)函数$f(x)=x\sin x$

(A)在$(-\infty,+\infty)$有界. (B)当$x\to\infty$时为无穷大.

(C)在$(-\infty,+\infty)$无界. (D)当$x\to\infty$时有极限.

【例 1.13】 (07311)极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

【解题思路】 无穷小乘有界函数仍为无穷小.

【解】 由洛必达法则